ВВЕДЕНИЕ УДОБНЫХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

С.Е. ЦАРЕВА (г. Новосибирск)

В повседневной жизни часто возникают ситуации, когда из-за невозможности или неудобства применения стандартных единиц той или иной величины мы прибегаем к произвольным единицам, выбранным в соответствии с ситуацией. Кто не видел столяра, измеряющего длину спичечным коробком или карандашом? Кому не приходилось измерять длину пальцами, точнее пядями, приняв за единицу длины расстояние между кончиками вытянутых большого и указательного пальцев? Кто не определял толщину предметов, приняв за единицу длины толщину одного пальца?

Мы легко можем сравнить (хотя и не слишком точно) площади поверхностей двух предметов с помощью листов бумаги или ладоней. Объемы жидких и сыпучих тел мы без робости измеряем в единицах, равных объему любого подвернувшегося под руку сосуда, длину пути — в шагах или в “часах” (“до города три часа ходу”).

Вообще говоря, для измерения любой величины можно придумать бесконечно много единиц. Например, длину можно измерять в “карандашах”, “ленточках”, “ложках”, “досках” и т. п., приняв за единицу длину соответствующего предмета. Точно так же площадь можно измерять в “ступнях”, “паркетных дощечках”, в ‘Треугольниках”, “ромбах” и даже в “ящерицах” — вспомните обложку знаменитой книги Г. Вейля “Симметрия”, сплошь заполненную изображениями ящериц одинаковых форм и размеров.

Но в школьных курсах математики для каждой величины чаще всего строится одна-единственная система стандартных единиц измерения. О других системах если и упоминается, то лишь в исторических справках. Анализ причин выхода в лидеры сегодняшних стандартных систем единиц измерения совершенно не проводится. В результате в сознании учащихся каждая величина прочно и однозначно связывается с системой общепринятых единиц и соответствующими способами измерения. О принципиальной возможности и праве каждого выбирать мерку и соответственно единицу величины по собственному усмотрению большинство учащихся даже не догадываются.

Между тем решение многих задач может быть либо значительно упрощено, либо выполнено оригинальным и элегантным способом, если вместо общепринятых единиц ввести единицы, соответствующие ситуации, описанной в задаче.

Покажу суть метода на примере решения нескольких задач.

З а д а ч а 1. За 4 блокнота и 5 альбомов заплатили 63 тыс. р. Сколько стоил блокнот и сколько стоил альбом, если блокнот в 4 раза дороже альбома?

Р е ш е н и е. Примем за единицу стоимости стоимость альбома и обозначим ее как 1*а*. Будем осуществлять “бартер” — всё покупать в обмен на *альбомы.* Определим теперь стоимость всех предметов в выбранных единицах.

Итак, один альбом стоит 1*а,* 5 альбомов стоят 5*а.* Так как блокнот в 4 раза дороже альбома, то один блокнот в “альбомах” стоит 4*а.* Блокнотов куплено 4, тогда их стоимость будет равна $4a\cdot 4=16a$. Теперь легко определить стоимость всей покупки в “альбомах”: $5a+16a=21a$. Мы знаем теперь стоимость всей покупки втысячах рублей и в “альбомах”, т. е. можем выразить новые единицы в старых: 21*а*=63 *тыс. р.,* отсюда 1*а*=3 *тыс. р.* Значит, альбом стоил 3 *тыс. р.*, блокнот — 12 *тыс. р.*

Решим этим методом ряд задач из учебника “Математика 6” Н.Я. Виленкина, В. И.Жохова, А.С. Чеснокова, С.И.Шварцбурда.

З а д а ч а 2 (№ 1442). Масса трех сазанов 10,8 кг. Масса третьего сазана составляла 50% массы первого, масса второго в 1,5 раза больше массы первого. Найдите массу каждого сазана.

