



# Вероятностно-статистическая пропедевтика в математическом образовании младших школьников

**С.Е. ЦАРЕВА,**

кандидат педагогических наук, профессор, Новосибирский государственный педагогический университет

Элементы теории вероятностей и математической статистики в зарубежном школьном математическом образовании, в том числе и в начальном, присутствуют уже многие десятилетия. Так, в ступень «Начальная школа» Стандарта школьного математического образования США 1989 г. включены «...элементарные основы статистики и вероятности» [7]<sup>1</sup>. В российскую школу эти разделы вошли недавно, хотя попытки их внесения в программы по математике предпринимались еще в период реформ начала 70-х годов прошлого века. В Государственные образовательные стандарты (ГОС) основной и старшей школы соответствующие понятия вместе с понятиями комбинаторики, тесно связанной с теорией вероятности и статистики, включены в 2002 г. В 2009 г. в порядке эксперимента в нескольких регионах задания по этой теме вошли в ЕГЭ. Проблемам реализации стохастической линии в школьном курсе посвящено много статей в журнале «Математика в школе», а один из последних номеров (№ 7 за 2009 г.) полностью посвящен этой тематике.

Необходимость изучения элементарных основ статистики и вероятности — элементарных основ стохастики<sup>2</sup> обусловлена большим значением соответствующих разделов математики в решении современных задач социального и экономического развития. Статистические и вероятностные (стохастические) методы — это методы структурирования, анализа и оценки информа-

ции (*достоверно/недостоверно, вероятно/маловероятно/невозможно*). Они используются в исследованиях многих областей знания, способствуют пониманию разных процессов современной жизни. Их применение требует умения представлять (кодировать) информацию числами, визуализировать ее в графиках, диаграммах, таблицах, а также умения проводить вычисления. Роль стохастических методов возрастает с развитием информационных технологий, увеличением скорости обмена информацией. Это означает, что: а) вероятностно-статистическое образование является важнейшим средством социализации учащихся; б) оно тесно связано с информационным образованием.

В начальной школе пропедевтика<sup>3</sup> вероятностно-статистических понятий впервые официально представлена в проекте Федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования (ФГОС НОО), вариант 3 [2], разделом «Работа с данными» учебного предмета «математика» и междисциплинарными программами «Чтение: работа с информацией» и «Информационная грамотность в начальной школе». Цитируем данные разделы.

**Примерная (базисная) программа по математике**

«Работа с данными. Сбор и представление информации, связанной со счетом, измерением величин; фиксирование результатов сбора. Таблица. Чтение и заполнение таблицы. Интерпре-

<sup>1</sup> В квадратных скобках указан номер работы из списка «Использованная литература». — *Ред.*

<sup>2</sup> *Стохастика* — раздел математики, включающий теорию вероятностей и математическую статистику.

<sup>3</sup> *Пропедевтика* — подготовка к изучению, предварительное знакомство.



тация таблицы. Диаграмма: чтение диаграмм: столбчатой, круговой».

#### **Планируемые результаты...**

Выпускник научится: читать несложные готовые таблицы; заполнять несложные готовые таблицы; читать несложные готовые столбчатые диаграммы.

Выпускник получит возможность научиться: читать несложные готовые круговые диаграммы; достраивать несложную готовую столбчатую диаграмму; сравнивать и обобщать информацию, представленную в строках и столбцах несложных таблиц и диаграмм; распознавать одну и ту же информацию, представленную в разной форме (таблицы и диаграммы); планировать несложные исследования, собирать и представлять полученную информацию с помощью таблиц и диаграмм; интерпретировать информацию, полученную при проведении несложных исследований (объяснять, сравнивать и обобщать данные, делать выводы и прогнозы). (Под руководством учителя работая в группе.)».

#### **Чтение: работа с информацией**

В результате изучения всех без исключения предметов в начальной школе выпускники приобретут первичные навыки работы с информацией. Они смогут осуществлять поиск информации, выделять и фиксировать нужную информацию, систематизировать, сопоставлять, анализировать и обобщать информацию, интерпретировать и преобразовывать ее.

