ПРОФ. С. ГЛАЗЕНАПЪ.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ

ЧАСТЬ I.

РѢШЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

Цѣна 75 коп.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
1912

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стран.

Предисловіе V

Сокращенія, принятыя вънастоящемъ учебникѣ VII

Программа Тригонометріи 6-го класса реальныхъ училищъ VIII

Глава I. Тригонометрическія величины 1

§ 1. Предметъ Тригонометріи (1). — **§ 2.** Углы и ихъ измѣреніе (2). — **§ 3.** Правило Декарта для опредѣленія положенія точки на линіи (3). — **§ 4.** Зависимость между острымъ угломъ и его линіями (4). — **§ 5.** Тригонометрическія величины остраго угла (6). — **§ 6.** Тригонометрическія величины тупого угла (8). — **§ 7.** Соотношенія между тригонометрическими величинами одного и того же остраго угла (8). — **§ 8.** Обобщеніе предыдущихъ соотношеній для тупого угла (10). — **§ 9.** Значенія, которыя способна принимать каждая изъ тригонометрическихъ величинъ (12). — **§ 10.** Соотношенія между тригонометрическими величинами двухъ дополнительныхъ угловъ (18). — **§ 11.** Соотношенія между тригонометрическими величинами двухъ пополнительныхъ угловъ (19).

Глава II. Тригонометрическія таблицы 22

§ 12. Цѣль составленія тригонометрическихъ таблицъ (22). — **§ 13.** Устройство тригонометрическихъ таблицъ (24). — **§ 14.** Употребленіе тригонометрическихъ таблицъ (26). — **§ 15.** Упражненія (35). — **§ 16.** Точность вычисленія угловъ по логариѳмамъ тригонометрическихъ величинъ (36). — **§ 17.** Логариѳмы суммъ и разностей (Гаусса) (38). — **§ 18.** Упражненія и задачи (43).

Глава III. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ 44

§ 19. Общія замѣчанія (44). — **§ 20.** Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника (45). — **§ 21.** Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (45). — **§ 22.** Особенные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (47). — **§ 23.** Упражненія и задачи (49).

Глава IV. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ 51

§ 24. Пропорціональность стороны треугольника синусу противолежащаго угла (51) — **§ 25.** Значеніе отношенія стороны треугольника къ синусу противолежащаго угла (52). — **§ 26.** Выраженіе тангенса по-

СТРАН.

ловины угла треугольника въ его сторонахъ (54). — **§ 27.** Отношеніе суммы или разности двухъ сторонъ треугольника къ третьей (56). — **§ 28.** Отношеніе разности двухъ сторонъ треугольника къ ихъ суммѣ (58). — **§ 29.** Выраженіе квадрата стороны треугольника (59). — **§ 30.** Выраженіе стороны треугольника въ зависимости двухъ другихъ (формула проекцій) (60). — **§ 31.** Общія замѣчанія о рѣшеніи косоугольныхъ треугольниковъ (62). — **§ 32.** Случай I: даны три стороны a, b и c; рѣшить треугольникъ (63). — **§ 33.** Упражненія и задачи (65). — **§ 34.** Случай II: даны двѣ стороны b и c и уголъ между ними A; рѣшить треугольникъ (65). — **§ 35.** Упражненія и задачи (68). — **§ 36.** Даны двѣ стороны a и b и уголъ, лежащій противъ одной изъ нихъ, напримѣръ A; рѣшить треугольникъ (68). — **§ 37.** Примѣры, упражненія и задачи (71). — **§ 38.** Случай IV: даны сторона a и прилежащіе углы B и C; рѣшить треугольникъ (74). — **§ 39.** Упражненія и задачи (75).

Глава V. Вычисленіе площадей треугольниковъ 76

§ 40. Вычисленіе площадей прямоугольныхъ треугольниковъ (76). — **§ 41.** Упражненія (77). — **§ 42.** Вычисленіе площадей косоугольныхъ треугольниковъ (77). — **§ 43.** Упражненія (79).

Глава VI. Приложеніе рѣшенія треугольниковъ къ рѣшенію геометрическихъ задачъ на вычисленіе 81

§ 44. *А.* Задачи въ полѣ (81). — **§ 45.** *Б.* Задачи на плоскости (87). — **§ 46.** *В.* Задачи въ пространствѣ (98). — **§ 47.** *Г.* Задачи о правильныхъ многоугольникахъ (101).

Отвѣты на задачи 105

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предметъ тригонометріи въ современномъ изложеніи значительно расширился и вышелъ за предѣлы первоначальной задачи—рѣшенія треугольниковъ. Въ настоящее время въ курсахъ тригонометріи излагаются и другія алгебраическія изслѣдованія надъ плоскими углами, не входящими въ составъ треугольника. Нѣкоторыя изъ этихъ изслѣдованій не могутъ входить въ программу средней школы: они скорѣе относятся къ высшему анализу, чѣмъ къ тригонометріи. Я не включилъ ихъ въ свой курсъ, такъ какъ признаю за тригонометріей въ средней школѣ исключительно прикладное значеніе.

При выборѣ задачъ я останавливалъ главнымъ образомъ свое вниманіе на задачахъ, имѣющихъ практическое и поучительное значеніе, и заимствовалъ ихъ изъ области механики, физики, астрономіи, геодезіи и геометріи. Затѣмъ я избѣгалъ повторныхъ задачъ, такъ какъ считаю, что выборъ ихъ долженъ быть предоставленъ усмотрѣнію преподавателя. Загромождать учебникъ многочисленными задачами я счелъ лишнимъ еще и потому, что въ русской учебной литературѣ существуетъ нѣсколько сборниковъ задачъ по тригонометріи.

Въ задачахъ, за малыми исключеніями, я привожу повѣрку полученнаго рѣшенія, и считаю это безусловно необходимымъ какъ съ педагогической, такъ и практической

точекъ зрѣнія. Увѣренность въ правильности численнаго рѣшенія можетъ быть пріобрѣтаема только путемъ повѣрки вычисленія.

Въ треугольникахъ встрѣчаются углы только до 180^c; но въ механикѣ и въ астрономіи приходится имѣть дѣло съ углами, могущими принимать всевозможныя значенія. Сообразно съ этимъ, изложеніе предмета раздѣлено на двѣ части: рѣшеніе и вычисленіе треугольниковъ составляетъ предметъ первой части — тригонометріи въ собственномъ смыслѣ слова; углы же и дуги, измѣняющіеся на какія угодно величины, составляютъ предметъ второй части настоящаго курса—гоніометріи.

Многолѣтнимъ опытомъ я убѣдился, что для успѣшнаго изученія тригонометріи весьма важно умѣть пользоваться таблицами логариѳмовъ вообще и тригонометрическихъ величинъ въ частности; это побудило меня отвести видное мѣсто главѣ о тригонометрическихъ таблицахъ; въ ней, между прочимъ, я обращаю вниманіе на мало распространенныя въ Россіи таблицы Гаусса суммъ и разностей, имѣющія, однако, большое практическое значеніе, такъ какъ ими устраняется необходимость введенія вспомогательнаго угла въ приведеніи двучлена къ логариѳмическому виду, что значительно облегчаетъ вычисленія.

Настоящій курсъ прямолинейной тригонометріи составленъ примѣнительно къ новой программѣ (1906 г.), утвержденной Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія.

Преподаватели А. М. Гижицкій и П. И. Савкевичъ взяли на себя трудъ просмотра задачъ и ихъ рѣшеній, а также чтенія послѣднихъ корректуръ, и я считаю своимъ долгомъ принести имъ мою искренюю признательность.

С. Глазенапъ.

Сокращенія, принятыя въ настоящемъ учебникѣ:

Километръ	обозначается	km	футъ	обозначается	ф.
метръ	»	m	дюймъ	»	д.
дециметръ	»	dm	линія	»	л.
сантиметръ	»	cm	десятина	»	дес.
милиметръ	»	mm	гектаръ	»	гект.
верста	»	вер.	килограммъ	»	клгр.
сажень	»	саж.	часъ	»	ч.
аршинъ	»	арш.	минута	»	м.
вершокъ	»	верш.	секунда	»	с.
квадратный метръ		m^2	кубическій метръ		m^3
» сантиметръ		cm^2	» сантиметръ		cm^3
» милиметръ		mm^2	» милиметръ		mm^3
» аршинъ		кв. арш.	» аршинъ		куб. арш.
» сажень		кв. саж.	» сажень		куб. саж.

Собраніе формулъ для рѣшенія треугольниковъ дано на стр. 115—117 «Таблицъ логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками» С. Глазенапа.

Программа Тригонометріи 6-го класса реальныхъ училищъ.

(Новая программа 1906 г.).

[Цифры, стоящія въ скобкахъ, означаютъ параграфы настоящаго учебника].

Понятіе о тригонометрическихъ величинахъ: синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ остраго и тупого угла (1—8). Значенія, которыя способны принимать каждая изъ тригонометрическихъ величинъ (9). Соотношеніе между тригонометрическими величинами двухъ пополнительныхъ и двухъ дополнительныхъ угловъ (10—11). Логариѳмы тригонометрическихъ величинъ (12). Устройство тригонометрическихъ таблицъ (13—16). Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника (20). Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ (21). Пропорціональность стороны треугольника синусу противолежащаго угла (24). Выраженіе тангенса половины угла треугольника въ его сторонахъ (26). Отношеніе разности сторонъ треугольника къ ихъ суммѣ (28). Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ (31—39). Вычисленіе площадей треугольниковъ (40—43). Приложеніе рѣшенія треугольниковъ къ рѣшенію геометрическихъ задачъ на вычисленіе (44—46).

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Тригонометрическія величины.

---

§ 1. Предметъ тригонометріи. Предметъ прямолинейной тригонометріи есть рѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ посредствомъ вычисленія. Слово «Тригонометрія»—греческое, сложное, состоящее изъ двухъ словъ: τρίγωνον (треугольникъ) и μετρέω (измѣряю).

Въ начальной геометріи излагаются способы рѣшенія треугольниковъ геометрическимъ путемъ, или построеніемъ съ помощью циркуля, линейки и транспортира. Простота и изящество геометрическаго способа рѣшенія треугольниковъ, съ теоретической точки зрѣнія, не оставляетъ желать ничего лучшаго, но практическое выполненіе самаго рѣшенія является во многихъ случаяхъ мало удовлетворительнымъ. Транспортиры раздѣлены, въ большинствѣ случаевъ, на градусы или полуградусы; слѣдовательно нанесеніе угловъ на чертежѣ не можетъ быть произведено съ большою точностью; послѣдняя оцѣнивается самое большее въ $\frac{1}{10}$ градуса; если же въ задачѣ углы даны съ точностью до секунды, то очевидно, что они не могутъ быть наносимы на чертежъ. Въ зависимости отъ неточнаго нанесенія угловъ получается и неточное рѣшеніе треугольниковъ. Подобное же затрудненіе встрѣчается въ геометрическомъ рѣшеніи при измѣреніи его сторонъ. Опытъ показалъ, что циркулемъ можно изъ-

мѣрять съ точностью до одной полусотой доли дюйма; если, поэтому, на чертежѣ длина въ 100 саж. изображается однимъ дюймомъ, то измѣренія могутъ быть производимы только съ точностью до $\frac{1}{200}$ отъ100 саж., или до $\frac{1}{2}$ сажени; дѣйствительность же предъявляетъ иногда бо́льшія требованія.

Изъ сказаннаго мы выводимъ заключеніе, что геометрическое рѣшеніе треугольника, теоретически совершенное не можетъ удовлетворить всѣмъ требованіямъ науки и практики. Вотъ почему явилась необходимость изыскать способъ, посредствомъ котораго можно для каждаго даннаго треугольника найти рѣшеніе съ любою точностью. Рѣшеніе треугольниковъ производится съ помощью особыхъ «тригонометрическихъ величинъ», опредѣляющихъ зависимость между углами и сторонами треугольника и выражающихъ ее съ какою угодно точностью.

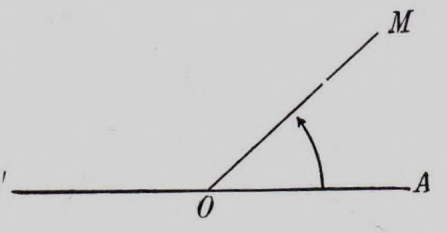
§ 2. Углы и ихъ измѣреніе. Величина плоскаго угла, какъ извѣстно, не зависитъ отъ длины его сторонъ. Углы могутъ быть измѣряемы или нѣкоторымъ угломъ, имѣющимъ постоянную величину, или же нѣкоторою дугою, имѣющей при данномъ радіусѣ постоянную величину; въ послѣднемъ случаѣ измѣреніе угла называется *дуговымъ*. Всего чаще за единицу угловъ берутъ девяностую долю прямого (d). Уголъ, равный $\frac{d}{90}$, называется градусомъ*). Градусъ дѣлится на 60 минутъ, минута — на 60 секундъ, а секунды дѣлятся на десятыя, сотыя и т. д. доли по десятичной системѣ. Градусы, минуты и секунды обозначаются: °, ′, ″. Напримѣръ, 27°31′48″,6 читается слѣдующимъ образомъ: 27 градусовъ, 31 минута и 48,6 секунды.

Такъ какъ въ треугольникахъ, составляющихъ предметъ первой части Тригонометріи, ни одинъ изъ угловъ не мо-

*) Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, въ цѣляхъ практическаго удобства, прямой уголъ дѣлится на 100 частей, или же на 6 частей. Уголъ $\frac{d}{100}$ называется градомъ и обозначается 1^g, а $\frac{d}{6}$ называется часомъ и обозначается 1^u или 1^h.

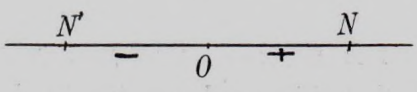
жетъ быть равенъ или больше 180°, то здѣсь мы будемъ разсматривать углы только до 180°, и будемъ выражать ихъ въ угловой мѣрѣ; изученіе угловъ болѣе 180° и дуговое ихъ измѣреніе составятъ предметъ II части Тригонометріи.

