Новосибирский государственный
педагогический университет

Г. М. СЕРЕГИН

РАЗРЕЗАНИЕ КВАДРАТА НА МАЛЫЕ УГОЛКОВЫМ МЕТОДОМ

Учебно-методическое пособие

Новосибирск
Издательство НИПКиПРО
2020

УДК 372.851
ББК 74.262.21
С32

Рецензенты:
Е. А. Рудакова, кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры математического образования НИПКиПРО;
Н. А. Бурова, кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры геометрии и методики обучения математике НГПУ

Серегин, Г. М.
С32 Разрезание квадрата на малые уголковым методом : учебно-методическое пособие / Г. М. Серегин ; НГПУ. — Новосибирск : Изд-во НИПКиПРО, 2020. — 44 с.

ISBN 978-5-87847-750-5.

В методическом пособии рассмотрена одна из задач на разрезание фигур — задача разбиения квадрата на конечное число квадратов, не все из которых имеют разные размеры. Решение этой задачи осуществляется уголковым методом. Приводятся задания на вычисление площадей квадратов, разрезанных на малые квадраты.

Для учителей средних учебных заведений, студентов и магистрантов педагогических вузов.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебное издание

Серегин Григорий Михайлович

Разрезание квадрата на малые уголковым методом

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 01.06.2020. Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсет № 1.
Гарнитура Times. Печать RISO. Усл. печ. л. 2,55. Тираж 50 экз. Заказ № 9.

Издательство НИПКиПРО. 630007, г. Новосибирск, Красный пр., 2.
Тел.: (383) 223-56-96. E-mail: iio99@mail.ru.

Типография «Принт-офис». 630055, ул. Иванова, 4, оф. 106.
Тел.: (383) 336-43-07. E-mail: print_office@ngs.ru

ISBN 978-5-87847-750-5

Введение

Математический кружок является одной из форм внеклассной работы по математике. Задачи, решаемые на кружке, должны способствовать углублению и расширению математических знаний учащихся, повышать интерес к этому сложному и трудному учебному предмету. В содержание занятий математического кружка 5–6 классов часто включаются задачи на разрезание и составлении фигур, в частности, прямоугольников и квадратов.

Квадрат, разбитый на попарно неравные квадраты, называется совершенным. Первые совершенные квадраты были найдены в середине прошлого века. В данной работе рассматривается такое разрезание квадрата, при котором могут быть и попарно равные малые квадраты. Можно высказать предположение, что решение этой задачи зависит от заданного количества квадратов, на которые делится исходный квадрат. Рассмотрим основные случаи, подтверждающие высказанное предположение, и укажем метод, с помощью которого можно разрезать квадрат на заданное число малых квадратов.

1. Уголковый метод разрезания квадрата на малые квадраты.

1.1. Разрезание квадрата на равные квадраты

Если число квадратов при разрезании данного квадрата есть квадрат натурального числа, то исходный квадрат разобьётся на равные между собой квадраты. В этом случае число квадратов может быть равно 4, 9, …, $n^2, n > 1$. Для этого две смежные стороны данного квадрата делятся на 2, 3, 4, …, или, в общем виде, на n равных между собой отрезков ($n > 1$). Через точки деления проводятся прямые, параллельные сторонам квадрата, например, как при делении квадрата на 9 малых квадратов при игре в крестики-нолики.

1.2. Разрезание квадрата на чётное число квадратов двух видов

Среди полученных при разрезании квадратов возможны и неравные друг другу квадраты. В этом случае задача либо не имеет решения (если разрезать нужно на 2, 3, или 5 квадратов), либо оно имеет одно или несколько решений.

Рассмотрим вначале случай разрезания квадрата на чётное число квадратов двух различных размеров. При этом воспользуемся одним из методов решения задачи на разрезание квадрата, который назовем *«уголковым методом»*. Сторону квадрата, как и любой отрезок, можно разделить (с помощью циркуля и линейки) на любое число равных между собой число отрезков. Выберем какие-либо две смежные стороны некоторого квадрата, пусть это будут стороны, образующие *правый нижний угол*. Разделим каждую из этих сторон на n равных между собой отрезков и на каждом из них как на основании построим малый квадрат внутри данного квадрата. Получим две полосы малых квадратов, общее число которых равно $n+(n-1)=2n-1$. Остальная часть исходного квадрата (без этих двух полос) также будет являться квадратом. Тем самым общее число квадратов будет равно $1+(2n-1)=2n$. Таким образом, нами указан способ разрезания данного квадрата на любое *чётное* число квадратов.

Пример 1. Чтобы разрезать квадрат на 6 квадратов, разделим каждую из смежных сторон, образующих правый нижний угол, на $6:2=36$ равные части и построим на этих сторонах $3+2=5$ малых квадратов, (другими словами, проведем две полосы, пересекающиеся под прямым углом). В результате получится один большой и 5 малых квадратов: $1+5=6$ (рис.1).

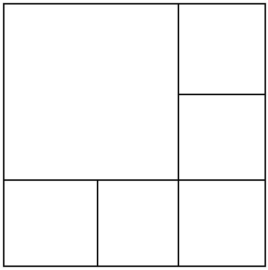

Рис.1. Разрезание квадрата на 6 квадратов

Пример 2. Чтобы разделить квадрат на 14 квадратов, нужно две угловые стороны разделить на $14 : 2 = 7$ равных отрезков и построить $7 + 6 = 13$ малых квадратов. В результате получим $1 + 13 = 14$ квадратов (рис.2).

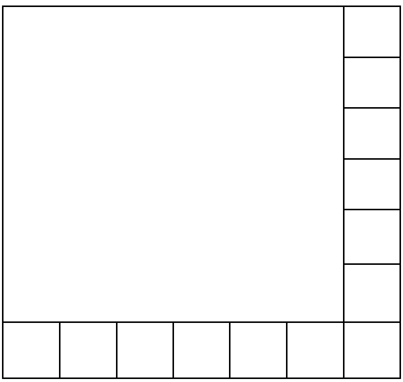

Рис.2. Разрезание квадрата на 14 квадратов (решение 1).

На основе всего выше сказанного сделаем следующий вывод.

Вывод 1. П*ри разрезании квадрата на любое чётное (большее 2) число* $2n$ *квадрата, всегда можно получить один большой и* $2n-1$ *равных между собой малых квадратов, при этом две смежные угловые стороны делятся на* n *равных между собой отрезков.*

Следует заметить, что чем более большое число $2n$ будем брать, тем разница в размерах малых квадратов будет возрастать: смежные угловые стороны исходного квадрата будут делиться на большое число равных отрезков. Так, например, при разрезании квадрата на 120 квадратов, сторону нужно разделить на 60 равных отрезков, а при разрезании квадрата на 2020 квадратов — делить на 1010 отрезков. Оставшаяся от малых квадратов часть будет значительно отличаться размерами от мелких квадратов. Однако эту часть — а это будет тоже квадрат – можно разделить на 9, 25, 49 и т. д. равных между собой квадратов. Поэтому малых квадратов, образующих правый нижний угол, будет меньше и делить сторону исходного квадрата нужно будет на меньшее число равных между собой отрезков.

Так, при разрезании исходного квадрата на 14 квадратов можно смежные угловые стороны разделить на 3 равные части, получив при этом 5 малых квадратов, а оставшийся левый верхний квадрат разделить на 9 равных квадратов, как показано на рис. 3.