Выпускники научатся дополнять готовые информационные объекты (таблицы, схемы, диаграммы, тексты) и создавать свои собственные (сообщения, небольшие сочинения, графические работы). Овладеют первичными навыками представления информации в наглядной форме (в виде простейших таблиц, схем и диаграмм). Смогут использовать информацию для установления несложных причинно-следственных связей и зависимостей, объяснения и доказательства фактов в простых учебных и практических ситуациях.

Выпускники получат возможность научиться строить умозаключения и принимать решения на основе самостоятельно полученной информации, а также приобрести первичный опыт критического отношения к получаемой информации, сопоставляя ее с информацией из других источников и имеющимся жизненным опытом...»

#### **Информационная грамотность в начальной школе**

...Выпускники начальной школы будут уметь: ... осуществлять поиск информации... анализировать полученные сведения, выделяя признаки и их значения, определяя целое и части, применяя свертывание информации и представление ее в наглядном виде (таблицы, схемы, диаграммы); организовывать информацию...» [2].

Мы привели цитаты из уже опубликованных документов, но еще официально не утвержденных документов. В окончательном варианте ФГОС что-то может измениться. Однако в том или ином виде вероятностно-статистическая линия в содержании начального образования, несомненно, останется. Несмотря на междисциплинарный характер значительной части пропедевтической работы, основная ответственность за качество ее реализации лежит на обучении математике, так как вероятностно-статистические методы являются математическими.

Предлагаемое проектом ФГОС содержание стохастического материала довольно глубокое, хотя оно и не имеет формальных утверждений, символики и формул. Оно отражает смысловые стороны вероятностно-статистического подхода к познанию действительности. Методология этого подхода, способы построения в нем математических моделей действительности, способы оценки суждений отличаются от методологии и логики классической математики.

В классической, не вероятностной математике полученные с ее помощью результаты интерпретируются однозначно. Они характеризуют случившееся, состоявшееся или то, что при заданных условиях обязательно произойдет. В теории вероятностей, в математической статистике результаты задают оценку степени возможности. Здесь действуют вероятностная логика и вероятностное мышление, в которых суждения строятся не на языке «да — нет», «истина — ложь», а на языке «возможно — невозможно», «более возможно — менее возможно». Базовыми умениями, обеспечивающими успех в освоении стохастических понятий и способов действий, являются умения работать с информацией: упорядочивать информацию; представлять ее в числовом виде в разных формах (таблицах, графиках, диаграммах); считывать информацию из текс-



тов, схем, таблиц, графиков, диаграмм; анализировать, строить прогнозы возможного развития событий на основе неполных данных. На формирование именно этих базовых умений направлено заявленное в ФГОС НОО содержание.

Вероятностное мышление необходимо современному человеку как в повседневной жизни, так и в профессиональной, общественной деятельности. Ведь экономические и социальные законы, современные положения многих наук, в том числе психологии и педагогики, естественных наук, зачастую носят вероятностный характер и могут моделироваться на основе применения методов теории вероятностей и математической статистики. Такое мышление помогает реализации жизненных стратегий успеха в современном мире.

Стиль математического мышления начинается складываться с началом изучения систематического курса математики в начальной школе. Отсутствие специальной пропедевтической работы по отношению к вероятностно-статистическим и связанным с ними комбинаторным понятиям и способам действий ограничивает возможности выработки соответствующих типов мышления, обедняет представления о мире, создает трудности при освоении соответствующего материала в основной школе, в понимании общественных, экономических и других процессов современной жизни. Поэтому пропедевтика вероятностных, статистических и связанных с ними информационных и комбинаторных понятий в начальной школе чрезвычайно важна.