Всѣ углы отъ 0° до 180° могутъ быть произведены вращеніемъ линіи OM около вершины угла O. Линія OA называется *начальною* или *основною*, а линія OM, могущая принимать всевозможныя положенія, — *производящею линіею* или *радіусомъ-векторомъ*. Линія OA называется также *основною стороною* даннаго угла, а линія OM—*его второю стороною*.



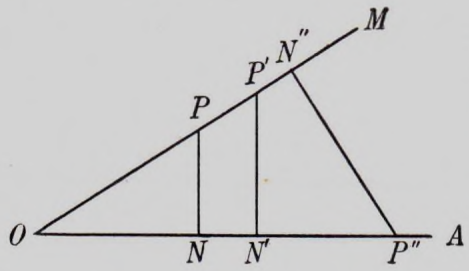
При образованіи угловъ вращеніемъ линіи OM около точки O, линія OM можетъ въ частномъ случаѣ совмѣститься съ OA или ея продолженіемъ OA', и тогда уголъ исчезаетъ, но для общности принято считать, что въ первомъ случаѣ уголъ равенъ 0°, а во второмъ 180°.

§ 3. Правило Декарта для опредѣленія положенія точки на линіи. Разсмотримъ, какимъ образомъ опредѣляется положеніе нѣкоторой точки на линіи. Пусть O будетъ произвольно избранная точка на прямой линіи $N'N$, и требуется опредѣлить положеніе точекъ N и N' этой прямой относительно избранной точки O. Положеніе нѣкоторой точки на прямой линіи относительно точки O будетъ опредѣлено, если извѣстно ея *разстояніе* отъ O и *направленіе*, въ которомъ она лежитъ. Разстоянія выражаются въ линейныхъ единицахъ, а ихъ направленія—знакомъ. Условимся считать разстоянія, лежащія вправо отъ точки O, за *положительныя*, а лежащія влѣво — за *отрицательныя*. Напримѣръ, положеніе точки N опредѣляется положительнымъ разстояніемъ: $+ ON$, а положеніе точки N'—отрицательнымъ разстояніемъ: $- ON'$. По данной величинѣ разстоянія и ея знаку мы получимъ одну и



только одну точку на прямой линіи; если же знака не дано, то получатся двѣ точки на равномъ разстояніи отъ начальной точки O: одна N—направо, а другая N'—налѣво отъ нея.

§ 4. Зависимость между острымъ угломъ и его линіями. Пусть $y = AOM$ будетъ нѣкоторый острый уголъ.



Выберемъ на той или другой сторонѣ произвольныя точки P, P', P'' и т. д. и опустимъ изъ нихъ перпендикуляры на другую сторону: PN, $P'N'$, $P''N''$ и т. д. Мы получимъ рядъ треугольниковъ ONP, $ON'P'$, $ON''P''$ и т. д.; они всѣ подобны, такъ какъ имѣютъ, кромѣ прямого угла, общій острый уголъ $y = AOM$. Изъ ихъ подобія мы выводимъ слѣдующіе ряды отношеній:

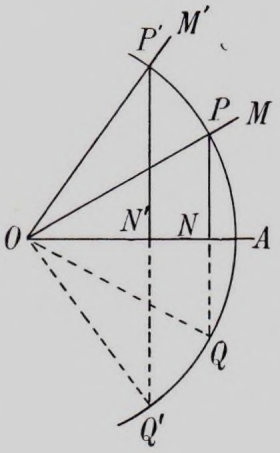
$$\left.\begin{aligned} \frac{PN}{OP} = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{P''N''}{OP''} &= \text{и т. д.} \\ \frac{ON}{OP} = \frac{ON'}{OP'} = \frac{ON''}{OP''} &= \text{и т. д.} \\ \frac{PN}{ON} = \frac{P'N'}{ON'} = \frac{P''N''}{ON''} &= \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Мы видимъ, что для даннаго остраго угла приведенныя отношенія остаются постоянными, гдѣ бы мы ни взяли точки P, P', P'' и т. д., изъ которыхъ опущены перпендикуляры на другую сторону угла.

Докажемъ, что съ измѣненіемъ угла измѣняются и приведенныя отношенія, и что, слѣдовательно, для каждаго остраго угла существуетъ одно и только одно значеніе приведенныхъ отношеній линій угла.

Пусть AOM и AOM' (стр. 5) будутъ два неравныхъ между собою острыхъ угла. На одной изъ сторонъ угла AOM выберемъ произвольную точку P, и радіусомъ OP изъ точки O, какъ центра, опишемъ кругъ. Затѣмъ изъ точки P опустимъ

перпендикуляръ PN на OA и продолжимъ его до пересѣченія съ кругомъ въ точкѣ Q. Изъ точки P'—пересѣченія того же круга со второю стороною бо̀льшаго угла AOM'—проведемъ перпендикуляръ на ту же линію OA и продолжимъ его до пересѣченія съ кругомъ въ точкѣ Q'. Перпендикуляры PN и $P'N'$ будутъ полухорды дугъ PAQ и $P'AQ'$, стягивающихъ центральные углы POQ и $P'OQ'$. Въ геометріи доказывается: 1) что меньшія дуги полуокружности стягиваются меньшими хордами, а бо́льшія дуги — бо̀льшими хордами; 2) что меньшія дуги полуокружности лежатъ дальше отъ центра, чѣмъ бо́льшія. Итакъ $P'Q' > PQ$, а слѣдовательно и $\frac{1}{2} P'Q' > \frac{1}{2} PQ$ или $P'N' > PN$. Кромѣ того $ON' < ON$; поэтому:



$$\frac{P'N'}{OP'} > \frac{PN}{OP}, \quad \frac{ON'}{OP'} < \frac{ON}{OP} \text{ и } \frac{P'N'}{ON'} > \frac{PN}{ON}.$$

Итакъ, при измѣненіи величины угла измѣняется отношеніе его линій; поэтому:

1. Данному острому углу соотвѣтствуютъ одни и только одни значенія отношеній его линій, независимо отъ величины этихъ линій;

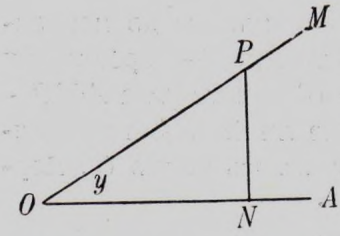
2. Различнымъ острымъ угламъ соотвѣтствуютъ различныя значенія отношеній линій угловъ;

и, какъ слѣдствіе:

3. Два равныхъ угла имѣютъ равныя отношенія своихъ линій.

4. Данному значенію отношеній линій остраго угла соотвѣтствуетъ одинъ и только одинъ острый уголъ.

Отсюда мы заключаемъ, что приведенныя отношенія линій угловъ могутъ служить для измѣренія угловъ.



§ 5. Тригонометрическія величины остраго угла. Пусть $y = AOM$ будетъ нѣкоторый острый уголъ, стороны котораго суть OA и OM. Выберемъ на сторонѣ OM произвольную точку P и опустимъ перпендикуляръ PN на другую сторону OA угла y. Мы получимъ прямоугольный треугольникъ ONP.

Отношеніе $\frac{PN}{OP}$ называется *синусомъ* угла y.

» $\frac{ON}{OP}$ » *косинусомъ* » »

» $\frac{PN}{ON}$ » *тангенсомъ* » »

» $\frac{ON}{PN}$ » *котангенсомъ* » »

» $\frac{OP}{ON}$ » *секансомъ* » »

» $\frac{OP}{PN}$ » *косекансомъ* » »

Эти отношенія называются *тригонометрическими величинами* даннаго угла y. Для краткости тригонометрическія величины обозначаются слѣдующимъ образомъ:

синусъ угла y обозначается $\sin y$.
косинусъ » » » $\cos y$.
тангенсъ » » » $\operatorname{tg} y$.
котангенсъ » » » $\operatorname{cotg} y$.
секансъ » » » $\sec y$.
косекансъ » » » $\operatorname{cosec} y$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Итакъ: } \sin y = \frac{PN}{OP}; & \operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON}; & \sec y = \frac{OP}{ON} \\ \cos y = \frac{ON}{OP}; & \operatorname{cotg} y = \frac{ON}{PN}; & \operatorname{cosec} y = \frac{OP}{PN} \end{array}\right\}. \quad (2)$$

Тригонометрическія величины остраго угла, какъ отношенія двухъ линій, являются *положительными отвлеченными числами*.

Изъ опредѣленія тригонометрическихъ величинъ остраго угла мы выводимъ заключеніе, что въ прямоугольномъ треугольникѣ съ заданнымъ острымъ угломъ y:

$\sin y$ есть отношеніе противолежащаго*) катета къ гипотенузѣ;

$\cos y$ есть отношеніе прилежащаго катета къ гипотенузѣ;

$\mathrm{tg}\, y$ есть отношеніе противолежащаго катета къ прилежащему;

$\mathrm{cotg}\, y$ есть отношеніе прилежащаго катета къ противолежащему;

$\sec y$ есть отношеніе гипотенузы къ прилежащему катету; $\mathrm{cosec}\, y$ есть отношеніе гипотенузы къ противолежащему катету.

Такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ гипотенуза всегда больше катетовъ, катеты же между собою не связаны никакимъ условіемъ, то мы заключаемъ, что тѣ тригонометрическія величины, которыя содержатъ гипотенузу въ знаменателѣ, никогда не могутъ быть больше единицы; тѣ, которыя содержатъ гипотенузу въ числителѣ, никогда не могутъ быть меньше единицы, и наконецъ тѣ, которыя не содержатъ гипотенузы ни въ числителѣ, ни въ знаменателѣ, могутъ принимать всевозможныя значенія. Поэтому:

синусъ и косинусъ никогда не могутъ быть больше единицы;

секансъ и косекансъ никогда не могутъ быть меньше единицы; и

тангенсъ и котангенсъ могутъ принимать всевозможныя значенія.

Тригонометрическія величины, будучи отношеніями линій угловъ, обладаютъ всѣми свойствами этихъ отношеній, а именно:

1. Данному острому углу соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе тригонометрическихъ величинъ.

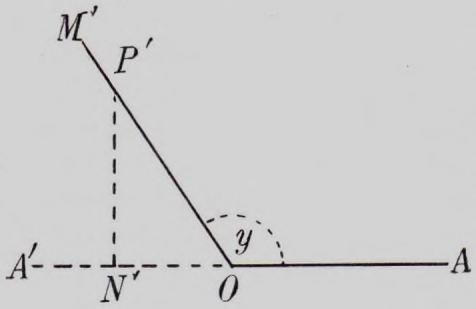
---

*) Въ приводимыхъ опредѣленіяхъ слова «противолежащій» и «прилежащій» относятся къ данному углу y.

2. Данной тригонометрической величинѣ соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе остраго угла.

Изложеннымъ свойствомъ тригонометрическихъ величинъ мы воспользуемся для измѣренія угловъ.

§ 6. Тригонометрическія величины тупого угла. Принявъ правило Декарта, мы можемъ опредѣлить тригонометрическія величины тупого угла. Пусть $y = AOM'$ будетъ нѣкоторый тупой уголъ. Выберемъ, какъ и въ случаѣ остраго угла (§ 5), на сторонѣ OM' произвольную точку P' и опустимъ изъ нея перпендикуляръ $P'N'$ на OA' — продолженіе основной стороны OA даннаго тупого угла AOM'; онъ пересѣчетъ продолженіе линіи OA въ точкѣ N'; линія ON', какъ направленная отъ точки O въ сторону, противоположную счету положительныхъ направленій по Декарту, является отрицательною и обозначается: $-ON'$.



Распространяя опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ на тупой уголъ, мы напишемъ:

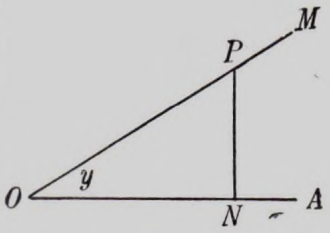
$$\left.\begin{aligned} \sin y &= \frac{+P'N'}{OP'} = +\frac{P'N'}{OP'}; \quad \cos y = \frac{-ON'}{OP'} = -\frac{ON'}{OP'} \\ \operatorname{tg} y &= \frac{+P'N'}{-ON'} = -\frac{P'N'}{ON'}; \quad \operatorname{cotg} y = \frac{-ON'}{+P'N'} = -\frac{ON'}{P'N'} \\ \sec y &= \frac{OP'}{-ON'} = -\frac{OP'}{ON'}; \operatorname{cosec} y = \frac{OP'}{+P'N'} = +\frac{OP'}{P'N'} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

Итакъ, у тупого угла y тригонометрическія величины $\sin y$ и $\operatorname{cosec} y$ имѣютъ положительное значеніе, а $\cos y$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{cotg} y$ и $\sec y$ — отрицательное.

§ 7. Соотношенія между тригонометрическими величинами одного и того же остраго угла.

1-е соотношеніе. Пусть $y = AOM$ будетъ данный острый уголъ. Опустивъ изъ нѣкоторой точки P, взятой на сто-

ронѣ OM даннаго угла, перпендикуляръ PN на другую сторону OA; мы получимъ прямоугольный треугольникъ ONP, въ которомъ по теоремѣ Пиѳагора имѣемъ:



$$PN^2 + ON^2 = OP^2$$

или, по раздѣленіи на OP^2:

$$\left(\frac{PN}{OP}\right)^2 + \left(\frac{ON}{OP}\right)^2 = 1$$

а такъ какъ $\frac{PN}{OP} = \sin y$, а $\frac{ON}{OP} = \cos y$, то

$$(\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1,$$

что принято писать слѣдующимъ образомъ:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \text{ *)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

т. е. *сумма квадратовъ синуса и консинуса нѣкотораго остраго угла равна единицѣ.*

2-е соотношеніе. Мы имѣемъ:

$$\frac{OP}{ON} = \sec y \quad \text{и} \quad \frac{ON}{OP} = \cos y.$$

но такъ какъ $\frac{OP}{ON} = \frac{1}{\frac{ON}{OP}}$,

то $\sec y = \frac{1}{\cos y}$ и $\cos y = \frac{1}{\sec y}$ . . . . . (5)

т. е. *секансъ и косинусъ нѣкотораго остраго угла суть взаимно-обратныя величины.*

3-е соотношеніе. Мы имѣемъ:

$$\frac{OP}{PN} = \operatorname{cosec} y \quad \text{и} \quad \frac{PN}{OP} = \sin y$$

---

*) Квадратъ тригонометрическихъ величинъ пишется не $(\sin y)^2$, $(\cos y)^2$, $(\operatorname{tg} y)^2$ и т. д., а $\sin^2 y$, $\cos^2 y$, $\operatorname{tg}^2 y$ и т. д. Показатель степени ставится послѣ обозначенія тригонометрической величины и передъ угломъ.