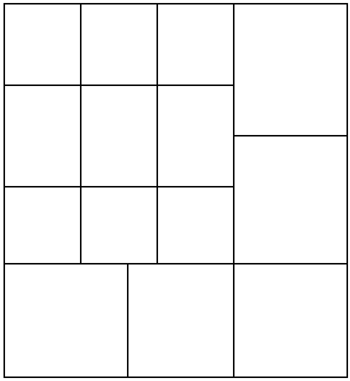

Рис. 3. Разрезание квадрата на 14 квадратов (решение 2).

Левый верхний, оставшийся от малых квадратов, квадрат можно разделить и на 4 равных квадрата, но тогда малых квадратов должно быть 10, что невозможно, так как при уголковом методе их количество должно быть нечётным.

При решении примера 2 число 14 было представлено двумя способами: $14 = 1 + 13$ и $14 = 9 + 5$. При этом первое слагаемое в обоих случаях есть *квадрат нечётного числа*. Число 120 можно представить четырьмя способами:

$$120 = 1 + 119 = 9 + 111 = 25 + 95 = 49 + 71 = 81 + 39.$$

Последнее представление предпочтительнее, так как смежные стороны правого нижнего угла и стороны оставшегося левого верхнего квадрата приходится делить на меньшее число отрезков. При этом размеры получившихся при делении двух видов квадратов различаются не так сильно, как в предшествующих представлениях. Квадраты при разрезании исходного квадрата получаются не такими мелкими. Поэтому можно сделать следующий вывод:

Вывод 2. Любое чётное число, начиная с 12, можно представить в виде суммы двух нечётных слагаемых так, что первое из них есть ближайший квадрат нечётного числа, не превосходящий данное чётное число.

Так, при разрезании квадрата на 2020 малых квадратов, число 2020 можно представить как $1849 + 71 = 43^2 + 71$, а при разрезании квадрата на 300 малых квадратов — как $289 + 11 = 17^2 + 11$.

Задание 1. а) На клетчатой бумаге изобразите два квадрата, стороны которых равны 20 клеточкам. Уголковым методом один из них разделите на 8 квадратов двух разных видов, а другой – на 10 таких квадратов.

б) На клетчатой бумаге изобразите два квадрата, стороны которых равны 18 клеточкам. Уголковым методом каждый из них разделите на 18 квадратов двух разных видов, но двумя различными способами.

в) Объясните, как разрезать квадрат на квадраты двух различных размеров уголковым методом, если число получившихся квадратов должно быть равно 32. Сколько возможно способов решения? Выполните эскиз, поясняющий эти решения.
Решение: $32 = 1 + 31 = 9 + 23 = 25 + 7$.

Задание 2. Используя выделение ближайшего к данному числу квадрата нечётного числа, объясните, как разрезать квадрат на квадраты двух различных размеров уголковым методом, если число получившихся квадратов должно быть равно: а) 96; б) 370; в) 550; г) 1100.

Решение: а) $96 = 81 + 17 = 9^2 + 17$;
б) $370 = 361 + 9 = 19^2 + 9$;
в) $550 = 529 + 21 = 23^2 + 21$;
г) $1100 = 1089 + 21 = 33^2 + 11$.

Найдите другие решения этого задания в случае, когда квадрат нечётного числа не является числом, ближайшим к данному чётному числу, т.е. к числу квадратов, на которое разрезан квадрат.

1.3. Разрезание квадрата на нечётное число квадратов двух видов

В предыдущем пункте был рассмотрен уголковый метод деления квадрата на чётное число квадратов двух видов. При этом подчёркивалось, что на начальном этапе две смежные стороны квадрата делятся на равное число отрезков и строятся на этих отрезках как на основаниях малые квадраты. Этих квадратов будет нечётное количество. Поэтому, чтобы разделить данный квадрат на *нечётное число* квадратов уголковым методом, необходимо оставшийся от малых квадратов левый верхний квадрат разделить на *чётное число* квадратов: на 4, 16, 36 и т.д.

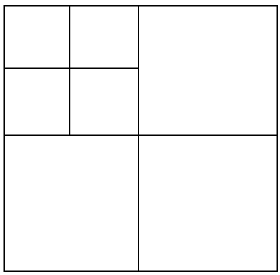

Рис. 4

Пример 3. Чтобы разделить квадрат на 7 квадратов, разделим каждую из смежных сторон, образующих правый нижний угол, на 2 равные части и построим на этих сторонах 2 + 1 = 3 малые квадрата. В данном случае исходный квадрат на этом этапе разделится на 4 равных квадрата. Левый верхний квадрат разделим также на 4 равных квадрата. В результате получится 4 + 3 = 7 квадратов (рис. 4).

Пример 4. Чтобы разделить квадрат на 21 квадрат, представим вначале это число как сумму двух слагаемых: квадрата чётного числа, не превышающего данное число 21, и нечётного числа следующим образом: 21 = 4 +17 или 21 = 16 + 5.

Тогда, воспользовавшись уголковым методом, получим два решения задачи деления квадрата на две группы квадратов, отличающихся размерами.

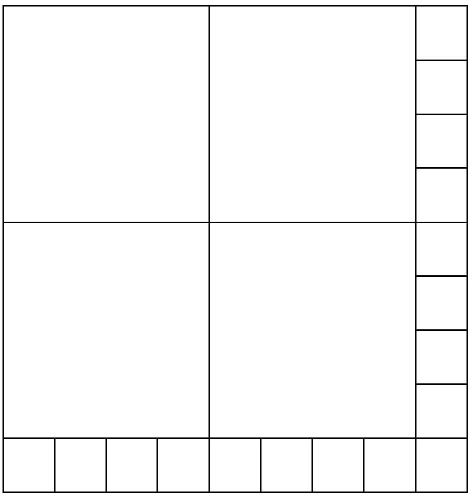

Рис.5. Разрезание квадрата на 21 квадрат (решение 1).

Первое решение аналогично решению примера 3: вначале делим смежные стороны квадрата на (17 + 1) = 9 равных частей и строим 17 малых квадратов. Затем делим получившейся левый верхний квадрат на 4 равные части. Заметим, что малые квадраты получились действительно маленькими (рис. 5).

Второе решение связано с выделением квадрата чётного числа, наиболее близкого исходному числу; квадраты получились более крупными по сравнению с предыдущим решением (рис.6).

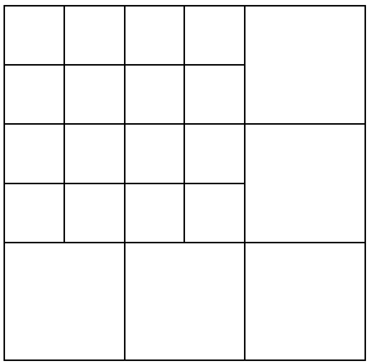

Рис.6. Разрезание квадрата на 21 квадрат (решение 2).

Поэтому, по аналогии с делением на чётное число квадратов, можно сделать следующие выводы:

Вывод 1. При разрезании квадрата на любое *нечётное* (большее 5) число $2n + 3$ квадратов, всегда можно получить 4 больших и $2n - 1$ равных между собой малых квадратов, при этом две смежные угловые стороны делятся на n равных между собой отрезков.

Вывод 2. При разрезании квадрата на любое *нечётное* (большее 5) число $2n + 3$ квадратов, представим вначале это число как сумму двух слагаемых, одно из которых есть квадрат чётного числа, ближайший к данному числу, а другое — нечётное, дополняющее первое слагаемое до данного числа.