Р е ш е н и е. Примем за единицу массы массу первого сазана и назовем ее “1 *сазан*”, сокращенно 1*сз.* Тогда масса третьего сазана — 0,5*сз*., масса второго сазана — 1,5*сз.* В “сазанах” масса всех трех рыб равна (1+0,5+1,5)*сз*., или 3*сз.* В килограммах та же масса равна 10,8 кг. Теперь уже легко найти отношение между единицами и массу каждого сазана в килограммах.

З а д а ч а 3 (№ 1498). Кофейник и две чашки вмещают 740 г воды. В кофейник входит на 380 г воды больше, чем в чашку. Сколько граммов воды вмещает кофейник?

Р е ш е н и е. В задаче масса воды фактически характеризуется в трех единицах: в стандартных — граммах, а также в “*чашках*” *(ч.)* и “*кофейниках*” (*коф*.), причем [1], 1ч. + 380г.= 1 *коф., а* 1 *коф.* + 2*ч.*=740*г.* Подставив значение 1 *коф.* из первого равенства во второе, легко найдем выражение введенных единиц в общепринятых: 1т.= 120*г*, а 1 *коф.* = 500 *г.*

З а д а ч а 4 (№ 1422). В одной пачке было в 2,5 раза больше тетрадей, чем в другой. Когда из второй пачки пе-

[1] Следующие записи учащиеся могут воспринять как смешение единиц измерения, что методически очень опасно.—*Примеч. ред.*

реложили в первую 5 тетрадей, то во второй стало в 3 раза меньше тетрадей, чем в первой. Сколько тетрадей было в каждой пачке первоначально?

Р е ш е н и е. Будем измерять количество тетрадей “пачками”, приняв за единицу измерения количество тетрадей во второй пачке, сокращенно 1*пч.* Тогда в первой пачке тетрадей 2,5*пч.*, а во второй — 1 *пч.* После перекладывания в первой пачке будет 2,5 *пч.*+5*тетр.*, а во второй 1 *т.*-5*тетр.* По условию,

3(1*пч.*-5*тетр.*)=2,5*пч.*+5*тетр.*

Выразив из этого равенства новые единицы через старые, получим 1*пч.* =40 *тетр.* Отсюда легко найти ответы на оба вопроса задачи.

Как видим, этот метод очень похож на классический метод решения задач “на части”, но имеет другую смысловую нагрузку. Он обеспечивает возможность включения в процесс решения жизненного опыта учащихся.

В предыдущих задачах введение удобной единицы приводило по существу к арифметическому решению. Ниже рассмотрена задача, для которой введение новых единиц упрощает составление уравнения.

З а д а ч а 5. В трех озерах с одинаковой концентрацией соли одинакова и скорость прироста соли в процессе ее образования. Площадь озер 3 га, 9 га и 21 га. Всю соль, добытую из первого озера, перевозят на 8 грузовиках в течение 4 недель; добытую из второго озера — 18 грузовиками в течение 6 недель. За сколько недель всю соль, добытую из третьего озера, перевезут 28 грузовиками ?

З а м е ч а н и е. Задача решается элементарными средствами лишь при некоторых допущениях, а именно: соль образуется непрерывно с одной и той же скоростью на протяжении недель вывоза независимо от способа добычи; концентрация соли также остается постоянной; количество соляного раствора в озерах остается постоянным на протяжении всего периода вывоза соли, а количество образовавшейся соли увеличивается пропорционально количеству соляного раствора в озере и времени.

Основная трудность, возникающая при решении этой задачи, — кажущаяся невозможность какой-либо математической характеристики массы соли. Ведь в тексте задачи нет ни одного прямого указания на эту величину. Между тем все характеристики процесса вывоза соли так или иначе требуют количественной оценки массы: концентрация соли — это масса соли в единице объема раствора, скорость прироста соли — это масса соли, вновь образующейся в единицу времени на каждую единицу уже имеющейся массы соли, грузоподъемность — это наибольшая масса груза, которую может перевезти один грузовик за одну поездку. Известно, что масса измеряется в тоннах, центнерах, килограммах, но в задаче нет даже намека на эти единицы.