а такъ какъ

$$\frac{OP}{PN} = \frac{1}{\frac{PN}{OP}},$$

то

$$\operatorname{cosec} y = \frac{1}{\sin y} \quad \text{и} \quad \sin y = \frac{1}{\operatorname{cosec} y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

т. е. *косекансъ и синусъ нѣкотораго остраго угла суть взаимно-обратныя величины.*

4-е соотношеніе. Мы имѣемъ:

$$\operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON} = \frac{\frac{PN}{OP}}{\frac{ON}{OP}} = \frac{\sin y}{\cos y}$$

или

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

т. е. *тангенсъ нѣкотораго остраго угла равенъ отношенію синуса того же угла къ его косинусу.*

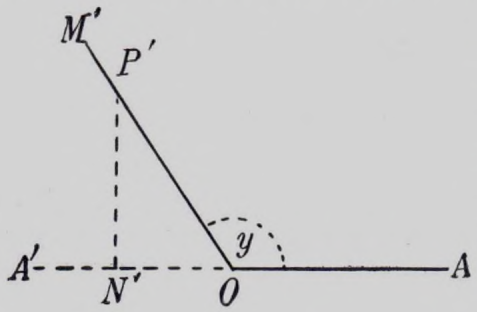
5-е соотношеніе. Мы имѣемъ:

$$\operatorname{cotg} y = \frac{ON}{PN} = \frac{\frac{ON}{OP}}{\frac{PN}{OP}} = \frac{\cos y}{\sin y}$$

или

$$\operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

т. е. *котангенсъ нѣкотораго остраго угла равенъ отношенію косинуса того же угла къ его синусу.*



§ 8. Обобщеніе предыдущихъ соотношеній для тупого угла. Выведенныя въ предыдущемъ параграфѣ пять соотношеній между тригонометрическими величинами имѣютъ мѣсто и для тупого угла.

Дѣйствительно, изъ опредѣленій тригонометрическихъ величинъ тупого угла y (3) выводимъ:

$$1)\ \sin^2 y+\cos^2 y=\left(+\frac{P'N'}{OP'}\right)^2+\left(-\frac{ON'}{OP'}\right)^2=\frac{(P'N')^2+(ON')^2}{(OP')^2}$$

но такъ какъ:

$$(P'N')^2+(ON')^2=(OP')^2$$

то

$$\sin^2 y+\cos^2 y=\frac{(OP')^2}{(OP')^2}=1.$$

$$2)\ \sec y=-\frac{OP'}{ON'}=\frac{1}{-\frac{ON'}{OP'}}=\frac{1}{\cos y}.$$

$$3)\ \operatorname{cosec} y=+\frac{OP'}{P'N'}=\frac{1}{+\frac{P'N'}{OP'}}=\frac{1}{\sin y}.$$

$$4)\ \operatorname{tg} y=\frac{+P'N'}{-ON'}=\frac{+\frac{P'N'}{OP'}}{-\frac{ON'}{OP'}}=\frac{\sin y}{\cos y}.$$

$$5)\ \operatorname{cotg} y=\frac{-ON'}{+P'N'}=\frac{-\frac{ON'}{OP'}}{+\frac{P'N'}{OP'}}=\frac{\cos y}{\sin y}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ опредѣленій тригонометрическихъ величинъ тупого угла (3), мы приходимъ къ заключенію, что между ними существуютъ такія же соотношенія, какъ и между тригонометрическими величинами остраго угла (§ 7), а потому эти соотношенія, какъ и нижеприводимыя слѣдствія изъ нихъ (9) и (10), являются общими для всѣхъ угловъ отъ 0 до 180°.

Изъ полученныхъ пяти соотношеній между шестью тригонометрическими величинами можно вывести нѣсколько другихъ, какъ слѣдствіе. Напримѣръ, если перемножить равенства (7) и (8) по частямъ, то получимъ:

$$\operatorname{tg} y\times\operatorname{cotg} y=\frac{\sin y}{\cos y}\cdot\frac{\cos y}{\sin y}=1$$

откуда $$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\operatorname{cotg} y} \quad \text{и} \quad \operatorname{cotg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} y} \ldots . \quad (9)$$

Изъ этихъ отношеній мы заключаемъ, что тангенсъ и котангенсъ нѣкотораго угла являются взаимнообратными величинами.

Затѣмъ:

$$\left.\begin{aligned} 1+\operatorname{tg}^2 y &= 1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y \\ 1+\operatorname{cotg}^2 y &= 1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y} = \operatorname{cosec}^2 y \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

§ 9. Значенія, которыя способна принимать каждая изъ тригонометрическихъ величинъ. Прежде, чѣмъ приступить къ рѣшенію треугольниковъ путемъ вычисленія, необходимо уяснить, какія значенія можетъ принимать каждая изъ тригонометрическихъ величинъ для угловъ, встрѣчающихся въ треугольникахъ, именно отъ 0° до 180°. Разсмотримъ эти измѣненія, но предварительно приведемъ слѣдующее замѣчаніе о безконечныхъ величинахъ; оно упроститъ изученіе вопроса.

Разсмотримъ дробь $\frac{a}{x}$, числитель которой имѣетъ нѣкоторое опредѣленное постоянное значеніе a, а знаменатель состоитъ изъ величины x, способной измѣняться; въ такомъ случаѣ съ уменьшеніемъ величины x значеніе дроби $\frac{a}{x}$ увеличивается; чѣмъ меньше x, тѣмъ больше дробь $\frac{a}{x}$. Напримѣръ, если $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10\,000}$ и т. д., то дробь $\frac{a}{x}$ принимаетъ слѣдующія значенія:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{\frac{1}{10}} = 10a; \quad \frac{a}{\frac{1}{100}} = 100a; \quad \frac{a}{\frac{1}{10\,000}} = 10\,000a \text{ и т. д.,}$$

Давая x достаточно малыя значенія, мы получимъ для дроби $\frac{a}{x}$ *сколь угодно большое значеніе*; съ приближе-

ніемъ же x къ нулю дробь $\frac{a}{x}$ можетъ быть больше всякой данной величины или, какъ принято говорить, становится *безконечно большою*. Условились обозначать безконечно большую величину знакомъ ∞ и писать слѣдующимъ образомъ:

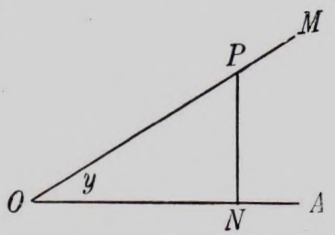
$$\left.\begin{array}{r} \text{при } x=0 \text{ предѣлъ } \frac{a}{x}=\infty \\ \text{или просто : } \frac{a}{0}=\infty. \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (11)$$

Съ другой стороны, если знаменатель x способенъ увеличиваться безпредѣльно и въ концѣ концовъ становится безконечно большимъ, то дробь $\frac{a}{x}$ будетъ безпредѣльно уменьшаться и въ концѣ концовъ превратится въ нуль,

$$\left.\begin{array}{r} \text{такъ что при } x=\infty \text{ предѣлъ } \frac{a}{x}=0 \\ \text{или просто : } \frac{a}{\infty}=0. \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \quad (12)$$

1. Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ угла отъ 0° до 90°. Пусть $y=AOM$ будетъ нѣкоторый острый уголъ. Изъ произвольной точки P, взятой на сторонѣ OM, проведемъ $PN \perp OA$; тогда

$$\sin y = \frac{PN}{OP}.$$



Предположимъ, что уголъ y постепенно уменьшается; если при этомъ точка P будетъ оставаться въ неизмѣнномъ разстояніи отъ O, то перпендикуляръ PN, какъ полухорда, стягивающая уменьшающіяся дуги (см. § 4), будетъ постепенно уменьшаться, и когда OP совмѣстится съ ON и уголъ y станетъ равнымъ нулю; тогда исчезнетъ и перпендикуляръ PN; слѣдовательно:

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{OP} = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ $\cos y = \frac{ON}{OP}$ будетъ постепенно увеличиваться, такъ какъ при уменьшеніи угла числитель увеличивается, а знаменатель остается постояннымъ. При уменьшеніи угла y до 0°, OP совмѣщается съ ON, и тогда $OP = ON$; слѣдовательно:

$$\cos 0^\circ = \frac{ON}{ON} = 1.$$

Разсмотримъ затѣмъ измѣненіе $\operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON}$. Когда уголъ y уменьшается, PN тоже уменьшается, а ON увеличивается; слѣдовательно $\operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON}$ уменьшается, а когда $y = 0$, PN тоже исчезаетъ, и $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{ON} = 0$.

Далѣе имѣемъ:

$$\operatorname{cotg} 0^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

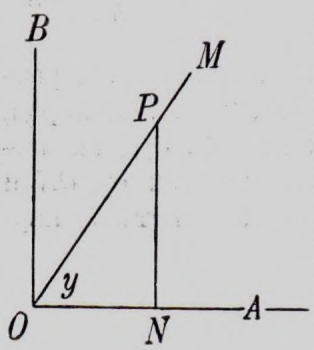
$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

Итакъ, для $y = 0^\circ$ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{lll} \sin 0^\circ = 0; & \operatorname{tg} 0^\circ = 0; & \sec 0^\circ = 1; \\ \cos 0^\circ = 1; & \operatorname{cotg} 0^\circ = \infty & \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (13)$$

Выше мы разсмотрѣли, какъ измѣняются тригонометрическія величины угла съ уменьшеніемъ его отъ нѣкоторой величины y до 0. Изслѣдуемъ далѣе, какъ онѣ измѣняются при увеличеніи угла отъ y до 90°. Пусть $y = AOM$ будетъ нѣкоторый уголъ; выберемъ на сторонѣ OM произвольную точку P и опустимъ изъ нея $PN \perp OA$; кромѣ того, проведемъ изъ вершины угла O линію $OB \perp OA$. По опредѣленію тригонометрическихъ величинъ имѣемъ:



$$\sin y = \frac{PN}{OP}; \quad \cos y = \frac{ON}{OP} \text{ и } \operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON}.$$

Если уголъ y увеличивается и постепенно приближается къ 90°, то при неизмѣнномъ разстояніи точки P отъ O, PN будетъ увеличиваться, а ON—уменьшаться. Вслѣдствіе этого $\sin y$ и $\operatorname{tg} y$ будутъ непрерывно увеличиваться, а $\cos y$—непрерывно уменьшаться. Когда $y = 90°$, PN сольется съ OP, ON исчезнетъ и тогда

$$\sin 90° = \frac{OP}{OP} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\operatorname{tg} 90° = \frac{OP}{0} = \infty$$

Далѣе:

$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 90° = \frac{1}{\cos 90°} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cotg} 90° = \frac{1}{\operatorname{tg} 90°} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Итакъ, для $y = 90°$ имѣемъ:

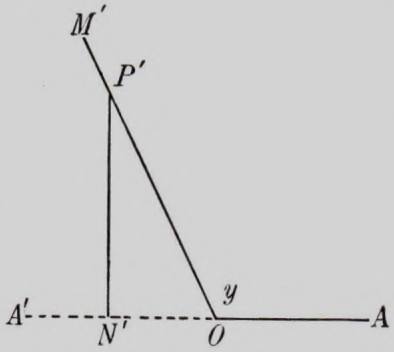
$$\left.\begin{array}{lll} \sin 90° = 1, & \operatorname{tg} 90° = \infty; & \sec 90° = \infty \\ \cos 90° = 0; & \operatorname{cotg} 90° = 0; & \operatorname{cosec} 90° = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots(14)$$

При увеличеніи угла y отъ 0° до 90° значенія $\sin y$, $\operatorname{tg} y$ и $\sec y$ непрерывно увеличиваются, такъ какъ у $\sin y = \frac{PN}{OP}$ при постоянномъ знаменателѣ числитель непрерывно увеличивается, у $\operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON}$ числитель тоже непрерывно увеличивается, знаменатель же уменьшается, а у $\sec y = \frac{OP}{ON}$ при постоянномъ числителѣ знаменатель непрерывно уменьшается. Что касается до остальныхъ трехъ тригонометрическихъ величинъ, именно $\cos y$, $\operatorname{cotg} y$ и $\operatorname{cosec} y$, то ихъ значенія непрерывно уменьшаются, такъ какъ у $\cos y = \frac{ON}{OP}$, при постоянномъ знаменателѣ,

числитель непрерывно уменьшается; у $\operatorname{cotg} y = \frac{ON}{PN}$ числитель непрерывно уменьшается, знаменатель же увеличивается, а у $\operatorname{cosec} y = \frac{OP}{PN}$, при постоянномъ числителѣ, знаменатель непрерывно увеличивается.

2. Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ при измѣненіи угла отъ 90° *до* 180°.

При увеличеніи угла y отъ 90° до 180° $\sin y = \frac{P'N'}{OP'}$, оставаясь положительною величиною, уменьшается, потому что $P'N'$, при неизмѣнномъ разстояніи P' отъ O, уменьшается. При тѣхъ же измѣненіяхъ угла $\cos y = -\frac{ON'}{OP'}$, будучи отрицательнымъ, численно увеличивается съ увеличеніемъ ON'. Что касается до $\operatorname{tg} y = -\frac{P'N'}{ON'}$, то онъ, оставаясь отрицательнымъ, численно уменьшается при увеличеніи угла y отъ 90° до 180°, такъ какъ числитель уменьшается, а знаменатель увеличивается.