Пример 5. При делении данного квадрата на 99 квадратов, две смежные стороны, образующие правый нижний угол, делятся на (99 – 3) : 2 = 48 равных частей и строятся 48 + 47 = 95 малых квадратов, а левый верхний квадрат делится на 4 равных между собой квадрата.

Если же, например, число 99 представить как 64 + 35, то смежные стороны надо будет разделить на 18 равных частей (а не 48!), а стороны оставшегося квадрата — на 8 равных частей. Но 64 — это квадрат чётного числа, ближайший к данному числу, поэтому размеры квадратов при делении получаются более крупными.

Задание 3. а) На клетчатой бумаге изобразите два квадрата, стороны которых равны 20 клеточкам. Уголковым методом один из них разделите на 13 квадратов двух разных видов, а другой — на 17 таких квадратов.

б) На клетчатой бумаге изобразите два квадрата, стороны которых равны 16 клеточкам. Уголковым методом каждый из них разделите на 19 квадратов двух разных видов, но двумя различными способами.

в) Объясните, как разрезать квадрат на квадраты двух различных размеров уголковым методом, если число получившихся квадратов должно быть равно 43. Сколько возможно способов решения? Выполните эскиз, поясняющий эти решения.
Решение: 43 = 4 + 39 = 16 + 27 = 36 + 7.

Задание 4. Используя выделение ближайшего к данному числу квадрата чётного числа, объясните, как разрезать квадрат на квадраты двух различных размеров уголковым методом, если число получившихся квадратов должно быть равно: а) 77; б) 155; в) 333; г) 2019.

Решение: а) $77 = 64 + 13 = 8^2 + 13$;
б) $155 = 144 + 11 = 12^2 + 11$;
в) $333 = 324 + 9 = 18^2 + 9$;
г) $2019 = 1936 + 83 = 44^2 + 83$.

Найдите другие решения этого задания в случае, когда квадрат чётного числа не является ближайшим к данному чётному числу, т.е. к числу квадратов, на которое должен быть разрезан данный квадрат.

1.4. Разрезание квадрата на квадраты трёх и более различных размеров

При разрезании квадрата на 7 квадратов получилось три больших и 4 малых квадратов (рис.4). Если один из трёх больших квадратов разделим также на 4 равные части, то исходный квадрат разделится на 10 квадратов (рис.7), а если теперь один из двух оставшихся так же разделим на 4 равные части, то исходный квадрат разделится на 13 квадратов (рис.8). Этот метод деления квадрата основан на уголковом методе, но далее используется деление полученных на первом этапе квадратов на равные части.

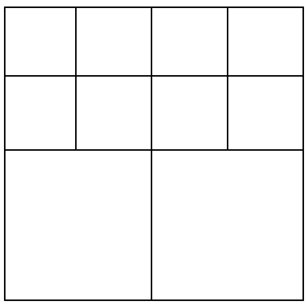

Рис.7. Разрезание на 10 квадратов

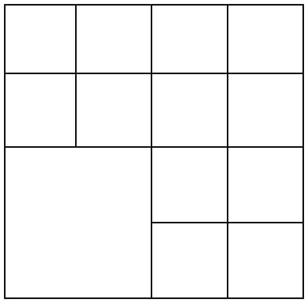

Рис.8. Разрезание на 13 квадратов

Тем самым найден ещё один метод деления квадрата на малые квадраты двух видов.

Однако каждый из трёх больших квадратов, оставшихся от деления данного квадрата на 7 квадратов, можно делить на 9, или на 16, или на 25, или на 36 и т.д. равных между собой квадратов. В этом случае при делении могут получиться квадраты трёх и четырёх видов. Более того, каждый из четырёх малых квадратов, полученных при делении данного квадрата на 7 квадратов, а также вновь получающиеся мелкие квадраты, также можно делить на равные между собой квадратики. Такое деление выглядит достаточно хаотично.

При использовании уголкового метода было замечено, что число, которое соответствует количеству квадратов, на которое делится данный квадрат, представляется в виде суммы определённым образом. Первое слагаемое суммы есть квадрат некоторого числа, а последнее слагаемое должно быть обязательно нечётным числом. Если сумма состоит из трёх и более слагаемых, то слагаемые, расположенные между первым и последним, должны быть только нечётными числами (объясните, почему).

Пример 6. При разложении числа 11 первое слагаемое может быть либо 1, либо 4, а последнее слагаемое — 3, 5 либо 7. Тогда число 11 можно представить в виде указанной выше суммы четырьмя способами:

а) 11 = 1 + 7 + 3; б) 11 = 1 + 5 + 5,

в) 11 = 4 + 7; г) 11 = 1 + 3 + 7.

Поэтому при разрезании данного квадрата на 11 малых квадратов могут получиться квадраты либо двух, либо трёх различных размеров (рис. 9).

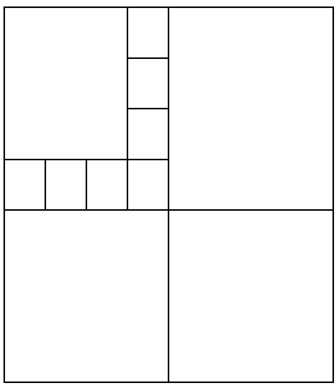

Рис. 9 а

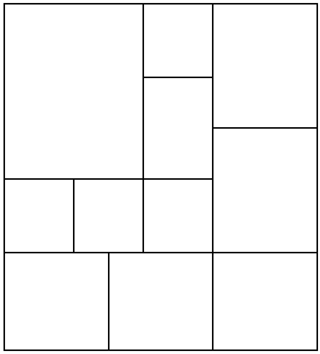

Рис. 9 б

Заметим, что хотя представление числа 11 в виде суммы было четырьмя способами, но решений получилось три. Способы в) и г) дают одинаковое решение, и при этом получаются квадраты только двух различных размеров.

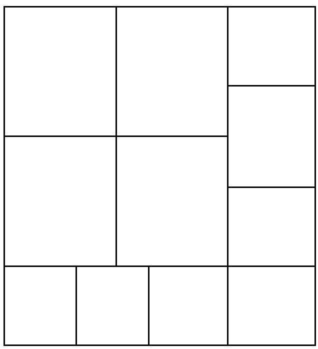

Рис. 9 в

Более того, сравнивая разложение числа 11 в случаях а) и г), убеждаемся, что от перестановки мест слагаемыми решения получились различными. Поэтому представление числа 11 в виде суммы чисел можно записывать в виде *упорядоченной* пары или тройки чисел так: а) (1,7,3); б) (1,5,5,); в) (4;7); г) (1,3,7).

Чем на большее число малых квадратов требуется разделить исходный квадрат, тем количество решений резко возрастает. Рассмотрим этот факт на следующем примере.

Пример 7. Для получения квадратов трёх и более видов можно вновь воспользоваться уголковым методом. Пусть требуется разделить квадрат на 19 малых квадратов трёх и более видов.

Представить число 19 в виде суммы двух и более слагаемых можно различными способами. Учтём высказанное выше замечание о том, какими при уголковом методе могут быть слагаемые. В данном примере первыми слагаемыми возможны числа 1, 4, 9, или 16, а последними — 3, 5, 7, 9, 11, 13 или 15.