Отмеченные особенности задачи делают процесс составления уравнения чрезвычайно трудным делом. Эта задача заимствована из книги: *Кордемский Б. А., Ахадов А. А.* Удивительный мир чисел (М., 1986. С. 59). Авторы приводят решение, но оно весьма искусственно, в чем читатель убедится, рассмотрев I способ решения, цитируемый из упомянутой книги.

Р е ш е н и е. 1 *способ.* Если недельный прирост соли на 1 га любого озера принять за*, то на первом озере он составит 3*x*, а за 4 недели — 12*x*. Это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь озера увеличилась и достигла бы (3+12*x*)га. За одну неделю 8 грузовых автомобилей как бы освободят от соли 1/4 часть этой площади, а одна грузовая машина — 1/32 часть, т.е.

$\frac{3+12x}{32}$ га.

Так выясняется норма (в долях площади) количества соли, перевозимого одной грузовой автомашиной за одну неделю.

По данным, относящимся ко второму озеру, получится: недельный прирост соли в процессе ее кристаллизации на 1 га — *x*, шестинедельный прирост соли на 1 га — 6*x*, шестинедельный прирост соли на 9 га — 54*x* . Это равносильно тому, как если бы площадь второго озера увеличилась и достигла (9+54*x*) га.

Площадь, освобождаемая от соли при перевозке одним грузовым автомобилем в течение недели, равна $\frac{9+54x}{6\cdot18}$ га

Обе нормы перевозки должны быть одинаковы:

$\frac{3+12x}{32} = \frac{9+54x}{108}$, отсюда $x = \frac{1}{12}$

Определим (в долях площади) недельную норму перевозки соли одной грузовой автомашиной:

$$3+12\cdot\frac{1}{12} : 32 = \frac{1}{8}$$

Наконец составим уравнение для окончательного решения задачи. Обозначим искомое число недель через *y*, тогда:

$$(21 + 21y\cdot \frac{1}{12}):28y = \frac{1}{8}, \text{ откуда } y = 12.$$

Всю соль, добываемую из третьего озера, можно перевезти с помощью 28 грузовых автомашин в течение недель.

В приведенном решении также появляются новые единицы измерения. Первая единица — недельный прирост соли на 1 га. Привычные обозначения через *x* несколько камуфлируют факт появления новой единицы, а ее естественность заставляет забыть об отсутствии наименования (*x* чего? — кг? т? га?). Вторая единица — недельная норма перевозки соли — более искусственна, да еще выражается с помощью представлений не о массе, а о площади. Наконец, весьма искусственно выглядит и прием увеличения площади озера.

До такого решения трудно додуматься даже учителю, не говоря уже об учениках. А предлагаемы й в этой статье способ явного введения произвольных единиц измерения делает рассуждения при составлении уравнения совершенно естественными.

Приведем эти рассуждения.

II *способ.* За единицу массы удобно взять массу соли, находящейся до начала вывоза в единице площади озера, т.е. в 1 га. Назовем эту единицу любым произвольно взятым словом (можно даже своим именем, как это принято в физике, вспомним—ньютон, фарада, вольт и т.д.), таким, чтобы в нем как-то отражалась наша договоренность о содержании единицы. Нашу единицу можно, например, назвать *"мага"* — "масса в гектаре". Переформулируем теперь задачу с учетом введенной единицы:

"В трех озерах с одинаковой концентрацией соли одинакова и скорость прироста соли в процессе ее образования. В первом озере первоначально было 3*мага* соли, во втором — 9 *мага,* в третьем — 21 *мага.* Всю соль, добытую из первого озера, перевозят на 8 грузовиках в течение 4 недель, добытую из второго озера — 18 грузовиками в течение 6 недель. За сколько недель всю соль, добытую из третьего озера, перевезут 28 грузовиками?