В наших исследованиях и практической педагогической деятельности мы рассматриваем вопросы стохастического образования младших школьников уже более десяти лет. В программу методико-математической подготовки будущих учителей начальных классов мы включили эти вопросы еще в 1997 г. [4, 37]: «Элементы теории вероятностей в математическом образовании и воспитании младших школьников. ...Простейшие статистические понятия и задачи в

начальной школе», усилили их в программе 2003 г.: «...Методика использования элементов комбинаторики, комбинаторных задач в обучении математике. ...Вероятностные задачи и ситуации в обучении математике. Вероятностная линия в математическом образовании и в воспитании младших школьников. ...Простейшие статистические понятия и задачи. Пропедевтика элементов статистики в начальной школе» [5, 47]. Для реализации названной программы мы исследовали и установили межпредметные связи курсов «Математика и информатика» и «Математика и методика обучения математике младших школьников». Появление соответствующего содержания в проекте ФГОС НОО воспринято нами как подтверждение правильности проведенной работы. В рамках этой работы мы выделили *два* взаимодействующих и взаимопроникающих *направления стохастической пропедевтики*.

*Первое направление:* создание и анализ в учебно-воспитательном процессе ситуаций и задач, явно не направленных на формирование у учащихся вероятностно-статистических представлений, но имеющих вероятностный и (или) статистический характер. Такая работа может быть определенным ракурсом рассмотрения основного содержания учебного предмета «математика»<sup>1</sup> и учебного курса «Информатика» — чисел, величин, геометрических объектов и соответствующих способов действий, методов и способов решения текстовых задач, способов хранения информации. При изучении других учебных предметов, во внеурочной, воспитательной работе неявно используемые простейшие статистические наблюдения и вероятностные оценки выступают средствами познания и обучения, средствами формирования мировоззрения. В проекте ФГОС НОО (3-й вариант) данное направление частично представлено междисциплинарными программами, примерами учебных заданий и учебных действий.

*Второе направление:* включение в содержание учебных предметов «математика» и

<sup>1</sup> Учебный курс «Информатика» по замыслу проекта ФГОС второго поколения (вариант 3) «...в начальной школе изучается во II–IV классах в качестве учебного модуля в рамках учебных предметов «математика» и «технология» [www.mon.gov.ru].



«информатики» специальной темы пропедевтического характера. В процитированном выше проекте ФГОС НОО эта тема называется «Работа с данными» (в учебном предмете «математика»), в названных выше междисциплинарных программах — это процитированные нами вопросы. Это направление может реализовываться также в специальных факультативах, проектах и других видах внеурочной деятельности учащихся.

*Первое направление* обладает значительными возможностями влияния на формирование стохастического мышления учащихся, так как может затрагивать практически все стороны образовательного процесса в начальной школе. Оно не требует дополнительного времени и адекватно современным прогрессивным педагогическим подходам, которыми должен владеть современный учитель. В частности, переход к построению учебного процесса на основе планируемых результатов, предусмотренный проектом ФГОС НОО (3-й вариант), требует от педагога высокого уровня умения оценивать возможные последствия любого своего педагогического действия, а значит, и определенного уровня стохастической культуры. Проектная и исследовательская деятельность учащихся, которые сегодня активно внедряются в учебный процесс, с необходимостью требуют от учащихся умения проводить мини-статистические наблюдения, делать на их основе выводы и оценивать вероятность тех или иных характеристик исследуемых процессов. Пропедевтика стохастики в рамках первого направления способствует гуманитаризации образования младших школьников в целом и математического в частности, реализации личностно-ориентированного подхода.

*Второе направление* позволяет сделать некоторые стохастические понятия предметом целенаправленного внимания учащихся. Согласно проекту ФГОС НОО, объем этой темы в рамках математики невелик, но в сочетании с междисциплинарными программами и работой по первому направлению он достаточен для формирования у учащихся базового умения стохастической подготовки — умения упорядочивать и ко-

дировать информацию (в простейших случаях). Только при наличии этого умения могут быть поняты и освоены в дальнейшем элементы теории вероятности и статистики. Данное умение помогает изучению любых учебных предметов и является важнейшим из исследовательских умений.

Опасна формализация изучения элементов теории вероятности и статистики: вне гуманитарных, личностных смыслов стохастических понятий и соответствующих способов действий такое изучение теряет образовательную и воспитательную ценность и лишь увеличивает учебную нагрузку. Это утверждение относится и к подготовке будущих и действующих учителей начальных классов: формальное знание определений и способов решения статистических и вероятностных задач не обеспечивает готовность учителя к пропедевтике вероятностно-статистических понятий у младших школьников.