Случай 1.1. Если первое слагаемое равно 1, то 19 можно представить в виде суммы трёх слагаемых семью способами. Получим следующие упорядоченные тройки чисел:

а) (1,15,3); б) (1,13,5); в) (1,11,7); г) (1,9,9);
д) (1,7,11); е) (1,5,13); ж) (**1,3**, 15).

При делении квадрата во всех указанных выше вариантах, кроме последнего, получатся квадраты трёх различных размеров (рис. 10, рис. 11). В последнем варианте только двух, поэтому тройке (**1,3**,15) будет соответствовать упорядоченная пара (**4**,15). Однако разбиение квадрата на малые квадраты (рис. 12) будет отличаться от того, что было представлено в пункте 2.2.

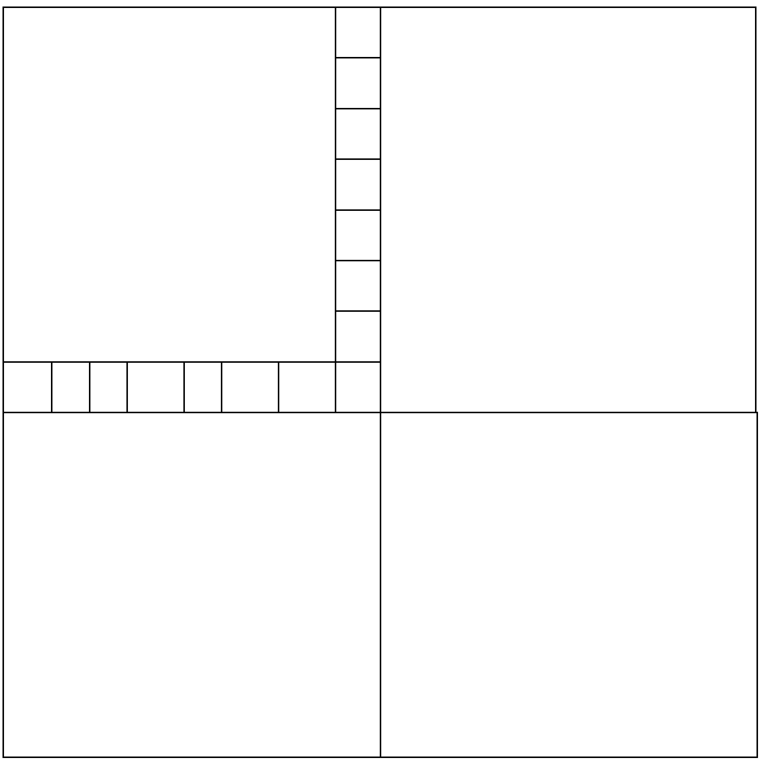

Рис. 10. Разрезание на 19 квадратов (вариант 1.1 (а))

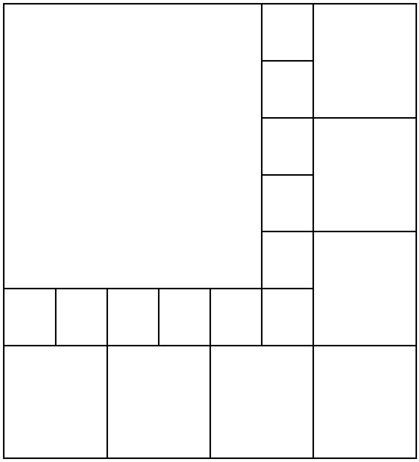

Рис. 11. Разрезание на 19 квадратов
(вариант 1.1 (в))

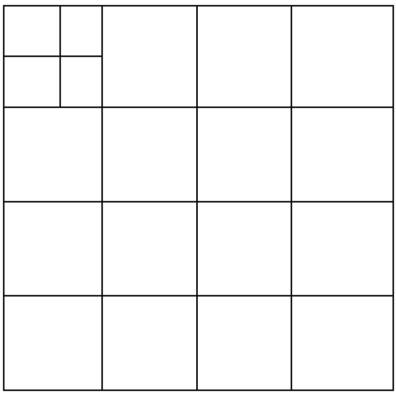

Рис. 12. Разрезание на 19 квадратов
(вариант 1.1 (ж))

Случай 1.2. Так как в разложении числа не должно быть слагаемых, являющихся чётными числами, то число 19 в виде четырёх слагаемых для уголкового метода представить нельзя. Его можно представить в виде суммы 5 слагаемых, при этом последним слагаемым может быть число 3, 5, 7 или 9.

1.2.1. Если последнее слагаемое равно 3, то получим шесть представлений, при этом число 3 в разложении встречается два раза: а) (**1,3,5,7**, 3); б) (**1,3**, 7,5,3); в) (1,5,3,7,3); г) (1, **5,7**, 3,3); д) (1,7,5,3,3); е) (1,7, **3,5**, 3); ж) (1,5,5,5,3).

При делении квадрата уголковым методом в варианте (а) получаются квадраты только двух размеров, поэтому пятёрке (**1,3,5,7**,3) будет соответствовать упорядоченная пара (**16**,3).

В случаях под буквами (б), (г) и (е) получаются квадраты четырёх различных размеров. Квадраты пяти различных размеров получаются в случаях (в), (д) и (ж).

1.2.2. Если последнее слагаемое равно 5, то будет шесть разложений числа 19: а) (**1,3**, 3,7,5); б) (**1,3**, 7, **3,5**); в) (**1,3,5**, 5,5); г) (1,7,3, **3,5**); д) (1,5, **3,5,** 5); е) (1,5,5, **3,5**). В этих случаях получаются квадраты трёх (случаи (б) и (в)) и четырёх (случаи (а)**,** (г), (д) и (е)) различных размеров.

1.2.3. Если последнее слагаемое равно 7, то получим три представления:

а) (**1,3**, **3,5,7**); б) (**1,3,5**, 3,7); в) (1,5,3,3,7).

В этих случаях при делении квадрата получаются квадраты двух (случай (а)), трёх (случай (б)) и пяти (случай (в)) различных размеров.

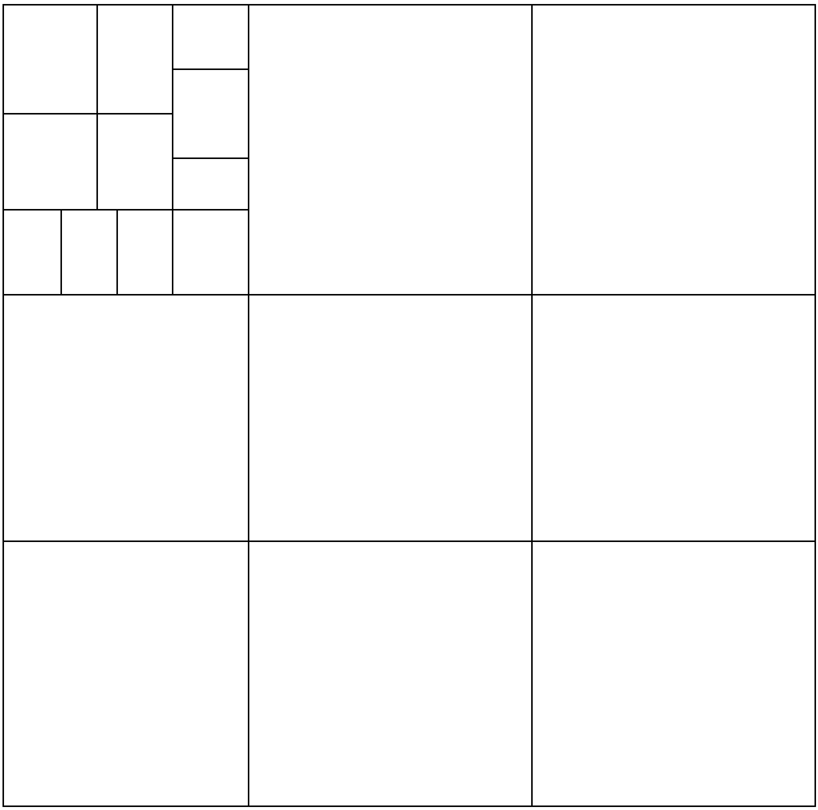

Рис. 14. Разрезание на 19 квадратов (вариант 1.2.2 (б))