Замѣтимъ при этомъ, что при непрерывномъ измѣненіи угла отъ 0° до 180° $\operatorname{tg} y$ для всѣхъ угловъ до 90° остается положительнымъ, достигая значенія ∞ при $y = 90°$. Затѣмъ, при безконечно маломъ увеличеніи угла, $\operatorname{tg} y$ дѣлаетъ скачокъ и изъ безконечно большаго положительнаго становится безконечно большимъ отрицательнымъ; этотъ скачокъ называется разрывомъ $\operatorname{tg} y$. Если подходить къ 90° отъ 0°, то $\operatorname{tg} 90° = +\infty$; если же подходить къ 90° отъ 180°, то $\operatorname{tg} 90° = -\infty$. Величина $\operatorname{tg} y$ при $y = 90°$ имѣетъ два значенія $\pm\infty$. Для практическихъ цѣлей, которыми ограничивается настоящая первая часть прямолинейной тригонометріи, знакъ безконечности не имѣетъ значенія, потому что ни положительную безконечность, ни отрицательную нельзя вычислить, и если въ задачѣ придется опредѣлить

уголъ по его тангенсу, то въ случаѣ прямого угла его тангенсъ не можетъ быть заданъ числомъ, а только знакомъ ∞; поэтому, если въ задачѣ дано выраженіе $\operatorname{tg} y = \pm\infty$; то въ предѣлахъ 180° для угла y получается одно и только одно значеніе: $y = 90^\circ$.

Если черезъ ε назовемъ малую положительную величину, способную уменьшаться до нуля, то

$$\text{пред. } \operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon) = +\infty$$
$$\text{пред. } \operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon) = -\infty$$

Подобный же разрывъ отъ $+\infty$ къ $-\infty$ имѣетъ мѣсто у $\sec y$ для $y = 90^\circ$.

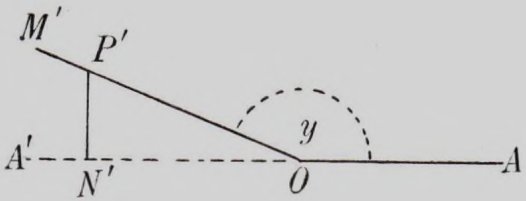
Остальныя тригонометрическія величины измѣняются слѣдующимъ образомъ при измѣненіи угла y отъ 90° до 180°:

$\operatorname{cotg} y = -\dfrac{ON'}{P'N'}$ остается все время отрицательнымъ и численно увеличивается, такъ какъ числитель увеличивается, а знаменатель уменьшается.

$\sec x = -\dfrac{OP'}{ON'}$ остается все время отрицательнымъ и численно уменьшается, такъ какъ знаменатель увеличивается.

$\operatorname{cosec} x = \dfrac{OP'}{P'N'}$ остается все время положительнымъ и численно увеличивается, такъ какъ знаменатель уменьшается.

Разсмотримъ затѣмъ тригонометрическія величины угла въ 180°.



Предположимъ, что уголъ y, постепенно увеличиваясь, доходитъ до 180°; перпендикуляръ $P'N'$, при неизмѣнномъ разстояніи точки P' отъ O, будетъ постепенно умень-

шаться и исчезнетъ при $y = 180°$; при этомъ OP' совмѣстится съ ON' и слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \sin 180° &= \frac{0}{OP'} = 0 \\ \cos 180° &= -\frac{ON'}{OP'} = -\frac{1}{1} = -1 \\ \operatorname{tg} 180° &= -\frac{0}{ON'} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Далѣе имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec} 180° &= \frac{1}{\sin 180°} = \frac{1}{0} = \infty \\ \sec 180° &= \frac{1}{\cos 180°} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \operatorname{cotg} 180° &= \frac{1}{\operatorname{tg} 180°} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

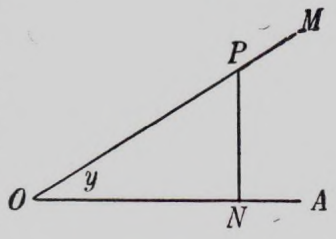
Сведемъ полученные выводы.

При измѣненіи угла y:

	Отъ 0° до 90°	отъ 90° до 180°
$\sin y$	измѣняется: отъ 0 до $+1$ остается: положит.	отъ $+1$ до 0 положит.
$\cos y$	измѣняется: отъ $+1$ до 0 остается: положит.	отъ 0 до -1 отрицат.
$\operatorname{tg} y$	измѣняется: отъ 0 до $+\infty$ остается: полож.	отъ $-\infty$ до 0 отрицат.
$\operatorname{cotg} y$	измѣняется: отъ $+\infty$ до 0 остается: положит.	отъ 0 до $-\infty$ отрицат.
$\sec y$	измѣняется: отъ $+1$ до $+\infty$ остается: положит.	отъ $-\infty$ до -1 отрицат.
$\operatorname{cosec} y$	измѣняется: отъ $+\infty$ до $+1$ остается: положит.	отъ $+1$ до $+\infty$ положит.

§ 10. Соотношенія между тригонометрическими величинами двухъ дополнительныхъ угловъ. Пусть $y = AOM$ будетъ нѣкоторый острый уголъ. На сторонѣ OM

выберемъ произвольную точку P и проведемъ $PN \perp OA$; мы получимъ прямоугольный треугольникъ ONP, у котораго острые углы равны y и $90^\circ - y$. Два положительныхъ угла, сумма которыхъ равна 90°, называются *дополнительными*.



Изъ опредѣленія тригонометрическихъ величинъ угловъ AOM и NPO имѣемъ:

$$\frac{ON}{OP} = \cos y = \sin(90^\circ - y); \qquad \frac{PN}{OP} = \sin y = \cos(90^\circ - y)$$

$$\frac{ON}{PN} = \operatorname{cotg} y = \operatorname{tg}(90^\circ - y); \qquad \frac{PN}{ON} = \operatorname{tg} y = \operatorname{cotg}(90^\circ - y)$$

$$\frac{OP}{PN} = \operatorname{cosec} y = \sec(90^\circ - y); \qquad \frac{OP}{ON} = \sec y = \operatorname{cosec}(90^\circ - y)$$

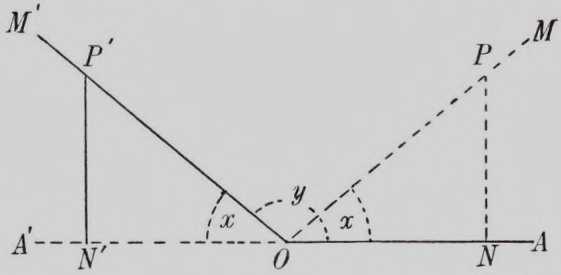
Отсюда выводимъ слѣдующія соотношенія между тригонометрическими величинами остраго угла y и его дополненія $90^\circ - y$:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(90^\circ - y) = \cos y; & \cos(90^\circ - y) = \sin y \\ \operatorname{tg}(90^\circ - y) = \operatorname{cotg} y; & \operatorname{cotg}(90^\circ - y) = \operatorname{tg} y \\ \sec(90^\circ - y) = \operatorname{cosec} y; & \operatorname{cosec}(90^\circ - y) = \sec y \end{array}\right\} \ldots (16)$$

Итакъ: синусъ, тангенсъ и секансъ дополнительнаго угла $90^\circ - y$ равны соотвѣтственно косинусу, котангенсу и косекансу даннаго угла y, и наоборотъ: косинусъ, котангенсъ и косекансъ дополнительнаго угла $90^\circ - y$ равны синусу, тангенсу и секансу даннаго угла y. Синусъ, тангенсъ и секансъ называются *основными* тригонометрическими величинами, а косинусъ, котангенсъ и косекансъ — *дополнительными*.

§ 11. Соотношенія между тригонометрическими величинами двухъ пополнительныхъ угловъ. *Пополнительными* называются такіе положительные углы, сумма которыхъ равна 180°.

Пусть $y = AOM'$ будетъ нѣкоторый тупой уголъ, а $x = A'OM'$ ему пополнительный: $x + y = 180^\circ$, откуда $y = 180^\circ - x$. Отложимъ отъ основной стороны OA уголъ $AOM = x$ и на вторыхъ сторонахъ угловъ y и x выберемъ двѣ точки P' и P на произвольныхъ, но равныхъ разстояніяхъ отъ O и опустимъ изъ нихъ перпендикуляры $P'N'$



и PN на AOA'; они пересѣкутъ основную линію и ея продолженіе въ точкахъ N' и N. Мы имѣемъ (3):

$$\sin y = \sin(180^\circ - x) = \frac{P'N'}{OP'} \text{ и } \sin x = \frac{PN}{OP}$$

$$\cos y = \cos(180^\circ - x) = -\frac{ON'}{OP'} \text{ и } \cos x = \frac{ON}{OP}$$

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\frac{P'N'}{ON'} \text{ и } \operatorname{tg} x = \frac{PN}{ON}$$

$$\operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg}(180^\circ - x) = -\frac{ON'}{P'N'} \text{ и } \operatorname{cotg} x = \frac{ON}{PN}$$

$$\sec y = \sec(180^\circ - x) = -\frac{OP'}{ON'} \text{ и } \sec x = \frac{OP}{ON}$$

$$\operatorname{cosec} y = \operatorname{cosec}(180^\circ - x) = \frac{OP'}{P'N'} \text{ и } \operatorname{cosec} x = \frac{OP}{PN}$$

Такъ какъ $OP' = OP$ и $\angle M'OA' = \angle MOA$, то прямоугольные треугольники $ON'P'$ и ONP равны; изъ равенства ихъ мы имѣемъ:

$$P'N' = PN \quad \text{и} \quad ON' = ON,$$

вслѣдствіе этого:

$$\sin(180^\circ - x) = \frac{P'N'}{OP'} = \frac{PN}{OP} = \sin x$$

$$\cos(180^\circ - x) = -\frac{ON'}{OP'} = -\frac{ON}{OP} = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\frac{P'N'}{ON'} = -\frac{PN}{ON} = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cotg}(180^\circ - x) = -\frac{ON'}{P'N'} = -\frac{ON}{PN} = -\operatorname{cotg} x$$

$$\sec(180^\circ - x) = -\frac{OP'}{ON'} = -\frac{OP}{ON} = -\sec x$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ - x) = \frac{OP'}{P'N'} = \frac{OP}{PN} = \operatorname{cosec} x$$

отсюда выводимъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(180^\circ - x) = +\sin x; & \cos(180^\circ - x) = -\cos x \\ \operatorname{tg}(180^\circ - x) = -\operatorname{tg} x; & \operatorname{cotg}(180^\circ - x) = -\operatorname{cotg} x \\ \sec(180^\circ - x) = -\sec x; & \operatorname{cosec}(180^\circ - x) = +\operatorname{cosec} x \end{array}\right\} \ldots (17)$$

Иное выраженіе тригонометрическихъ величинъ тупыхъ угловъ. Углы II-й четверти $180^\circ - x$ могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$180^\circ - x = 90^\circ + (90^\circ - x) = 90^\circ + v$$

гдѣ

$$v = 90^\circ - x \quad \text{и} \quad x = 90^\circ - v$$

Подставимъ въ первыя части предыдущихъ формулъ $90^\circ + v$ вмѣсто $180^\circ - x$, а во вторыя $90^\circ - v$ вмѣсто x и вспомнимъ, что для дополнительныхъ угловъ основныя тригонометрическія величины переходятъ въ дополнительныя и обратно (§ 10); тогда мы получимъ:

$$\begin{array}{ll} \sin(90^\circ + v) = + & \sin 90^\circ - v) = +\cos v \\ \cos(90^\circ + v) = - & \cos(90^\circ - v) = -\sin v \\ \operatorname{tg}(90^\circ + v) = - & \operatorname{tg}(90^\circ - v) = -\operatorname{cotg} v \\ \operatorname{cotg}(90^\circ + v) = - & \operatorname{cotg}(90^\circ - v) = -\operatorname{tg} v \\ \sec(90^\circ + v) = - & \sec(90^\circ - v) = -\operatorname{cosec} v \\ \operatorname{cosec}(90^\circ + v) = + & \operatorname{cosec}(90^\circ - v) = +\sec v \end{array}$$

Отсюда выводимъ новыя формулы для тригонометрическихъ величинъ угловъ второй четверти:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(90^\circ + v) = +\cos v; & \cos(90^\circ + v) = -\sin v \\ \operatorname{tg}(90^\circ + v) = -\operatorname{cotg} v; & \operatorname{cotg}(90^\circ + v) = -\operatorname{tg} v \\ \sec(90^\circ + v) = -\operatorname{cosec} v; & \operatorname{cosec}(90^\circ + v) = +\sec v \end{array}\right\} \ldots (18)$$

Тригонометрическія величины тупыхъ угловъ, представленныя въ этомъ видѣ, являются для вычисленій болѣе удобными, чѣмъ формулы (17).

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Тригонометрическія таблицы.

§ 12. Цѣль составленія тригонометрическихъ таблицъ. Для вычисленія элементовъ треугольниковъ и для рѣшенія тригонометрическихъ задачъ необходимо знать значенія тригонометрическихъ величинъ для какого угодно угла; съ этою цѣлью составляютъ такъ-называемыя «тригонометрическія таблицы». Тригонометрическія таблицы бываютъ двухъ родовъ: 1) таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ и 2) таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.

Таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ рѣдко употребляются для практическихъ цѣлей. Причина заключается въ томъ, что тригонометрическія величины вообще суть несоизмѣримыя числа; вычисленіе же съ несоизмѣримыми числами вызываетъ большія выкладки, являющіяся неудобными во всѣхъ случаяхъ *).

Таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ представляютъ болѣе удобствъ для вычисленій. Въ нихъ даны значенія логариѳмовъ тригонометрическихъ вели-

*) Устройство таблицъ логариѳмовъ натуральныхъ чиселъ и пользованіе ими предполагается извѣстнымъ.

чинъ для извѣстныхъ равноотстоящихъ значеній остраго угла, называемаго аргументомъ.

Примѣчаніе. Тригонометрическими величинами выражается отношеніе различныхъ частей прямоугольнаго треугольника; поэтому таблица тригонометрическихъ величинъ называется также «таблицею треугольниковъ».