Реализация каждого направления требует специальной системы работы, основанной на положениях, отмеченных выше, на материалах проекта ФГОС НОО (3-й вариант) и на понимании учителем статистических и вероятностных понятий и методов познания. Рассмотрение вопросов содержания и сущности статистических и вероятностных понятий и методов познания требует отдельного разговора. Приведем здесь несколько простых примеров из системы работы по первому направлению стохастической пропедевтики.

**1. Статистический анализ данных.** Одной из задач изучения первоклассниками математике является обучение письму цифр.

Пусть ученики пишут цифры от 1 до 9 (или от 0 до 9), повторяя их в этой или другой заданной последовательности. В ходе рассмотрения написанного ряда цифр учитель может задать следующие вопросы стохастического характера: «Сколько всего цифр поместилось в строку? Сколько раз в строке встречается цифра 1, 2, ..., 9? Сколько цифр 1 (2, 3, ...) среди написанных вами 13 цифр? Какая цифра встречается в строке чаще, реже? Можно ли получить ответ на последний вопрос, не считая? (Можно. Достаточно знать, какой цифрой заканчи-



вается ряд. При написании цифр в обычной школьной тетради через клетку и отступом в 2 клетки ряд заканчивается цифрой 4, т.е. до полей помещаются все цифры от 1 до 9 и еще цифры 1, 2, 3, 4. Значит, каждая из цифр 1, 2, 3, 4 написана в ряду дважды, а остальные цифры записаны по одному разу.)

Если ряд написанных учащимися цифр рассматривать как ряд однозначных чисел, то его можно считать статистическим, вариационным рядом, выборкой, а однозначные числа — вариантами. Определяя, сколько раз в ряду встречается та или иная цифра, школьники фактически определяют распределение значений выборки. Количество всех цифр на языке статистики называется объемом выборки, число повторений каждой цифры в ряду — частотой. Отношение числа повторений каждой цифры в ряду к общему числу цифр, «зашифрованное» в речи учащихся словосочетаниями «Я написал 13 цифр, из них две цифры 1» или «Цифра 1 среди 13 цифр написана 2 раза», является относительной частотой соответствующей цифры в выборке.

Поиск ответов на подобные вопросы является отдыхом от технической и физически трудной работы письма и в то же время придает ей содержательный, образовательный смысл, приучает к наблюдениям за своими записями. Аналогичные задания могут выполняться и по другим записям как на уроках математики, так и на других.

**2.** Составление мини-статистического отчета о работе на уроке при подведении его итога.

Пусть изучается тема «Внетабличное умножение и деление». Отчет можно составить по вопросам, ответы на которые заносятся в общую таблицу.

— Сколько всего вычислений выполнил каждый из вас в течение урока? Сколько пар чисел вы сложили, вычли, умножили и разделили за урок? Сколько раз на уроке вы выполняли сложение, вычитание, умножение, деление? Какое действие вы выполняли сегодня чаще (реже) других? Опыт каких вычислений на сегодняшнем уроке был большим? Если бы вам предложили сейчас самостоятельно выполнить внетабличное умножение и деление, какова веро-

ятность, что вы сделаете это правильно? Покажите это на шкале возможностей: 0 \_\_\_\_\_ 1, где 0 надо отметить в случае, если вы не можете выполнить правильно ни одного вычисления, 1 — можете выполнить правильно все вычисления, знак между 0 и 1 обозначает, что вы можете выполнить правильно только часть вычислений.

Подсчет количества вычислений — это сбор информации, получение статистических данных. Если результаты каждого ученика не только проговорить, но и записать в общую таблицу, то получится таблица статистических наблюдений. Работа на шкале возможностей — это количественная оценка вероятности события под названием «Умножение и деление в самостоятельной работе выполню правильно».

**3.** Решение комбинаторных задач с последующим статистическим анализом и оценкой вероятности появления определенных комбинаций.