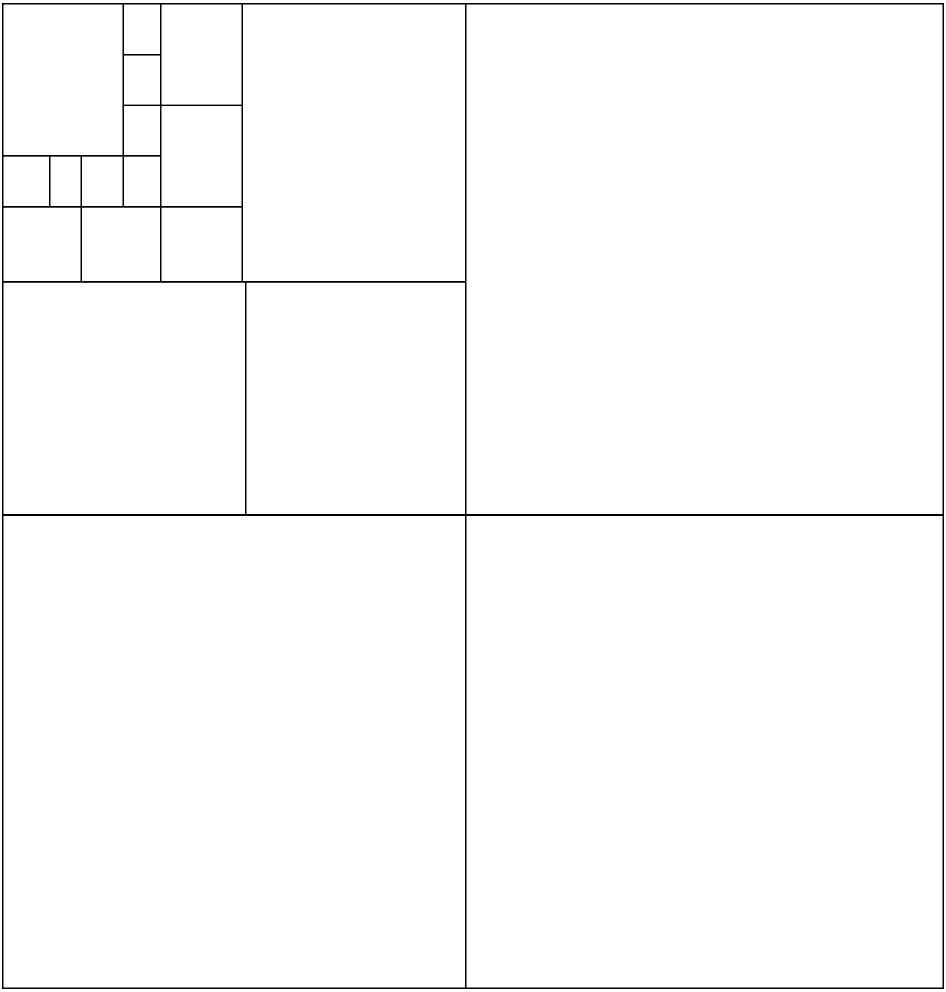

Рис. 15. Разрезание на 19 квадратов
(вариант 1.2.1 (д))

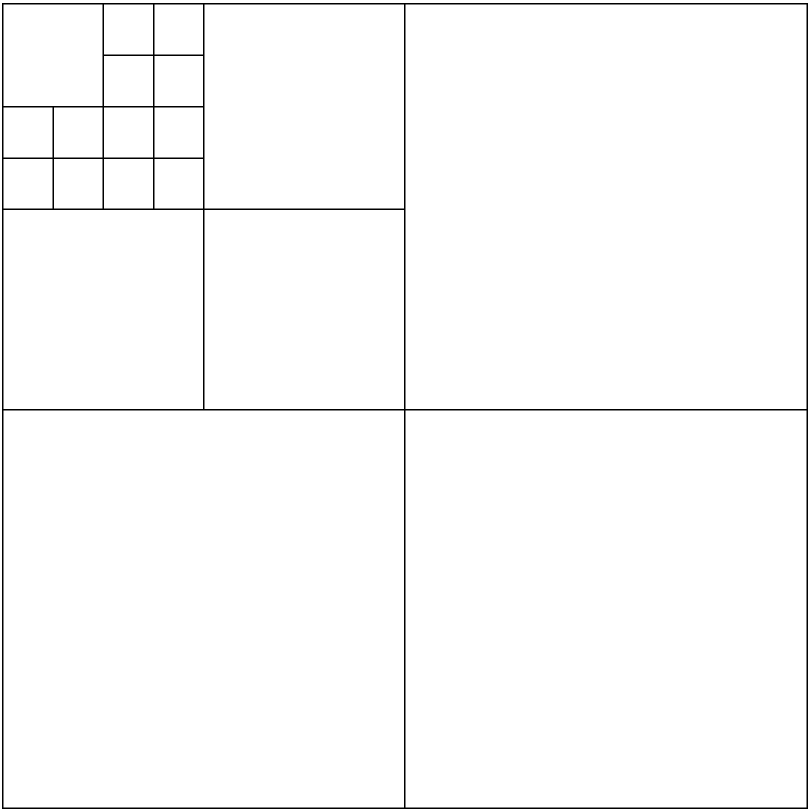

Рис.16. Разрезание на 19 квадратов (вариант 1.2.1 (г))

1.2.4. Если в представлении числа 19 одно из слагаемых равно 9, то в уголковом методе число 19 можно представить в виде суммы пяти нечётных слагаемых следующим образом:

а) (**1,3**, 3,3,9); б) (**1,3,** 3,9,3);

в) (**1,3**, 9,3,3); г) (1,9,3,3,3).

В первых трёх представлениях упорядоченные пятёрки чисел будут полностью соответствовать упорядоченным четвёркам (4, 3,3,9), (4,3,9,3); (4,9,3,3). При делении квадрата получатся более мелкие квадраты четырёх различных размеров. В случае (г) получатся квадраты пяти различных размеров.

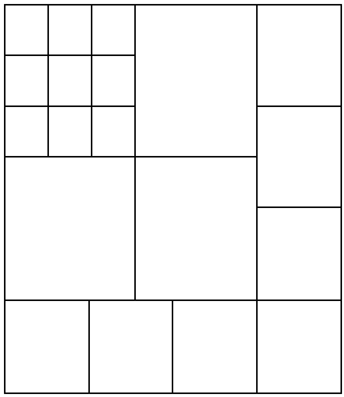

Рис. 13. Разрезание на 19 квадратов
(варианты 1.2.3 (б), 2 (в), 4 (д))

Число 9 в приведённых разложениях можно представить в виде сумы трёх троек, тогда число 19 можно разложить на слагаемые следующим образом: д) (**1,3**, 3,3,3,3,3). В этом случае исходный квадрат с помощью уголкового метода разрежется на квадраты шести различных размеров.