Какъ выше замѣчено, тригонометрическія величины, за малыми исключеніями, суть несоизмѣримыя числа. Значеніе несоизмѣримыхъ чиселъ дается въ видѣ десятичной дроби съ нѣкоторымъ приближеніемъ, опредѣляемымъ числомъ удержанныхъ десятичныхъ знаковъ (съ избыткомъ или недостаткомъ). Напримѣръ, $\sqrt{2}$ можетъ быть представленъ съ различною степенью приближенія слѣдующими числами:

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 и т. д.

Въ рѣдкихъ случаяхъ приближенное значеніе несоизмѣримыхъ чиселъ представляется въ видѣ отношенія цѣлыхъ чиселъ; напримѣръ, значеніе числа $\pi = 3{,}14159...$ (отношеніе окружности къ діаметру) представляется иногда въ видѣ подходящихъ дробей: $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ и т. д.

Въ зависимости отъ желаемой степени приближенія составляютъ таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ съ большимъ или меньшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ. Въ настоящее время встрѣчаются въ употребленіи таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ съ 3, 4, 5, 6, 7 и 8 десятичными знаками. Увеличивая число десятичныхъ знаковъ въ таблицѣ логариѳмовъ, мы можемъ достигнуть желаемой степени приближенія и производить вычисленія съ желаемою степенью точности.

Существующія таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ составлены по таблицамъ Адріана Влака *), вычислившаго ихъ съ десятью десятичными зна-

*) Trigonometria artificialis, sive magnus canon triangulorum logarithmicus, ab *Adriano Vlacco* constructus, cui accedunt Henrici *Briggii* chiliades logarithmorum 20. Goudae. 1633.

ками. Для практическихъ цѣлей, встрѣчающихся въ межеваніи, инженерныхъ и техническихъ наукахъ и проч., вполнѣ достаточны пятизначныя таблицы, а во многихъ случаяхъ даже и четырехзначныя таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 13. Устройство тригонометрическихъ таблицъ. Въ тригонометрическихъ таблицахъ даны логариѳмы тригонометрическихъ величинъ для равноотстоящихъ значеній острыхъ угловъ. Равноотстоящія значенія угловъ выбираются такимъ образомъ, чтобы разности между двумя рядомъ стоящими логариѳмами тригонометрическихъ величинъ могли быть разсматриваемы, какъ пропорціональныя разностямъ между соотвѣтствующими углами.

Въ тригонометрическихъ таблицахъ обыкновенно даются логариѳмы синуса, косинуса, тангенса и котангенса, такъ какъ логариѳмы косеканса и секанса получаются, какъ дополненія до нуля логариѳмовъ синуса и косинуса, но въ новѣйшихъ таблицахъ, какъ напр., Albrecht, Hoüel и др., предназначенныхъ для обширныхъ практическихъ цѣлей, даны логариѳмы всѣхъ шести тригонометрическихъ величинъ. Опытомъ дознано, что вычисленія значительно упрощаются, если тригонометрическое выраженіе, подлежащее вычисленію, представлено въ видѣ произведенія, а не дроби. Напр., выраженіе

$$x = m \frac{\sin a \operatorname{tg} b}{\sin (a + b) \cos c}$$

можетъ быть представлено въ видѣ произведенія:

$$x = m \sin a \operatorname{tg} b \operatorname{cosec} (a + b) \sec c$$

и въ послѣднемъ случаѣ $\operatorname{Log} x$ получается какъ сумма $\operatorname{Log} m$ и четырехъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ. Вычисленіе сводится къ сложенію логариѳмовъ, а не къ ихъ вычитанію. Производить вычисленіе въ умѣ, напр., $\operatorname{Log} \sin (a + b)$ и одновременно брать его дополненіе для полученія $\operatorname{Log} \operatorname{cosec} (a + b)$ весьма неудобно. Всякое упрощеніе вычисленій устраняетъ случайныя ошибки или такъ называемые «промахи» вычисленія. По изложенной

причинѣ въ изданныхъ нами «Таблицахъ логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками» даны логариѳмы всѣхъ шести тригонометрическихъ величинъ.

Въ табл. II нашихъ логариѳмовъ *), на стр. 41—85, даны логариѳмы всѣхъ тригонометрическихъ величинъ для каждой минуты въ дугѣ на всѣ градусы первой четверти окружности.

Вверху таблицы помѣщены градусы отъ 0° до 44°, а внизу, считая страницы въ обратномъ порядкѣ, отъ 45° до 89°. Для градусовъ, находящихся вверху таблицъ, минуты считаются по лѣвымъ столбцамъ, а для градусовъ, находящихся внизу таблицы, — по правымъ; въ обоихъ случаяхъ минуты идутъ въ возрастающемъ порядкѣ.

Логариѳмы тригонометрическихъ величинъ помѣщены въ вертикальныхъ столбцахъ, озаглавленныхъ для краткости соотвѣтственными тригонометрическими величинами безъ знаковъ Log, а просто: Sin., Cosec., Tang., Cotg., Sec. и Cos. Эти обозначенія помѣщены вверху и внизу въ горизонтальныхъ строкахъ. Если данное число градусовъ находится наверху страницы, то пользуются верхними заголовками; если же внизу, то нижними.

Каждая страница раздѣлена жирными вертикальными полосками на три отдѣленія. Въ каждомъ отдѣленіи, между столбцами, числа которыхъ являются взаимными логариѳмическими дополненіями, даны общія разности логариѳмовъ подъ буквою *D;* онѣ даны начиная съ 3°, такъ какъ до 3° онѣ велики и быстро уменьшаются съ увеличеніемъ угла; рядомъ стоящія разности настолько отличаются одна отъ другой, что нельзя принять ихъ за постоянныя или пропорціональныя измѣненію аргумента, а потому вести вычисленіе $\log \sin x$ и $\log \operatorname{tg} x$ для угловъ меньше 3° обыкновеннымъ путемъ невозможно. Для вычисленія $\log \sin x$ и $\log \operatorname{tg} x$ для малыхъ угловъ ($< 3°$) слѣдуетъ обратиться къ таблицѣ

*) Таблицы логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками, съ приложеніемъ другихъ таблицъ, упрощающихъ вычисленія. Изданіе стереотипное. Составилъ Профессоръ С. Глазенапъ.

натуральныхъ чиселъ (Табл. I нашихъ логариѳмовъ). Правила и примѣры вычисленія логариѳмовъ этихъ величинъ для малыхъ угловъ изложены во Введеніи къ нашимъ «Таблицамъ», а также во II-й части настоящей Тригонометріи.

§ 14. Употребленіе тригонометрическихъ таблицъ.

1. Данъ уголъ, найти логариѳмы его тригонометрическихъ величинъ.

25°

′	Sin.	D.	Cosec.	Tang.	D.	Cotg.	Sec.	D.	Cos.	′
0	9.62595	27	0.37405	9.66867	33	0.33133	0.04272	6	9.95728	60
1	9.62622	27	0.37378	9.66900	33	0.33100	0.04278	6	9.95722	59
2	9.62649	27	0.37351	9.66933	33	0.33067	0.04284	6	9.95716	58
3	9.62676	27	0.37324	9 66966	33	0.33034	0.04290	6	9.95710	57
4	9.62703	27	0.37297	9.66999	33	0.33001	0.04296	6	9.95704	56
5	9.62730	27	0.37270	9.67032	33	0.32968	0.04302	6	9.95698	55
6	9.62757	27	0.37243	9.67065	33	0.32935	0.04308	6	9.95692	54
7	9.62784	27	0.37216	9.67098	33	0.32902	0.04314	6	9.95686	53
8	9.62811	27	0.37189	9.67131	33	0.32869	0 04320	6	0.95680	52
9	9.62838	27	0.37162	9.67163	32	0.32837	0.04326	6	9.95674	51
10	9.62865	27	0.37135	9.67196	33	0.32804	0.04332	5	9.95668	50
11	9.62892	26	0.37108	9.67229	33	0.32771	0.04337	6	9.95663	49
12	9.62918	27	0.37082	9.67262	33	0.32738	0 04343	6	9.95657	48
13	9.62945	27	0.37055	9.67295	32	0.32705	0.04349	6	9.95651	47
14	9.62972	27	0.37028	9.67327	33	0.32673	0.04355	6	9.95645	46
15	9.62999	27	0.37001	9.67360	33	0.32640	0.04361	6	9.95639	45
16	9.63026	26	0.36974	9.67393	33	0.32607	0.04367	6	9.95633	44
17	9.63052	27	0.36948	9.67426	32	0.32574	0.04373	6	9.95627	43
18	9.63079	27	0.36921	9.67458	33	0.32542	0.04379	6	9.95621	42
19	9.63106	27	0.36894	9.67491	33	0.32509	0.04385	6	9.95615	41
20	9.63133	26	0.36867	9.67524	32	0.32476	0.04391	6	9.95609	40
21	9.63159	27	0.36841	9.67556	33	0.32444	0.04397	6	9.95603	39
22	9.63186	27	0.36814	9.67589	33	0.32411	0.04403	6	9.95597	38
23	9.63213	26	0.36787	9.67622	32	0.32378	0.04409	6	9.95591	37
24	9.63239	27	0.36761	9.67654	33	0.32346	0.04415	6	9.95585	36
25	9.63266	26	0.36734	9.67687	32	0.32313	0.04421	6	9.95579	35
26	9.63292	27	0.36708	9.67719	33	0.32281	0.04427	6	9.95573	34
27	9.63319	26	0.36681	9.67752	33	0.32248	0.04433	6	9.95567	33
28	9.63345	27	0.36655	9.67785	32	0.32215	0.04439	6	9.95561	32
29	9.63372	26	0.36628	9.67817	33	0.32183	0.04445	6	9.95555	31
30	9.63398	27	0.36602	9.67850	32	0.32150	0.04451	6	9.95549	30
′	Cos.	D.	Sec.	Cotg.	D.	Tang.	Cosec.	D.	Sin.	′

Part. prop.		
″	27	33
6	2.7	3.3
7	3.2	3.9
8	3.6	4.4
9	4.1	5.0
10	4.5	5.5
20	9.0	11.0
30	13.5	16.5
40	18.0	22.0
50	22.5	27.5

Part. prop.		
″	5	6
6	0.5	0.6
7	0.6	0.7
8	0.7	0.8
9	0.8	0.9
10	0.8	1.0
20	1.7	2.0
30	2.5	3.0
40	3.3	4.0
50	4.2	5.0

64°

Пріисканіе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ даннаго угла производится въ общемъ такъ же, какъ и логариѳмовъ данныхъ чиселъ, о чемъ излагается въ курсѣ алгебры. Различіе заключается только въ томъ, что Log cos y, Log cotg y, и Log cosec y уменьшаются съ увеличеніемъ угловъ отъ 0° до 90°; поэтому поправка табличныхъ логариѳмовъ за секунды является отрицатель-

25°

′	Sin.	D.	Cosec.	Tang.	D.	Cotg.	Sec.	D.	Cos.	′
30	9.63398		0.36602	9.67850		0.32150	0.04451		9.95549	30
31	9.63425	27	0.36575	9.67882	32	0.32118	0.04457	6	9.95543	29
32	9.63451	26	0.36549	9.67915	33	0.32085	0.04463	6	9.95537	28
33	9.63478	27	0.36522	9.67947	32	0.32053	0.04469	6	9.95531	27
34	9.63504	26	0.36496	9.67980	33	0.32020	0.04475	6	9.95525	26
		27			32					
35	9.63531		0.36469	9.68012		0.31988	0.04481		9.95519	25
36	9.63557	26	0.36443	9.68044	32	0.31956	0.04487	6	9.95513	24
37	9.63583	26	0.36417	9.68077	33	0.31923	0.04493	6	9.95507	23
38	9.63610	27	0.36390	9 68109	32	0.31891	0.04500	7	9.95500	22
39	9.63636	26	0.36364	9.68142	33	0.31858	0.04506	6	9.95494	21
		26			32			6		
40	9.63662		0.36338	9.68174		0.31826	0.04512		9.95488	20
41	9.63689	27	0.36311	9.68206	32	0.31794	0.04518	6	9.95482	19
42	9.63715	26	0.36285	9.68239	33	0.31761	0.04524	6	9.95476	18
43	9.63741	26	0.36259	9.68271	32	0.31729	0.04530	6	9.95470	17
44	9.63767	26	0.36233	9.68303	32	0.31697	0.04536	6	9.95464	16
		27			33			6		
45	9.63794		0.36206	9.68336		0.31664	0.04542		9.95458	15
46	9.63820	26	0.36180	9.68368	32	0.31632	0.04548	6	9.95452	14
47	9.63846	26	0.36154	9.68400	32	0.31600	0.04554	6	9.95446	13
48	9.63872	26	0.36128	9.68432	32	0.31568	0.04560	6	9.95440	12
49	9.63898	26	0.36102	9.68465	33	0.31535	0.04566	6	9.95434	11
					32			7		
50	9.63924		0.36076	9.68497		0.31503	0 04573		9.95427	10
51	9.63950	26	0.36050	9.68529	32	0.31471	0.04579	6	9.95421	9
52	9.63976	26	0.36024	9.68561	32	0.31439	0.04585	6	9.95415	8
53	9.64002	26	0.35998	9.68593	32	0.31407	0.04591	6	9.95409	7
54	9.64028	26	0.35972	9.68626	33	0.31374	0.04597	6	9.95403	6
					32					
55	9.64054	26	0.35946	9.68658		0.31342	0.04603	6	9.95397	5
56	9.64080	26	0.35920	9.68690	32	0.31310	0.04609	7	9.95391	4
57	9.64106	26	0.35894	9.68722	32	0.31278	0.04616	6	9.95384	3
58	9.64132	26	0.35868	9.68754	32	0.31246	0.04622	6	9.95378	2
59	9.64158	26	0.35842	9.68786	32	0.31214	0.04628	6	9.95372	1
60	9.64184		0.35816	9.68818		0.31182	0.04634		9 95366	0
′	Cos.	D.	Sec.	Cotg.	D.	Tang.	Cosec.	D.	Sin.	′

Part. prop.		
″	26	32
6	2.6	3.2
7	3.0	3.7
8	3.5	4.3
9	3.9	4.8
10	4.3	5.3
20	8.7	10.7
30	13.0	16.0
40	17.3	21.3
50	21.7	26.7

64°

ною, а не положительною; ее слѣдуетъ вычитать изъ табличнаго логариѳма, а не придавать къ нему.