Пусть один грузовик за одну неделю вывозит x *мага* соли. Тогда x *мага/нед* — скорость вывоза соли одним грузовиком;

4x*мага*—масса соли, вывезенная одним грузовиком за 4 недели;

8·4x *мага* — масса всей соли, вывезенной с первого озера;

(32x-3)*мага* — масса соли, приросшей за 4 недели в первом озере;

$\frac{(32x-3)}{4}$ *мага* — масса соли, приросшей в первом озере за 1 неделю;

$\frac{(32x-3)}{4\cdot 3}\frac{\text{мага}}{\text{нед}}$ – скорость прироста соли (масса соли, приращенная за 1 неделю);

6x *мага* — масса соли, вывезенная одним грузовиком за 6 недель;

18·6x *мага* — масса всей соли, вывезенной со второго озера;

(18·6x-9) *мага* — масса соли, приросшей во втором озере за 6 недель;

$\frac{(18\cdot 6x-9)}{6}$ *мага* – масса соли, приросшей во втором озере за 1 неделю;

$\frac{18\cdot 6x-9}{9\cdot 6}\frac{\text{мага}}{\text{нед}}$ – скорость прироста соли.

Так как скорость прироста в обоих озерах одинакова, то выражения для скорости прироста, полученные из данных по первому озеру и из данных по второму озеру, равны:

$\frac{(32x-3)}{4}=\frac{18\cdot 6x-9}{9\cdot 6}$, т.е. $x=\frac{1}{8}$ и $\frac{32\cdot(1/8)-3}{12}=\frac{1}{12}$.

Теперь мы имеем достаточно сведений о третьем озере, чтобы ответить на вопрос задачи.

В третьем озере было 21 мага соли, а масса "приросшей" за неделю соли равна: $\frac{1}{12}\cdot 21=\frac{21}{12}$— $=\frac{7}{4}$— *(мага/нед).* Так как скорость вывоза соли одним грузовиком $\frac{1}{8}$ — *(мага/нед),* то 28 грузовиков за неделю вывезут $\frac{28}{8}$ —*мага* соли. Пусть всю соль с третьего озера вывезут за y недель. Тогда всю массу соли, вывезенную из третьего озера, можно найти как через скорость прироста, так и через скорость вывоза:

$\frac{7}{4}\cdot y$ *мага* — масса приросшей соли за все недели вывоза;

$(21+\frac{7}{4}\cdot y)$ *мага* — масса всей вывезенной с третьего озера соли;

$\frac{28}{8}\cdot y$ *мага* — масса всей вывезенной с третьего озера соли.

Приравняв два последних выражения, получим уравнение:

$$21+\frac{7}{4}\cdot y=\frac{28}{8}\cdot y$$

Решив это уравнение, получим: y=12,т. е. всюсоль, добытую из третьего озера, 28 грузовиков перевезут за 12 недель.

При всем обилии выкладок данное решение доступно каждому, умеющему оперировать с обыкновенными дробями и решать соответствующие уравнения. А без введения "хороших" единиц массы задача переходит в разряд задач повышенной трудности.

Покажем, как описываемый метод можно применить к задачам на движение.

З а д а ч а 6. Туристы на лодке 1 ч гребли по течению реки и 30*мин* плыли вниз по реке, сложив весла. Затем они 3*ч* гребли вверх по реке и прибыли к месту старта. За какое время с момента старта вернулись бы туристы, если бы после 1 *ч* гребли по течению сразу повернули назад?

Р е ш е н и е . В задаче три величины: длина пути, время и скорость. Единицы измерения пути не заданы. Есть смысл исправить этот недостаток. За единицу можно принять длину любого отрезка пути, нужно лишь достаточно определенно задать его. Возьмем две единицы: длину пути, преодолеваемого гребцами за 1 *ч,* и длину пути, преодолеваемого течением за 1ч. Обозначим их как-нибудь, например 1 *гр.* и 1 *теч.* соответственно. Тогда скорость гребли в стоячей воде 1 *гр./ч,* скорость течения 1 *теч./ч.*