После выполнения задания «Запишите все трехзначные числа, в записи которых используются цифры 1, 2 и 3 (аналогично — цифры 0, 1 и 2, или только цифры 0 и 1, или цифры от 1 до 5 и т.д.)» учитель может провести две беседы по вопросам.

**Беседа 1.** Сколько таких чисел? Сколько из них содержат 2 сотни; 2 десятка; 2 единицы; поровну десятков и единиц; сотен и единиц; сотен на 1 (на 2, 3, ..., 9) больше, чем десятков (чем единиц)? Сколько среди записанных чисел таких, которые делятся на 2, 3, 5, 10? Проверьте, делятся ли (нацело) на 3 числа, записанные цифрами 1, 2, 3?

**Беседа 2.** Если каждое из составленных вами чисел записать на отдельной карточке, а затем наугад взять одну, то может ли быть на этой карточке число, содержащее 2 сотни, 3 сотни, 5 сотен? Может ли число, записанное на карточке, взятой наугад, быть четным, нечетным, делящимся нацело на 3, 10, 100; иметь сумму цифр, равную 6, больше 6? Подтвердите ответы примерами.

Беседа 1 направлена на организацию статистического наблюдения, объектом которого являются трехзначные числа. В ходе беседы 2 происходит оценка вероятности на языке «возможно / невозможно / достоверно».





4. Большими пропедевтическими возможностями обладает тема «Время», так как вероятностные характеристики — это характеристики будущего на основании прошлого, сделанные в настоящем. Овладение представлениями о времени уже можно считать подготовкой к освоению теории вероятностей и статистики. В ходе изучения этой темы уместно использовать слова *вероятность*, *событие* и их производные, хотя вероятностные характеристики событий лишь дополнение к работе по изучению основного содержания этой темы [5]. Приведем примеры вопросов для обсуждения с учащимися: «Какое из названных событий обязательно произойдет, какое невозможно, какое маловероятно, а какое примерно в равной степени может быть, а может и не быть: а) урок математики длится 30 мин; 45 мин; б) наугад названный год равен 366 суткам; в) 20 мин длится дольше 1200 с; г) после понедельника будет среда; д) после субботы будет воскресенье».

5. При изучении единиц длины можно составить таблицу данных о росте учащихся, в которую надо занести только отличающиеся значения роста и число детей, имеющих такой рост (в математике такая таблица называется статистическим распределением). По таблице можно задать следующие вопросы: «Есть ли у нас в классе дети с одинаковым ростом? Какой рост самый «популярный» в нашем классе? Какова наибольшая разница в росте? Каков средний рост учащихся нашего класса? У какого количества учащихся рост выше среднего, ниже среднего, равен среднему?»

Подобные задания, требующие сбора, упорядочивания, кодирования и сохранения в удобной форме информации об учащихся класса, о жизни класса являются эффективным средством стохастической пропедевтики. Можно собирать информацию о количестве учащихся, правильно решивших текстовую задачу в контрольных работах, участии в конкурсах, олимпиадах, времени, затрачиваемом на приготовление уроков, прогулку, просмотр телепередач, об отношении к определенной передаче, книге, песне, к решению текстовых задач по математике, сочинениям и т.п.

6. Задания вероятностного и статистического характера можно включать в устные упражнения или предлагать как дополнительные, выполняемые по желанию, например:

— В коробке находятся 2 белых и 2 черных шара. Наугад взяли один шар. Какого цвета он может быть? Наугад взяли 2 шара. Могут ли шары оказаться одного цвета? Разного цвета? Наугад взяли 3 шара. Могут ли они быть одного цвета? Какие возможны варианты?

— Ученик первого класса отвлекся и из содержания задачи услышал только два числа. Он сложил их и записал таким образом решение задачи. Могло ли оказаться, что действие он выбрал правильно?