Случай 2. Если первое слагаемое равно 9, то число 19 можно представить в виде суммы трёх слагаемых (упорядоченной тройки чисел) тремя способами:

а) (9,5,5); б) (**9,7**,3); в) (9,3,7). При делении квадрата в указанных выше представлениях получаются квадраты трёх различных размеров.

Случай 3. Если первое слагаемое равно 16, то число 19 представимо в виде двух слагаемых: 19 = 16 + 3. При делении данного квадрата на малые квадраты в этом случае получатся квадраты двух различных размеров (рис.18).

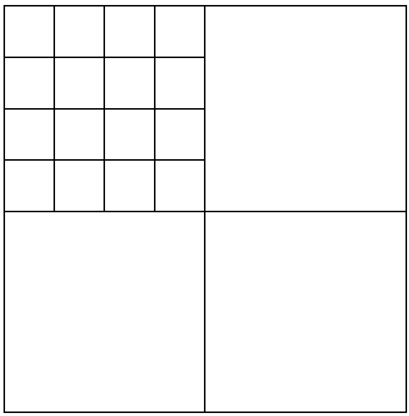

Рис.17. Разрезание на 19 квадратов (случаи 3 и 121(а)).

Случай 4. Если первое слагаемое равно 4, то учитывая требования, предъявляемые к числам при применении уголкового метода, получим следующие представления числа 19, записанные в виде упорядоченной пары чисел — (4,15), в виде упорядоченной четвёрки чисел, последним из которых может быть 3,5,7,9: а) (**4,5,7**,3); б) (4,7,5,3); в) (4,3,7,5); г) (4,7,**3,5**); д) (**4,5**,3,7);

е) (4,**3,5**,7); ж) (**4,5**,5,5); з) (4,3,3,9); и) (4,3,9,3); к) (4,9,3,3).

При делении исходного квадрата на малые квадраты двух различных размеров получаются в случае (а); трёх различных размеров – в случаях (г), (д), (е), (**ж**); четырёх размеров – (б), (в), (з), (и), (к).

Если в последних трёх случаях число 9 представить сумму трёх троек, то получим упорядоченную шестёрку чисел (4,3,3,3,3,3), что соответствует случаю 1.2.4.(д), в результате разбиения исходного квадрата получатся квадраты шести различных размеров.

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи деления квадрата на 19 малых квадратов уголковым методом.

Анализируя решение примеров 6 и 7, было замечено, что представление данного числа в виде суммы двух, трёх и более (если это возможно) слагаемых, удовлетворяющих условиям уголкового метода, *не гарантирует,* что и число малых квадратов, на которое делится исходный квадрат, будет также состоять соответственно из двух, трёх и более малых квадратов.

Если первое число (в упорядоченном множестве при разложении исходного числа) в сумме с соседним с ним числом является квадратом некоторого числа, то при делении получится на один вид малых квадратов меньше. Так это получится в случаях пар (1,3), (4,5), (9,7), (9,16) и т. п. Более того, если и первая тройка чисел, расположенных в возрастающем порядке, в сумме даёт квадрат какого-либо числа, то число малых квадратов уменьшится на два. К примеру, для таких троек чисел: (1,3,5), (4,5,7). То же самое можно сказать и о четвёрке чисел (1,3,5,7). В последнем случае, например, квадрат разделится не на 4вида малых квадрата, а на один вид (какой, определите самостоятельно).

Если же пара соседних чисел, расположенных в возрастающем порядке, отличающихся от первого числа, а друг от друга на единицу, то при делении исходного квадрата также произойдёт уменьшение числа малых квадратов. К примеру, для пар (5,7), (13,15) и т.д.

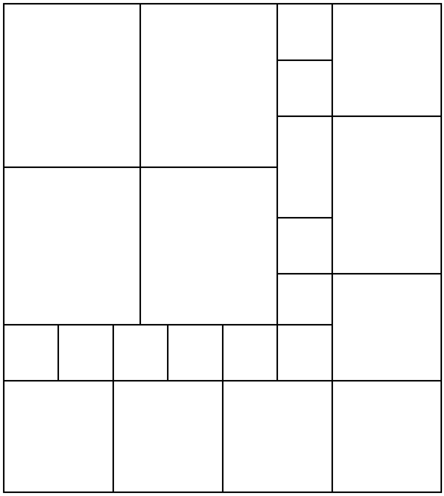

Рис. 18

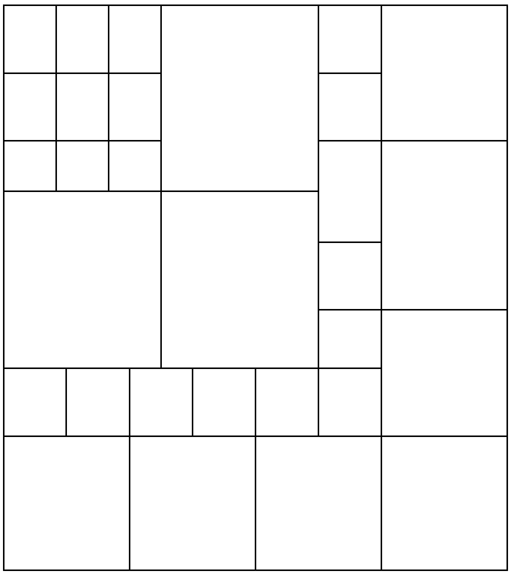

Рис. 19

Задание 5. На рисунках 18-20 приведены разбиения квадрата на малые квадраты двух, трёх и четырёх различных видов. Определите, на какое число квадратов разделён исходный квадрат и как это число представить в виде упорядоченного множества чисел, удовлетворяющих условиям уголкового метода.

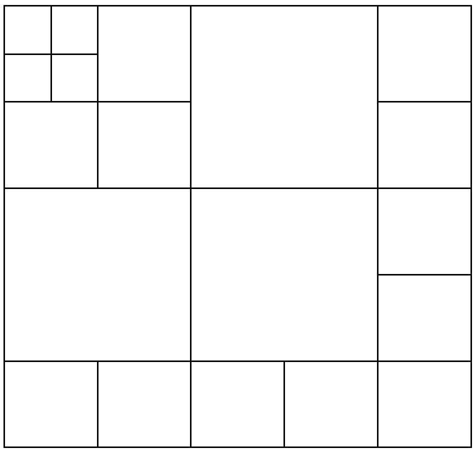

Рис. 20

Задание 6. Объясните, как можно разделить исходный квадрат на а) 12, б) 13 и в) 14 малых квадратов. Сколько видов малых квадратов может при этом получиться? Сделайте эскиз к решению этого задания.

Решение. а) число 12 представим в виде следующего множества упорядоченных множеств чисел:

(1,11), (1,3,**3,5**), (**1,3,5**,3), (1,5,3,3),
(**4,5**,3), (4,3,5), (9,3);

б) число 13 представим в виде следующего множества упорядоченных множеств чисел:

(4,9), (1,7,5), (1,**5,7**), (**1,3**,9), (1,9,3),
(4,3,3,3,3) (**1,3**,3,3,3,3).