Здѣсь приведена одна страница изъ нашихъ пятизначныхъ логариѳмовъ*). Страницу, на которой даны логариѳмы всѣхъ тригонометрическихъ величинъ угла $y = 25°$, мы выбрали произвольно; все, что излагается относительно этой страницы, примѣняется буквально ко всѣмъ другимъ, за исключеніемъ страницъ, содержащихъ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ первыхъ трехъ градусовъ; о нихъ изложено во II-й части настоящей тригонометріи.

Примѣръ 1. Пріискать Log sin 25°45′42″. Въ табл. II (стр. 66, нашихъ логариѳмовъ, а также въ прилагаемой таблицѣ на 25 стр.) мы находимъ Log sin 25°45′ = 9,63794 при табличной разности $D = +26$, соотвѣтствующей измѣненію угла на 1′ или 60″. Къ приведенному табличному логариѳму слѣдуетъ придать поправку z на 42″, опредѣляемую изъ пропорціи:

$$z : 26 = 42'' : 60''$$

откуда

$$z = \frac{26 \times 42}{60} = 18{,}2$$

Табличная разность содержитъ 26 единицъ пятаго десятичнаго знака; поэтому и 18,2 выражены въ тѣхъ же единицахъ пятаго десятичнаго знака; послѣ запятой стоитъ шестой десятичный знакъ 2, который слѣдуетъ отбросить, такъ какъ въ таблицѣ мантисса содержитъ только пять десятичныхъ знаковъ. При отбрасываніи нѣкотораго десятичнаго знака придерживаются установленнаго въ математикѣ правила, а именно: если отбрасываемый десятичный знакъ меньше 5, то удерживаемый знакъ остается безъ измѣненія, а если онъ равенъ или больше 5, то удерживаемый знакъ увеличивается на 1.

Искомый логариѳмъ будетъ:

Log sin 25°45′	=	9,63794
поправка на 42″		+18
Log sin 25°45′42″	=	9,63812

*) Примѣнительно къ формату настоящей Тригонометріи пришлось таблицу нашихъ Логариѳмовъ размѣстить на двѣ страницы.

Величина поправки $z = \frac{26 \times 42}{60}$, представленная въ видѣ произведенія $\left(\frac{26}{60}\right) \times 42$, можетъ быть получена также съ помощью вспомогательной таблички, помѣщенной на поляхъ страницы, съ заголовкомъ 26; эта табличка, какъ и всѣ другія, помѣщенныя на поляхъ, составлена такимъ образомъ, что содержитъ величины, кратныя числа, помѣщеннаго въ заголовкѣ таблички, дѣленнаго на 60, въ нашемъ случаѣ $\frac{26}{60}$. Аргументъ табличекъ начинается съ 6, а не съ 1, такъ какъ произведенія на 1, 2, 3, 4 и 5 получаются отъ дѣленія на 10 произведеній, полученныхъ отъ помноженія $\frac{26}{60}$ на 10, 20, 30, 40 и 50. Произведеніе же на 60 является лишнимъ: оно соотвѣтствуетъ увеличенію угла на цѣлую минуту, и искомый логариѳмъ находится въ слѣдующей строкѣ таблицы. Изъ вспомогательной таблички мы выписываемъ:

поправка	на	40″	равна	17,3
»	»	2	»	0,9
»	»	42	»	18,2 или 18

Пользованіе этими табличками значительно упрощаетъ вычисленіе: при опредѣленіи поправки логариѳма за секунды не требуется составленія пропорціи и ея рѣшенія.

При навыкѣ вычисленіе поправки табличнаго логариѳма на данное число секундъ производится въ умѣ, и въ умѣ же поправка придается къ табличному логариѳму.

Примѣръ 2. Пріискать Log cos 64°31′27″. Изъ приведенной на стр. 26 таблицы мы выписываемъ:

Log cos 64° 31′	= 9,63372
поправка на 27″ =	— 12
Log cos 64° 31′ 27″ =	9,63360

$D = -27$

Поправка:

на 20″ · · · — 9,0

на 7 · · · — 3,2

на 27″ · · · — 12,2

или — 12

Примѣръ 3. Пріискать Log tg 25° 40′ 54″. Изъ таблицы (стр. 27) выписываемъ:

Log tg 25° 40′ = 9,68174	$D = +32$
поправка 54″ = + 29	Поправка:
Log tg 25° 40′ 54″ = 9,68203	на 50″ · · · +26,7
	на 4 · · · + 2,1
	на 54 · · · +28,8
	или + 29

Примѣръ 4. Пріискать Log cotg 25° 33′ 12″. Изъ таблицы (стр. 27) выписываемъ:

Log cotg 25° 33′ = 0,32053	$D = -33$
поправка на 12″ = — 7	Поправка:
Log cotg 25° 33′ 12″ = 0,32046	на 10″ · · · — 5,5
	на 2″ · · · — 1,1
	на 12″ · · · — 6,6
	или — 7

Примѣръ 5. Пріискать Log sec 64° 15′ 38″. Изъ таблицы (стр. 27) выписываемъ:

Log sec 64° 15′ = 0,36206	$D = +27$
поправка 38″ = + 17	Поправка:
Log sec 64° 15′ 38″ = 0,36223	на 30″ · · · +13,5
	на 8″ · · · + 3,6
	на 38″ · · · +17,1
	или + 17

Примѣръ 6. Пріискать Log cosec 64° 52′ 32″. Изъ таблицы (стр. 26) выписываемъ:

Log cosec 64° 52′ = 0,04320	$D = -6$
поправка на 32″ = — 3	Поправка:
Log cosec 64° 52′ 32″ = 0,04317	на 30″ · · · — 3,0
	на 2″ · · · — 0,2
	на 32″ · · · — 3,2
	или — 3

Если данный уголъ тупой, то пріисканіе логариѳмовъ его тригонометрическихъ величинъ сводится къ пріисканію логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ остраго

угла по правиламъ, изложеннымъ въ § 11, формулы (18). Пояснимъ примѣромъ:

Примѣръ 7. Пріискать $\mathrm{Log\,tg}\,115^\circ 45' 35''$. Мы имѣемъ $y = 115^\circ 45' 35'' = 90^\circ + v = 90^\circ + 25^\circ 45' 35''$,
откуда $v = 25^\circ 45' 35''$. По форм. (18) имѣемъ:

$$\mathrm{tg}\,(90^\circ + v) = -\,\mathrm{cotg}\,v$$

Слѣдовательно, для пріисканія $\mathrm{Log\,tg}\,(90^\circ + v)$ мы пріискиваемъ $\mathrm{Log\,cotg}\,v$ и затѣмъ особымъ знакомъ должны отмѣтить, что искомый тангенсъ есть отрицательное число. У отрицательнаго числа, какъ извѣстно, нѣтъ логариѳма; поэтому, при вычисленіи отрицательныхъ чиселъ съ помощью логариѳмовъ вычисленія производятся такъ же, какъ съ положительными числами, но къ логариѳмамъ приставляется значокъ «*n*» (négatif), показывающій, что число даннаго логариѳма отрицательное.

Въ нашемъ примѣрѣ $v = 25^\circ 45' 35''$.

$\mathrm{Log\,cotg}\,25^\circ 45'$ $= 0{,}31664$	$D = -32$
поправка на $35''$ -19	Поправка:
$\mathrm{Log\,cotg}\,25^\circ 45' 35'' = 0{,}31645$	на $30'' \cdots -16{,}0$
	на $5 \cdots -2{,}7$
	на $35'' \cdots -18{,}7$
	или -19

а потому:

$$\mathrm{Log\,tg}\,115^\circ 45' 35'' = \mathrm{Log}\,[-\,\mathrm{cotg}\,25^\circ 45' 35''] = 0{,}31645\,n.$$

Примѣръ 8. Пріискать $\mathrm{Log\,cos}\,115^\circ 7' 54''$. По форм. (18) для $\cos\,(90^\circ + v)$ имѣемъ:

$$\cos 115^\circ 7' 54'' = -\sin 25^\circ 7' 54''.$$

Пріискиваемъ $\mathrm{Log\,sin}\,25^\circ 7' 54''$. По таблицѣ (стр. 26) имѣемъ:

$\mathrm{Log\,sin}\,25^\circ 7'$ $= 9{,}62784$	$D = +27$
поправка на $54''$ $= +24$	Поправка:
$\mathrm{Log\,sin}\,25^\circ 7' 54'' = 9{,}62808$	на $50'' \cdots +22{,}5$
	на $4'' \cdots +1{,}8$
	на $54'' \cdots +24{,}3$
	или $+24$

Поэтому: $\mathrm{Log\,cos}\,115^\circ 7' 54'' = 9{,}62808\,n.$

2. Рѣшеніе обратной задачи: данъ логариѳмъ одной изъ тригонометрическихъ величинъ; найти значеніе угла.

Обратная задача имѣетъ одно рѣшеніе только въ томъ случаѣ, если даны $\cos y$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{cotg} y$ или $\sec y$; но если даны $\sin y$ или $\operatorname{cosec} y$, то нѣкоторому $\sin y$ или $\operatorname{cosec} y$, въ предѣлахъ отъ $0°$ до $180°$, соотвѣтствуютъ два угла: y и $180° - y$. Для устраненія неопредѣленности необходимо или прямое указаніе качества угла: острый или тупой, или же одновременное заданіе, кромѣ $\sin y$ или $\operatorname{cosec} y$, еще и другой тригонометрической величины, не являющейся съ ними взаимно-обратною величиною; напримѣръ, неопредѣленности не будетъ, если заданы одновременно $\sin y$ и $\cos y$, $\operatorname{cosec} y$ и $\operatorname{tg} y$ и т. д.

Если заданный логариѳмъ тригонометрической величины помѣченъ значкомъ n, то значитъ тригонометрическая величина отрицательна. Въ томъ случаѣ, если значкомъ n отмѣченъ логариѳмъ $\cos y$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{cotg} y$ или $\sec y$, то вычисленіе ведется какъ съ положительнымъ числомъ, помня, однако, что искомый уголъ тупой; если же значкомъ n отмѣченъ $\operatorname{Log}\sin y$ или $\operatorname{Log}\operatorname{cosec} y$, то угла, соотвѣтствующаго логариѳму означенной тригонометрической величины въ предѣлахъ отъ $0°$ до $180°$ не существуетъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда логариѳмы тригонометрическихъ величинъ остраго угла увеличиваются вмѣстѣ съ увеличеніемъ угла, какъ это имѣетъ мѣсто для $\operatorname{Log}\sin y$, $\operatorname{Log}\sec y$ или $\operatorname{Log}\operatorname{tg} y$, вычисленіе производится отъ ближайшаго меньшаго логариѳма, а когда они уменьшаются вмѣстѣ съ увеличеніемъ угла, какъ у $\operatorname{Log}\cos y$, $\operatorname{Log}\operatorname{cosec} y$ и $\operatorname{Log}\operatorname{cotg} y$, — отъ ближайшаго бо̀льшаго логариѳма. Въ обоихъ случаяхъ вычисленіе ведется отъ ближайшаго меньшаго угла, и къ нему прибавляется поправка за секунды, опредѣляемая по разности между даннымъ и табличнымъ логариѳмами и по табличной разности.

Примѣръ 1. Данъ $\operatorname{Log}\sin y = 9{,}63251$, при чемъ $y < 90°$; вычислить y. Пріисканіе угла производится слѣдующимъ образомъ:

Данный $\operatorname{Log}\sin y = 9{,}63251$; $D = 27$

Ближайшій меньшій табл. $\operatorname{Log} = 9{,}63239$ для $y_0 = 25^\circ\,24'$

разность $d =$ 12

для 9,0 $\quad \Delta_1 y =$ 20″

остатокъ = 3,0

для 3,2 $\quad \Delta_2 y =$ 7″

искомый уголъ $y = 25^\circ\,24'\,27''$

Поправки на секунды $\Delta_1 y$ и $\Delta_2 y$ вычисляются по вспомогательной табличкѣ съ заголовкомъ $D = 27$; при этомъ для пріисканія десятковъ секундъ берется ближайшее меньшее произведеніе (въ нашемъ примѣрѣ 9,0), а для пріисканія секундъ — вообще ближайшее (въ нашемъ примѣрѣ 3,2).

Примѣръ 2. Данъ тотъ же $\operatorname{Log}\sin y = 9{,}63251$, что и въ первомъ примѣрѣ, но искомый уголъ тупой.

Пріисканіе тупого угла y можетъ быть произведено двоякимъ образомъ:

1) Найти острый уголъ, соотвѣтствующій данному $\operatorname{Log}\sin y = 9{,}63251$; этотъ уголъ равенъ $25^\circ 24' 27''$, и затѣмъ взять его пополненіе до 180°, именно

$$y = 180^\circ - 25^\circ 24' 27'' = 154^\circ 35' 33''$$

и 2) Пользуясь формулами (18):

$$\sin y = \sin(90^\circ + v) = +\cos v,$$

мы пріискиваемъ уголъ v, принимая данный логариѳмъ за $\operatorname{Log}\cos v$, и придаемъ найденное значеніе v къ 90°.

Данный $\operatorname{Log}\sin y = \operatorname{Log}\cos v = 9{,}63251$ $\quad D = 27$

Ближайшій бо̀льшій табл. $\operatorname{Log} = 9{,}63266$ для $v_0 = 64^\circ 35'$

разность $d =$ 15

для 13,5 $\quad \Delta_1 v =$ 30″

остатокъ . 1,5

для . . . 1,4 $\quad \Delta_2 v =$ 3

искомый уголъ $v = 64^\circ 35' 33''$

а потому $y = 90^\circ + v = 154^\circ 35' 33''$

Примѣръ 3. Данъ Log tg $y = 9{,}68352$; пріискать уголъ y.

Данный Log tg $y = 9{,}68352$ $D = 32$

Ближайшій меньшій табл. Log. $= 9{,}68336$ для $y_0 = 25°45'$

разность $d =$ 16

для 16,0 $\Delta_1 y =$ 30″

искомый уголъ $y = 25°45'30''$

Примѣръ 4. Данъ Log cos $y = 9{,}63784$; пріискать уголъ y.