7. В современных учебниках математики для начальной школы встречаются задачи, которые можно отнести к вероятностно-статистической линии. Например, вероятностный контекст есть в задаче из учебника И.И. Аргинской: «Имеется 5 деталей, одна из которых бракованная. Эта деталь отличается от других по массе. Имеется также одна эталонная деталь. Как наименьшим числом взвешиваний выявить бракованную деталь?» Вне этого контекста ответ мог бы быть таким: «На одну чашку весов надо положить эталонную деталь, а на другую — одну из пяти деталей. Если чашки не будут в равновесии, то взятая деталь — бракованная и мы нашли ее всего за одно взвешивание». Однако чашки весов могут оказаться в равновесии, и тогда придется сделать второе взвешивание с эталонной и другой деталью, а может быть, и третье, четвертое, пятое. Для правильного ответа на вопрос задачи нужно учесть случайный характер результатов взвешиваний. Фактически в данной задаче требуется выявить такой способ взвешивания, в котором вероятность отыскания бракованной детали за меньшее число шагов будет наибольшей. Именно этот вероятностный характер данной задачи делает ее трудной не только для учащихся, но и для учителя.

Вероятностно-статистический характер могут носить темы исследовательских работ учащихся начальных классов как по математике, так и по другим предметам. Например, содержанием исследовательских ра-



бот учащихся III и IV классов по математике может быть классификация и способы решения задач вероятностного характера, статистические таблицы и статистические характеристики, статистические наблюдения, диаграммы и др.

При всех способах реализации вероятностно-стохастической линии недопустимо формальное введение вероятностных и стохастических понятий, формул и правил. Соответствующая работа должна строиться исключительно на имеющихся у учеников знаниях, на интуитивном понимании практических ситуаций, на субъективном опыте учащихся.

Для осуществления пропедевтической работы по названным направлениям необходима подготовка учителя, причем не только и не столько математическая, сколько психологическая, методологическая и методическая. Она должна помочь учителю понять гуманитарные смыслы основных понятий стохастики, а через них и средства практической реализации вероятностно-статистической пропедевтики без увеличения объема изучаемого материала и учебной нагрузки детей, что возможно только на основе идей гуманитаризации содержания [3].

Выпускники педагогических вузов, обучавшиеся в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ГОС ВПО) 1995, 2000 и 2005 гг., могли получить некоторые сведения о комбинаторике, теории вероятностей и статистике в курсе «Математика и информатика», математическая часть которого в ГОС ВПО 2000 и 2005 представлена так: «Аксиоматический метод, основные математические структуры, вероятность и статистика, математические модели». Однако курс этот очень короткий, на математические вопросы в нем обычно отводится не более 24 ч аудиторных занятий, а упоминаний о тео-

рии вероятности и статистике в характеристике дисциплин ГОС ВПО «Математика» и «Методика преподавания математики» нет.

Начиная с 2009 г. выпускники школ в обязательном порядке изучали в школе комбинаторику, элементы теории вероятности и математической статистики, поэтому обеспечить подготовку студентов к реализации вероятностно-статистической линии будет легче. Учитель может почерпнуть сведения о математическом содержании рассматриваемых вопросов из учебников математики основной и старшей школы, из статей журнала «Математика в школе». Очевидна необходимость представления соответствующих понятий с профессиональных педагогических позиций и на страницах журнала «Начальная школа».

#### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Курганов С.Ю. Ребенок и взрослый в учебном диалоге. М., 1988.
2. Проекты ФГОС начального общего образования, вариант 3, 2009 г. // <http://mon.gov.ru/pro/fgos/noo/>.
3. Царева С.Е. Гуманитаризация образования как социальная и педагогическая проблема // Вопросы совершенствования профессиональной подготовки учителя на современном этапе развития высшей школы: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1997.
4. Царева С.Е. Математика и методика обучения математике младших школьников: Программа курса... Новосибирск, 1997.
5. Царева С.Е. Математика и методика обучения математике младших школьников: (Авторская программа курса. Метод. указания по ее реализации.): Учеб.-метод. пос. 2-е изд., перераб. и доп. Новосибирск, 2003.
6. Царева С.Е. Величины в начальном обучении математике. Новосибирск, 2005.
7. Чошанов М.А. Анализ стандарта школьной математики в США // Математика в школе. 2000. № 2.