В задаче описаны две ситуации движения. Рассмотрим сначала первую: лодка двигалась под воздействием гребцов 1 *ч* по течению и 3 *ч* против течения. Если бы на лодку не действовало течение, то в результате этого движения она оказалась бы на расстоянии 2*гр.* в ы ш е места старта. Течение же работало все время в одном направлении: 1ч, пока туристы гребли по течению, 0,5ч, пока они отдыхали, и 3ч, пока гребли против течения. Таким образом, под действием течения лодка находилась 4,5ч. За это время лодку отнесло бы вниз по течению на 4,5*теч.* Но в результате действия обеих сил лодка оказалась на месте старта. Это означает, что *2гр.=4,5теч.* Тогда 1 *гр. = 2,25теч.*

Теперь всю информацию о движении во второй ситуации мы можем записать с помощью одной единицы длины.

Скорость лодки в стоячей воде — 1 *гр./ч,* или 2,25 *теч./ч,* скорость течения — 1 *теч./ч,* скорость лодки по течению — (1 +2,25)*теч./ч,* или 3,25*теч./ч,* скорость лодки против течения — (2,25-1)*теч./ч,* или 1*,25теч./ч.* По условию задачи по течению лодка двигалась 1 *ч,* следовательно, длина пройденного ею пути равна 3,25*теч.* Но такова же и длина обратного пути. Теперь легко найти время движения лодки против течения:

3,25*теч. :* 1,25*теч./ч*=2,6 *ч.*

Итак, на путь по течению гребцы потратили 1 *ч,* на путь против течения — 2,6 *ч,* тогда на весь путь потрачено 3,6 *ч.*

Приведу в заключение задачу, арифметическое решение которой (путем введения “своих” единиц) очень близко к способу составления уравнения. Но первое менее абстрактно и потому может служить средством дополнительных разъяснений к составлению уравнения.

З а д а ч а 7. Из пункта *А* по реке отправляется плот. Через час из пункта *А* вниз по течению реки отправляется катер. Найдите время, требующееся катеру, чтобы догнать плот и возвратиться обратно в пункт *А*, если скорость катера в стоячей воде вдвое больше скорости течения.

Р е ш е н и е . I *способ.* Примем за единицу измерения пройденного пути длину пути, проплываемого плотом за 1ч. Обозначим ее 1 *дл.* (“длина”). Тогда скорость плота и скорость течения 1 *дл./ч.* скорость катера в стоячей воде 2*дл./ч,* скорость катера по течению 3 *дл./ч,* против течения 1 *дл./ч,* скорость сближения катера и плота при движении катера по течению 2*дл./ч.*

Так как катер вышел на час позже плота, то на начало взаимного движения расстояние между ними было равно 1 *дл.* Время, необходимое катеру, чтобы догнать плот, равно времени, которое необходимо для преодоления пути в 1 дл. при движении со скоростью, равной скорости сближения, т. е. 2*дл./ч.* Найдем это время: 1*дл. :2дл./ч=0,5ч.*

Длина пути от пристани до места начала движения катера в обратном направлении равна длине пути, который проделал плот от начала движения до того, как катер догнал плот. Такой же путь пройден катером по течению. Поэтому длину пути можно найти двумя способами: 1*дл./ч* 1,5*ч*=1,5*дл.,* или 3*дл./ч*-0,5*ч*=1,5*дл.*

Время, необходимое катеру на обратный путь, 1,5*дл.:* 1*дл./ч*=1,5*ч.* Время от начала движения катера до его возвращения в пункт *А:*

0,5*ч*+1,5*ч*=2*ч.*

11 *способ.* Пусть за 1 ч плот прошел *x*км, тогда катер догонял плот со скоростью 3*xкм/ч* в течение 0,5 *ч* (так как x:(3x-x)=0,5). За 0,5ч плот прошел 0,5x *км.* Значит, обратно катеру пришлось идти 1,5x *км* (так как x+0,5x= 1,5x). На преодоление этого расстояния со скоростью *x км/ч (2x-x=x)* ему потребовалось 1,5ч. Таким образом, на все движение катер затратил 1,5ч+0,5ч=2ч.