в) число 14 представим в виде следующего множества упорядоченных множеств чисел:

(1,13), (9,5), (**4,5**,5), (4,3,7), (4,7,3),
(1,5,**3,5**), (1,5,5,3), (**1,3,5**,5).

Из этих представлений данных чисел с учётом выше сделанного важного замечания следует ответ о количестве полученных при разрезании малых квадратов.

Задание 7. Объясните, как можно разделить исходный квадрат на а) 15 и б) 17 малых квадратов. Сколько видов малых квадратов может при этом получиться? Сделайте эскиз к решению этого задания.

а) число 15 представим в виде следующего множества упорядоченных множеств чисел:

(4,11), (**1,3**,11), (1,11,3), (1,5,3,3), (1,5,9),
(1,9,5), (1,7,7); (9,3,3); (**4,5**,3,3); (4,**3,5**,3); (4,3,**3,5**)

б) число 17 представим в виде следующего множества упорядоченных множеств чисел:

(4,13), (1,13,3), (**1,3,** 13), (1,11,5), (1,5,11),
(1,9,7), (1,7,9), (9, **3,5**),
(9,5,3), (**4,5**, 5,3), (**4,5**, **3,5**), (4, **3,5**, 5), (4,7,3,3),
(4,3,7,3), (4,3,3,7),
(1,5,5,3,3), (1,5, **3,5**, 3), (1,5,3, **3,5**), (**1,3,5**, 5,3),
(**1,3,5**, **3,5**),
(**1,3**, **3,5**, 5), (1,3,3,3,7), (1,3,3,7,3), (1,3,7,3,3).

Из этих представлений данных чисел с учётом выше сделанного важного замечания следует ответ о количестве полученных при разрезании малых квадратов.

Задание 8. По рисунку 21 установите, на сколько малых квадратов разрезан исходный квадрат. Найдите другие варианты разрезания исходного квадрата на такое же число малых квадратов и определите, какому упорядоченному множеству чисел соответствуют эти варианты, а также разбиение на рис. 21.

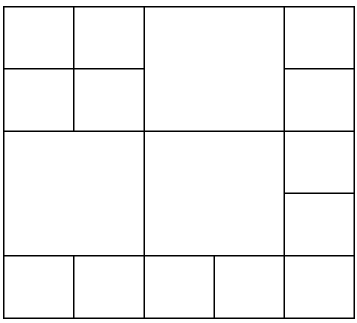

Рис. 21

2. Задания на готовых чертежах к уроку по теме «Площадь квадрата»

Понятия площади прямоугольника и, в частности, площади квадрата вводятся в курсе математики пятого класса. Вычисление площади квадрата по известной длине его стороне, как и решение обратной задачи – нахождение длины стороны квадрата по его площади, – это задачи базового уровня. Поэтому необходимо выработать у учащихся навык решения таких задач. На готовых чертежах представлены квадраты, которые разделены (разрезаны) на малые квадраты. На уроке можно предложить такие виды задач: нахождение площадей каждого вида малых квадратов по известной площади исходного квадрата; нахождение площади исходного квадрата по известной площади одного или нескольких малых квадратов, а также вычисления отношения площадей квадратов, изображённых на данном рисунке. Для решении этих задач не всегда нужно находить длину стороны квадрата. Иногда целесообразнее установить, какую часть площадь одного квадрата составляет от площади другого.

Задание 1. Найдите площадь каждого вида малых квадратов, на которые разбит исходный (рис.22), если его утроенная площадь равна 96 $см^2$.

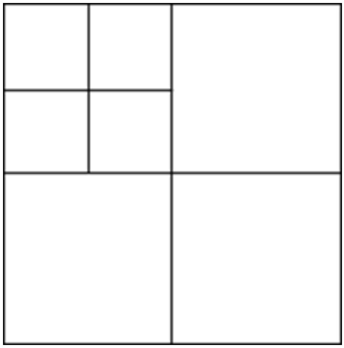

Рис. 22

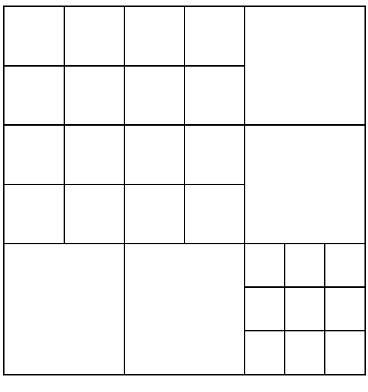

Рис. 23

Задание 2. Площадь квадрата, расположенного в левом верхнем углу на рис.23, равна 9. Найдите площадь малых квадратов других видов и площадь исходного квадрата.

Задание 3. Найдите площадь каждого вида малых квадратов, на которые разбит большой квадрат (рис.24), если площадь большого равна 256 $см^2$.

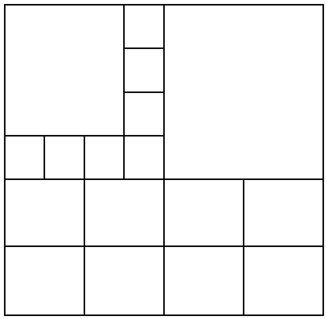

Рис. 24

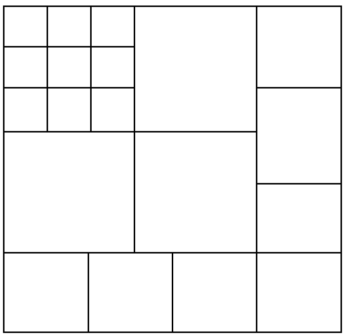

Рис. 25

Задание 4. Найдите площадь большого (исходного) квадрата, разбитого на 19 малых (рис. 25), если площадь: а) одного из трёх средних квадратов равна 81 $см^2$; б) меньшего квадрата равна 16 $см^2$.

Задание 5. По рисунку 26 найдите а) отношение площади большого (исходного) квадрата к площади квадрата, расположенного в левом верхнем углу; б) отношение утроенной площади квадрата, расположенного в правом нижнем углу, к удвоенной площади квадрата, расположенного в левом верхнем углу.

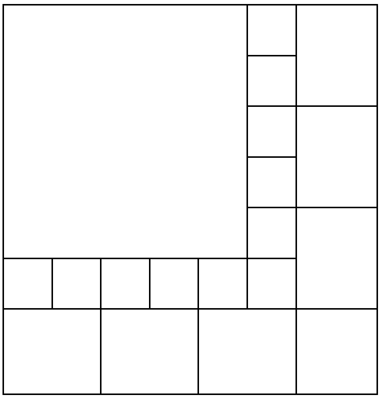

Рис. 26.

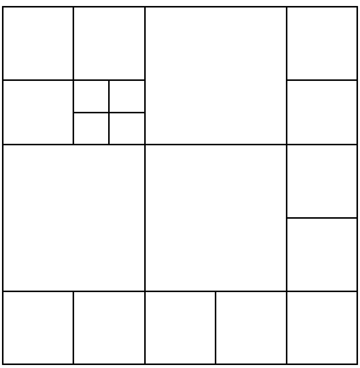

Рис.27

Задание 6. По рисунку 27 найдите а) отношение площади большого (исходного) квадрата к площади наименьшего квадрата; б) отношение утроенной площади квадрата, расположенного в левом нижнем углу, к учетверённой площади одного из трёх равных между собой квадратов, занимающих большую часть исходного квадрата.