Данный Log cos $y = 9{,}63784$ $D = 27$

Ближайшій большій табл. Log. $= 9{,}63794$ для $y_0 = 64°15'$

разность $d =$ 10

для 9,0 $\Delta_1 y =$ 20″

остатокъ . 1,0

для . . 0,9 $\Delta_2 y =$ 2″

искомый уголъ $y = 64°15'22''$

Примѣръ 5. Данъ Log cotg $y = 0{,}32470$; пріискать уголъ y.

Данный Log cotg $y = 0{,}32470$ $D = 32$

Ближайшій больш. табл. Log. $= 0{,}32476$ для $y_0 = 25°20'$

разность $d =$ 6

для 5,3 $\Delta_1 y =$ 10″

остатокъ . 0,7

для . . . 0,5 $\Delta_2 y =$ 1″

искомый уголъ $y = 25°20'11''$

Примѣръ 6. Данъ Log sec $y = 0{,}35962$; пріискать уголъ y.

Данный Log sec $y = 0{,}35962$ $D = 26$

Ближайшій меньш. табл. Log. $= 0{,}35946$ $y_0 = 64°\ 5'$

разность $d =$ 16

для 13,0 $\Delta_1 y =$ 30″

остатокъ . . 3,0

для . . . 3,0 $\Delta_2 y =$ 7″

искомый уголъ $y = 64°\ 5'37''$

Примѣръ 7. Данъ Log cosec $y = 0{,}04400$; пріискать уголъ y.

Данный Log cosec $y = 0{,}04400$ $D = 6$

Ближайшій большій табл. Log. $= 0{,}04403$ для $y_0 = 64°38'$

разность $d =$ 3

для 3,0 $\Delta_1 y =$ 30″

искомый уголъ $y = 64°38'30''$

Примѣръ 8. Данъ Log tg $y = 9{,}67320n$; пріискать уголъ y. Такъ какъ тангенсъ искомаго угла отрицательный, то уголъ тупой. Мы пріискиваемъ уголъ по столбцу «cotg» и найденное значеніе угла придаемъ къ 90°.

Log tg y = Log [— cotg v] $= 9{,}67320$ $D =$ 32

Ближайшій большій табл. Log. $= 9{,}67327$ $v_0 = 64°46'$

разность $d =$ 7

для 5,3 $\Delta_1 v =$ 10″

остатокъ . . 1,7

для . . . 1,6 $\Delta_2 v =$ 3″

$v = 64°46'13''$

искомый уголъ $y = 154°46'13''$

§ 15. Упражненія. Пріискать по таблицамъ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ слѣдующихъ угловъ:

1. Log sin 22°13′0″
2. Log sin 62°31′40″
3. Log sin 99°46′58″
4. Log sin 147°59′ 3″
5. Log cos 13°33′0″
6. Log cos 59°58′37″
7. Log cos 111°21′21″
8. Log cos 153°23′18″
9. Log tg 28°31′57″
10. Log tg 156° 3′25″
11. Log cotg 35°35′35″
12. Log cotg 109°52′30″
13. Log sec 15°31′16″
14. Log sec 163°15′37″
15. Log cosec 66° 7′23″
16. Log cosec 104°13′57″

Пріискать логариѳмы всѣхъ тригонометрическихъ величинъ слѣдующихъ угловъ:

17. $y = 47°47'47''$
18. $y = 123°56'\ 4''$

Пріискать углы по слѣдующимъ логариѳмамъ тригонометрическихъ величинъ и по слѣдующимъ условіямъ:

19. $\text{Log sin } y = 9{,}34750$ $\cos y > 0$
20. $\text{Log sin } y = 9{,}57831$ $\cos y < 0$
21. $\text{Log tg } y = 0{,}34578$
22. $\text{Log tg } y = 9{,}56900\ n$
23. $\text{Log cotg} y = 0{,}56890$
24. $\text{Log cotg} y = 9{,}34091$
25. $\text{Log cotg} y = 0{,}34091\ n$
26. $\text{Log sec } y = 0{,}25690$
27. $\text{Log sec } y = 0{,}56831\ n$
28. $\text{Log tg } y = 0{,}73401\ n$
29. $\text{Log cosec } y = 0{,}34758$ $\cos y > 0$
30. $\text{Log cosec } y = 0{,}09350$ $\cos y < 0$

§ 16. Точность вычисленій угловъ по логариѳмамъ тригонометрическихъ величинъ. Какъ тригонометрическія величины, такъ и ихъ логариѳмы суть вообще несоизмѣримыя числа, и даются съ извѣстнымъ приближеніемъ, опредѣляемымъ числомъ удержанныхъ десятичныхъ знаковъ; поэтому вычисленіе съ помощью тригонометрическихъ таблицъ можетъ быть производимо не съ абсолютною точностью, а только съ извѣстною степенью приближенія, зависящею отъ числа удержанныхъ десятичныхъ знаковъ данной таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ. Оцѣнимъ степень точности, получаемую при вычисленіяхъ, по пятизначнымъ таблицамъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.

Просматривая разности между рядомъ стоящими логариѳмами тригонометрическихъ величинъ, мы замѣчаемъ, что для синуса и косеканса разности для малыхъ угловъ являются большими, а затѣмъ, по мѣрѣ увеличенія угла, становятся меньше, и при достиженіи значенія 89—90° совершенно исчезаютъ. Отсюда мы заключаемъ, что вычисленіе угла по его синусу выгоднѣе для малыхъ значеній остраго угла, чѣмъ для большихъ.

Разности для $\text{Log cos } y$ измѣняются въ обратномъ порядкѣ и поэтому вычисленіе угла по его косинусу выгоднѣе для большихъ значеній острыхъ угловъ, чѣмъ для малыхъ.

Что касается до разностей логариѳмовъ тангенсовъ и котангенсовъ, то для каждой изъ этихъ величинъ онѣ измѣняются симметрично отъ 0° до 45° и отъ 45° до 90°, принимая наибольшія значенія около 0° и 90° и наимень-

шія—около 45°; онѣ не превращаются въ нуль, какъ это имѣетъ мѣсто для Log sin y и Log cos y.

Изъ изложеннаго мы заключаемъ, что вообще вычисленіе угла выгоднѣе производить по его тангенсу или котангенсу, чѣмъ по синусу или косинусу.

Наименьшая разность между двумя рядомъ лежащими Log tg y или Log cotg y имѣетъ мѣсто при $x = 45°$ и равна 0,00025 или 25 единицамъ пятаго десятичнаго знака. Такъ какъ аргументъ измѣняется на $1' = 60''$, то одна единица пятаго десятичнаго знака приходится на $\frac{60''}{25} = 2'',4$; это и есть наименьшая точность, съ которою можно вести вычисленія пятизначными логариѳмами. Вообще же она будетъ больше; напримѣръ, при разности между двумя рядомъ стоящими логариѳмами въ 30, 35 и т. д. единицъ пятаго десятичнаго знака, точность вычисленія угловъ опредѣляется отношеніемъ $\frac{60}{30} = 2'',0$; $\frac{60}{35} = 1'',7$ и т. д.

Приведенная точность вполнѣ достаточна для всѣхъ задачъ, встрѣчающихся въ прикладной геометріи, въ физическихъ и техническихъ наукахъ.

Для таблицъ шестизначныхъ логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ, при измѣненіи аргумента на $1' = 60''$, наименьшая разность будетъ въ 10 разъ больше, чѣмъ въ пятизначныхъ логариѳмахъ; поэтому точность вычисленія по шестизначнымъ логариѳмамъ равна $\frac{2'',4}{10} = 0'',24$.

Изъ теоріи логариѳмовъ, излагаемой въ курсѣ алгебры, извѣстно, что съ помощью таблицы логариѳмовъ даннаго числа десятичныхъ знаковъ можно вычислить въ искомомъ числѣ столько мѣстъ, сколько знаковъ въ мантиссѣ данной таблицы. Поэтому по пятизначнымъ логариѳмамъ можно вычислить число съ пятью мѣстами, т. е. десятки тысячъ. Примѣняя этотъ выводъ къ рѣшенію треугольниковъ, мы приходимъ къ заключенію, что стороны треугольниковъ, имѣющія въ длину не болѣе 20 верстъ или 10 000 саж., могутъ быть вычислены пятизначными логариѳмами съ

точностью до одной десятой сажени. Для полученія большей точности слѣдуетъ прибѣгать къ таблицамъ логариѳмовъ съ большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ и сообразно съ этимъ измѣрять точнѣе углы (съ точностью до $0''{,}2$). Стороны треугольника, имѣющаго въ длину двѣ версты, могутъ быть вычислены по пятизначнымъ логариѳмамъ съ точностью до 0,01 сажени. Эта точность далеко превосходитъ требованія, предъявляемыя практикою.

§ 17. Логариѳмы суммъ и разностей (Гаусса). Логариѳмическое вычисленіе можетъ быть непосредственно примѣняемо къ выраженіямъ, состоящимъ изъ двухъ или нѣсколькихъ множителей, и къ степенямъ; если же выраженіе имѣетъ видъ двучлена или многочлена, то непосредственное примѣненіе логариѳмическаго вычисленія невозможно; оно становится возможнымъ послѣ преобразованія, заключающагося въ приведеніи даннаго двучлена къ логариѳмическому виду. Для приведенія даннаго двучлена къ логариѳмическому виду прибѣгаютъ къ введенію вспомогательнаго угла. Для упрощеннаго же рѣшенія задачи Гауссъ, слѣдуя мысли Леонелли, далъ особые логариѳмы суммъ и разностей, называемые *Гауссовыми* *) логариѳмами; они основаны на приведеніи двучлена къ логариѳмическому виду съ помощью вспомогательнаго угла. По выходѣ въ свѣтъ Гауссовыхъ логариѳмовъ приведеніе двучлена къ логариѳмическому виду для вычисленій потеряло всякое значеніе.

Разсмотримъ общій случай: даны $\mathrm{Log}\, a$ и $\mathrm{Log}\, b$, при чемъ оба числа положительныя и $a > b$. Требуется вычислить $\mathrm{Log}\,(a \pm b)$, не переходя къ натуральнымъ числамъ.

1. Опредѣлимъ сначала $\mathrm{Log}\,(a + b)$. Представимъ сумму въ слѣдующемъ видѣ:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

*) *Gauss*, Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind (Zach, Monatliche Correspondenz, vol. 26, 1812, p. 498).

Положимъ:

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b}{a} \text{ или } \operatorname{cotg}^2\varphi = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots (19)$$

Это допущеніе всегда возможно, такъ какъ a и b положительныя числа; кромѣ того, тангенсъ и котангенсъ могутъ принимать всевозможныя положительныя и отрицательныя значенія. Подставивъ $\operatorname{tg}^2\varphi$ въ выраженіе суммы $a+b$, мы получимъ:

$$a+b = a(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = a\sec^2\varphi \ldots\ldots (20)$$

Отсюда получаемъ:

$$\operatorname{Log}(a+b) = \operatorname{Log} a + 2\operatorname{Log}\sec\varphi$$

или

$$\operatorname{Log}(a+b) = \operatorname{Log} a + \Sigma, \quad \text{гдѣ} \quad \Sigma = 2\operatorname{Log}\sec\varphi.$$

Такимъ образомъ получается $\operatorname{Log}(a+b)$ безъ перехода къ натуральнымъ числамъ.

Уголъ φ, опредѣляемый условіемъ (19), называется *вспомогательнымъ*.

Въ таблицѣ Гаусса по аргументу $R = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b = \operatorname{Log}\operatorname{cotg}^2\varphi$ дано значеніе $\Sigma = 2\operatorname{Log}\sec\varphi$. Подобная таблица находится въ моихъ «Таблицахъ логариѳмовъ» (Табл. III). Въ ней въ первомъ столбцѣ данъ аргументъ R; во второмъ—соотвѣтствующее значеніе величины Σ, а въ третьемъ—разность между рядомъ стоящими значеніями Σ. Съ увеличеніемъ аргумента R, величина Σ уменьшается, такъ какъ съ увеличеніемъ $\operatorname{cotg}^2\varphi$, величина $\sec^2\varphi$ уменьшается; вслѣдствіе этого всѣ разности D отрицательныя и, при вычисленіи пропорціональныхъ частей разности, послѣднія вычитаются изъ табличнаго значенія Σ.

Поясникъ употребленіе таблицы примѣромъ. Положимъ, даны $\operatorname{Log} a = 1{,}37529$ и $\operatorname{Log} b = 0{,}87461$; требуется вычислить $\operatorname{Log}(a+b)$.

Мы приводимъ вычисленіе по таблицамъ суммъ и разностей и обыкновеннымъ способомъ, вычисляя самыя числа a и b.

А. По логариѳмамъ Гаусса.

	$\mathrm{Log}\, a =$	1,37529
2.	$\Sigma = +$	0,11917
	$\mathrm{Log}\, b =$	0,87461
1.	$R =$	0,50068
3.	$\mathrm{Log}\,(a+b) =$	1,49446

Б. Обыкновеннымъ способомъ.

	$\mathrm{Log}\, a =$	1,37529
	$\mathrm{Log}\, b =$	0,87461
1.	$a =$	23,729
2.	$b =$	7,492
3.	$a+b =$	31,221
4.	$\mathrm{Log}\,(a+b) =$	1,49444

Номера, поставленные передъ строками, указываютъ на порядокъ вычисленія.

Въ первомъ случаѣ произведено только одно пріисканіе, именно по аргументу R величины Σ, а во второмъ случаѣ, когда отъ данныхъ $\mathrm{Log}\, a$ и $\mathrm{Log}\, b$ мы перешли къ натуральнымъ числамъ, пришлось произвести два пріисканія, а именно: a и b по $\mathrm{Log}\, a$ и $\mathrm{Log}\, b$ и затѣмъ по суммѣ $a+b$ пріисканіе $\mathrm{Log}\,(a+b)$. Такъ какъ каждое пріисканіе производится съ нѣкоторымъ приближеніемъ, то при трехъ пріисканіяхъ можетъ накопиться бо̀льшая ошибка, чѣмъ при одномъ; этимъ и объясняется полученная разница въ2 единицы въ пятомъ десятичномъ знакѣ. Вслѣдствіе меньшаго числа пріискиванія логариѳмовъ результатъ, полученный по таблицамъ Гаусса, является болѣе точнымъ.