Задание 7. Площадь квадрата на рис.28 равна 288 $см^2$. Найдите площадь каждого вида малых квадратов, на которые разбит большой квадрат. Во сколько раз утроенная площадь наименьшего квадрата будет меньше удвоенной площади исходного квадрата?

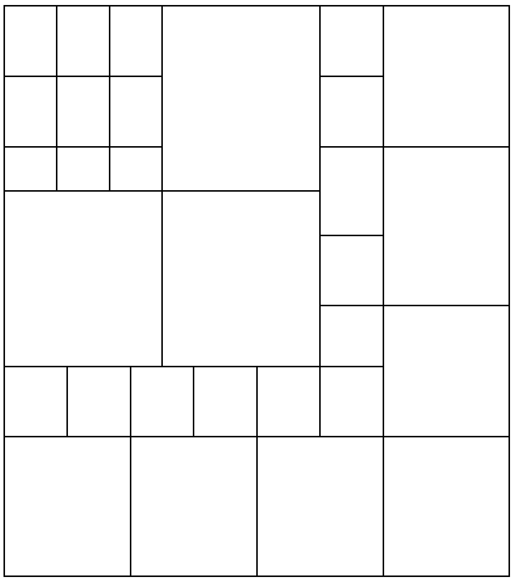

Рис.28

Задание 8. Площади трёх малых квадратов, на которые разбит исходный квадрат, известны (рис.29). Найдите площадь малых квадратов других видов и площадь исходного квадрата.

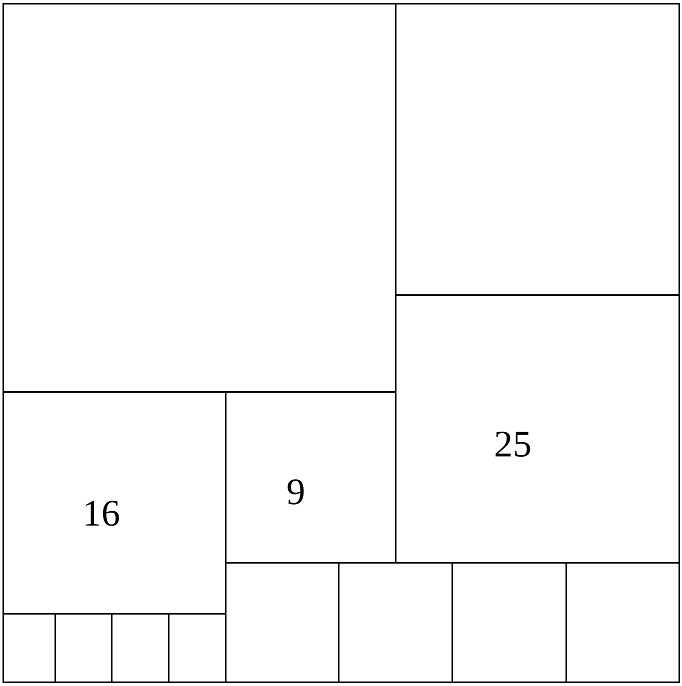

Рис.29.

Задание 9. Площадь квадрата на рис. 30 равна 1296 $см^2$. Найдите: а) площадь каждого вида малых квадратов, на которые разбит большой квадрат; б) отношение утроенной площади квадрата, расположенного в правом нижнем углу, к удвоенной площади исходного квадрата.

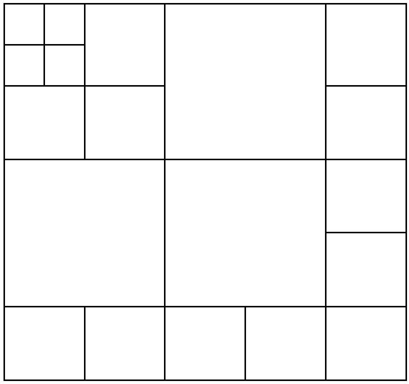

Рис. 30.

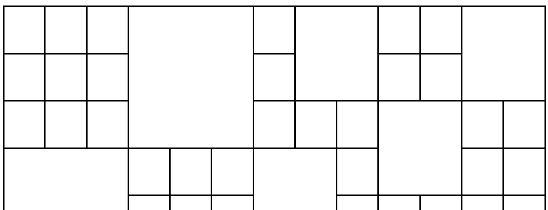

Рис. 31.

Задание 10. Площадь одного из малых квадратов, на которые разбит исходный квадрат, известна (рис.32). Найдите площадь малых квадратов других размеров и площадь исходного квадрата.

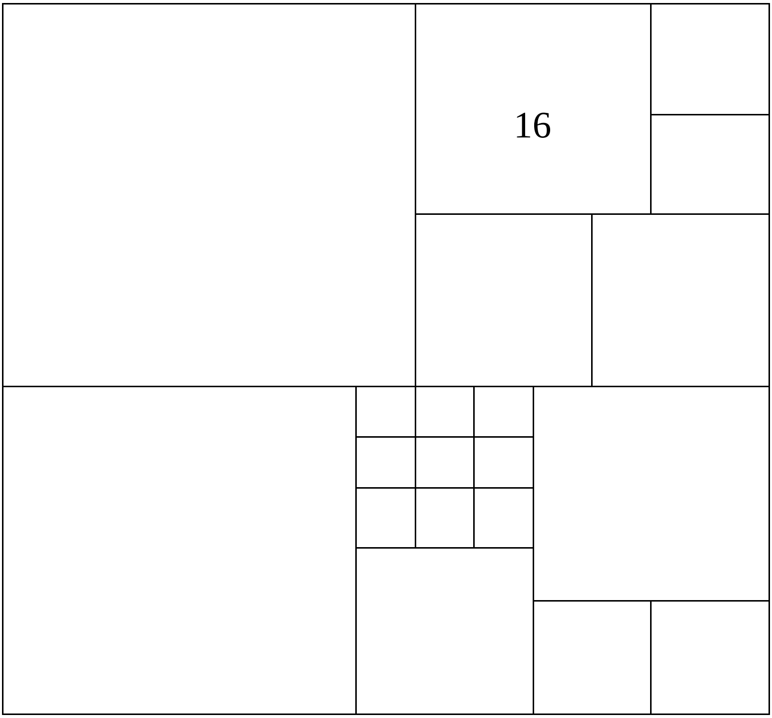

Рис. 32.

Задание 11. Найдите отношение суммы площадей всех наименьших квадратов к удвоенной сумме площадей всех других малых квадратов, на которые разбит данный квадрат (рис.31).

Список использованной литературы

1. Екимова, М. А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. 2002.

2. Игнатьев, Е. И. В царстве смекалки. М. : Наука, 1978.

3. Каган, В.Ф. О преобразовании многогранников. – М. : Гостехиздат , 1953.

4. Кордемский Б.А., Русалев Н.В. Удивительный квадрат. – М. : Наука, 1952.

5. Кордемский, Б. А. Математическая смекалка. – М. : Наука, 1965.

6. Леман, И. Увлекательная математика. М. : Наука, 1978.

7. Мир математики: в 40 т. Т.1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. / Пер. с англ. – М. : Де Агостини, 2014.

8. Перельман, Я. И. Занимательная геометрия. М. :АСТ, 2003.

9. Сергеев, И. Н. Примени математику. – М.: Наука, 1989.

10. Штейнгауз, Г. Математический калейдоскоп. – М. : Гостехиздат, 1949.

Содержание