2. Вычислимъ затѣмъ $\mathrm{Log}\,(a-b)$ по даннымъ $\mathrm{Log}\, a$ и $\mathrm{Log}\, b$. Мы имѣемъ:

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Такъ какъ $b < a$ и кромѣ того a и b положительныя числа, то $\frac{b}{a} < 1$, и мы можемъ положить:

$$\frac{b}{a} = \sin^2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

гдѣ φ есть нѣкоторый вспомогательный уголъ.

Подставляя въ равенство (21) вмѣсто $\frac{b}{a}$ его значеніе, мы получаемъ:

$$a - b = a(1 - \sin^2\varphi) = a\cos^2\varphi = \frac{a}{\sec^2\varphi}. \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

откуда

$$\text{Log}\,(a-b)=\text{Log}\,a-2\,\text{Log}\sec\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Такимъ образомъ $\text{Log}\,(a-b)$ получается безъ перехода отъ $\text{Log}\,a$ и $\text{Log}\,b$ къ натуральнымъ числамъ a и b. Изложенными преобразованіями разность a и b приведена къ логариѳмическому виду.

Для составленія таблицы логариѳмовъ разностей, Гауссъ руководствовался слѣдующими соображеніями.

Напишемъ тождество:

$$\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a}=1$$

или

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{a}{a-b}\right)}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

или

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ

$$x=\frac{a}{b}=\text{cosec}^2\varphi \qquad \text{и} \qquad x'=\frac{a}{a-b}=\sec^2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Если въ уравненіи (26) $x=x'$, то каждое изъ нихъ равно 2. При увеличеніи x, x' уменьшается, и обратно, при уменьшеніи x, x' увеличивается; ихъ измѣненія происходятъ симметрично, напримѣръ

$$\text{если } x=3, \text{ то } x'=\frac{3}{2}$$

$$\text{если } x=\frac{3}{2}, \text{ то } x'=3$$

и т. д.

Величины $x=\frac{a}{b}$ и $x'=\frac{a}{a-b}$ являются взаимно-сопряженными.

Если, поэтому, составить таблицу безгранично возрастающихъ значеній x, начиная отъ $x=2$, то въ столбцѣ x' получатся значенія между $x'=2$ и $x'=1$, такъ какъ, при безграничномъ возрастаніи x, предѣлъ $\frac{1}{x}=0$, и тогда $\frac{1}{x'}=1$,

откуда $x' = 1$. Въ подобной таблицѣ, содержащей въ одномъ столбцѣ x, а въ другомъ x', будутъ заключаться всевозможныя значенія x и x', связанныя уравненіемъ (26); (если $x < 2$, то его значеніе будетъ найдено въ столбцѣ x', а соотвѣтственное значеніе x' будетъ заключаться въ столбцѣ x).

Возьмемъ логариѳмы обѣихъ частей уравненій (27); мы получимъ:

$$\text{Log}\, x = \text{Log}\, a - \text{Log}\, b \text{ и } \text{Log}\, x' = \text{Log}\, a - \text{Log}\,(a - b).$$

Для краткости обозначенія положимъ:

$$R = \text{Log}\, x \text{ и } \Delta = \text{Log}\, x';$$

тогда

$$R = \text{Log}\, a - \text{Log}\, b \text{ и } \Delta = \text{Log}\, a - \text{Log}\,(a - b) \quad . \quad . \quad (28)$$

откуда

$$\text{Log}\,(a - b) = \text{Log}\, a - \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Величины R и Δ суть логариѳмы сопряженныхъ величинъ x и x', связанныхъ уравненіемъ (26). При увеличеніи R, величина Δ уменьшается, слѣдовательно разности D всегда отрицательныя.

Таблица логариѳмовъ разностей (стр. 87 моихъ «Логариѳмовъ») составлена такимъ образомъ, что для значеній R отъ 0,3000 (округленное значеніе Log 2) до 5,0 даны соотвѣтствующія значенія Δ; если $R > 0{,}3000$, то входятъ въ лѣвый столбецъ таблицы, придерживаясь обозначенія верхней заглавной строки, а если $R < 0{,}3000$, то во второй столбецъ, придерживаясь обозначенія нижней строки. Въ первомъ случаѣ Δ находится во второмъ столбцѣ и пріискивается, какъ логариѳмъ по данному числу, а во второмъ случаѣ Δ находится въ первомъ столбцѣ и пріискивается, какъ число по данному логариѳму. Слѣдуетъ только имѣть въ виду, что при увеличеніи R, Δ уменьшается.

По даннымъ этой таблицы пріисканіе $\text{Log}\,(a - b)$ сводится къ слѣдующимъ дѣйствіямъ:

1. Къ составленію разности $R = \text{Log}\, a - \text{Log}\, b$ (28).

2. Къ пріисканію $\Delta = \text{Log}\, a - \text{Log}\,(a - b)$ по данному значенію R (28).

и 3. Къ вычитанію найденнаго значенія Δ изъ логариѳма бо́льшаго числа (29): $\mathrm{Log}a - \Delta = \mathrm{Log}(a - b)$.

Приведемъ примѣръ.

Примѣръ 1. Даны $\mathrm{Log}\, a = 0{,}43753$ и $\mathrm{Log}\, b = 9{,}94327 - 10$; вычислить $\mathrm{Log}(a - b)$.

Мы приведемъ вычисленія по логариѳмамъ Гаусса и по обыкновенному способу.

А. По логариѳмамъ Гаусса:

	$\mathrm{Log}\ a =$	$0{,}43753$
2.	$\Delta =$	$-0{,}16777$
	$\mathrm{Log}\, b =$	$9{,}94327 - 10$
1.	$R =$	$0{,}49426$
3.	$\mathrm{Log}(a - b) =$	$0{,}26976$

Б. По обыкновенному способу:

	$\mathrm{Log}\, a =$	$0{,}43753$
	$\mathrm{Log}\, b =$	$9{,}94327 - 10$
1.	$a =$	$2{,}7386$
2.	$b =$	$0{,}8775$
3.	$a - b =$	$1{,}8611$
4.	$\mathrm{Log}(a - b) =$	$0{,}26977$

Номера, поставленные передъ строками, указываютъ на порядокъ вычисленія. Причина разногласія на одну единицу въ послѣднемъ десятичномъ знакѣ та же, что и въ примѣрѣ для вычисленія $\mathrm{Log}(a + b)$.

Примѣръ 2. Даны: $\mathrm{Log}\, a = 1{,}27094$ и $\mathrm{Log}\, b = 1{,}10358$; вычислить $\mathrm{Log}(a - b)$.

	$\mathrm{Log}\, a =$	$1{,}27094$
2.	$\triangle =$	$-0{,}49513$
	$\mathrm{Log}\, b =$	$1{,}10358$

1. $R = 0{,}16736$

3) $\mathrm{Log}(a - b) = 0{,}77581$

§ 18. Упражненія и задачи. Вычислить слѣдующія выраженія:

31. $\sqrt{a + b}$, если $\mathrm{Log}\, a = 1{,}34589$ и $\mathrm{Log}\, b = 1{,}65893$.

32. $\sqrt{a - b}$, если $\mathrm{Log}\, a = 0{,}72159$ и $\mathrm{Log}\, b = 0{,}56375$.

33. $\dfrac{a + b}{a - b}$, если $\mathrm{Log}\, a = 0{,}95700$ и $\mathrm{Log}\, b = 0{,}67291$.

34. $a \sin A + b \cos A$, если $\mathrm{Log}\, a = 1{,}65895$, $\mathrm{Log}\, b = 1{,}23609$ и $A = 38^\circ 56' 34''$.

35. $x = \sqrt[3]{3{,}2793} + 7\sqrt[5]{2{,}3910}$.

36. $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

37. $x = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.

§ 19. Общія замѣчанія. Рѣшить треугольникъ—значитъ по даннымъ значеніямъ нѣкоторыхъ его элементовъ найти значенія остальныхъ. Во всякомъ треугольникѣ 6 элементовъ: 3 угла и 3 стороны. Для рѣшенія треугольника необходимо имѣть три элемента, въ числѣ которыхъ по крайней мѣрѣ одну сторону. Однако, не во всѣхъ случаяхъ достаточно трехъ данныхъ элементовъ для полученія единственнаго рѣшенія задачи, хотя бы въ числѣ данныхъ и была одна сторона. Напримѣръ, при двухъ данныхъ сторонахъ и одномъ углѣ можетъ быть два рѣшенія, если данный уголъ не заключается между данными сторонами. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ упрощается въ томъ отношеніи, что одинъ изъ угловъ прямой. Для рѣшенія прямоугольнаго треугольника достаточно имѣть двѣ данныя, изъ которыхъ одна должна быть стороною; (третья же данная—прямой уголъ).

Стороны треугольника выражаются въ линейныхъ единицахъ, а углы — въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, при чемъ въ прямомъ углѣ считается 90°.

Для краткости мы будемъ обозначать углы треугольника большими буквами A, B и C, помѣщенными въ вершинѣ угловъ, а противолежащія имъ стороны — малыми буквами a, b и c. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ прямой уголъ будемъ обозначать буквою A, а гипотенузу — a.

§ 20. Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника. Пусть ABC будетъ нѣкоторый пря-

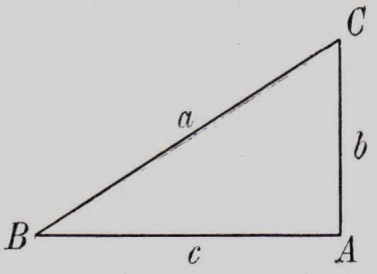
моугольный треугольникъ; изъ опредѣленія тригонометрическихъ величинъ имѣемъ:

$$\sin B = \frac{b}{a} \qquad \sin C = \frac{c}{a}$$

$$\cos B = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cotg} B = \frac{c}{b} \qquad \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$$



откуда выводимъ:

$$\left.\begin{aligned} b &= a\sin B = a\cos C \\ c &= a\sin C = a\cos B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

и

$$\left.\begin{aligned} b &= c\operatorname{tg} B = c\operatorname{cotg} C \\ c &= b\operatorname{tg} C = b\operatorname{cotg} B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$B + C = 90^\circ \text{ и } a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Итакъ, во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ:

1. Каждый катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго угла или на косинусъ прилежащаго.

2. Каждый катетъ равенъ другому, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго опредѣляемому катету, или на котангенсъ прилежащаго ему угла.

3. Сумма двухъ острыхъ угловъ равна 90°.

4. Квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.

§ 21. Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. Основными случаями рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ называются задачи, въ которыхъ данными величинами являются только элементы треугольника.

1-й случай. Даны: гипотенуза $a = 3526{,}7\text{m}$ и уголъ $B = 30^\circ 28' 47''$. Вычислить C, b и c.

Рѣшеніе: $C = 90^\circ - B$; $b = a\sin B$ и $c = a\cos B$.

Повѣрка $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ производится по логариѳмамъ Гаусса.

Вычисленіе:

$C = 90° - B = 59°31'13''$
$\text{Log sin } B = 9{,}70521$
$\text{Log } a = 3{,}54737$
$\text{Log cos } B = 9{,}93541$
$\text{Log } b = 3{,}25258$
$\text{Log } c = 3{,}48278$
$b = 1788{,}9$ m.
$c = 3039{,}4$ »

Повѣрка: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$\text{Log } c^2 = 6{,}96556$
$\Sigma = +0{,}12918$
$\text{Log } b^2 = 6{,}50516$
$R = 0{,}46040$
$\text{Log } a^2 = 7{,}09474$
$\text{Log } a = 3{,}54737$
равенъ данному $\text{Log } a$.

2-й случай. Даны: гипотенуза $a = 519{,}9$ cm. и катетъ $b = 385{,}7$ cm.; вычислить углы B и C и катетъ c.

Рѣшеніе: $\sin B = \frac{b}{a}$; $C = 90° - B$ и $c = b \cot B$.

Повѣрка: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ по логариѳмамъ Гаусса.

Вычисленіе:

$\text{Log cotg } B = 9{,}95610$
$\text{Log } b = 2{,}58625$
$\text{Log } a = 2{,}71592$
$\text{Log sin } B = 9{,}87033$
$B = 47°53'27''$
$C = 42\ \ 6\ 33$
$\text{Log } c = 2{,}54235$
$c = 348{,}62$ cm.

Повѣрка:

$\text{Log } a^2 = 5{,}43184$
$-\Delta = -0{,}34715$
$\text{Log } b^2 = 5{,}17250$
$R = 0{,}25934$
$\text{Log } c^2 = 5{,}08469$
$\text{Log } c = 2{,}54235$
равенъ найденному $\text{Log } c$.

3-й случай. Даны: катетъ $b = 6957{,}2$ m. и уголъ $B = 63°51'33''$; вычислить уголъ C, гипотенузу a и катетъ c.

Рѣшеніе: $C = 90° - B$; $a = b \operatorname{cosec} B$; $c = b \cot B$.

Повѣрка: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ по логариѳмамъ Гаусса.

Вычисленіе:

$C = 90° - B = 26°\ 8'27''$
$\text{Log cosec } B = 0{,}04686$
$\text{Log } b = 3{,}84243$
$\text{Log cotg } B = 9{,}69088$
$\text{Log } a = 3{,}88929$
$\text{Log } c = 3{,}53331$
$a = 7749{,}8$ m
$c = 3414{,}4$ m

Повѣрка:

$\text{Log } a^2 = 7{,}77858$
$-\Delta = -0{,}09372$
$\text{Log } c^2 = 7{,}06662$
$R = 0{,}71196$
$\text{Log } b^2 = 7{,}68486$
$\text{Log } b = 3{,}84243$
равенъ данному $\text{Log } b$.

4-й случай. Даны оба катета: $b = 127{,}35$ саж. и $c = 209{,}47$ саж. Вычислить гипотенузу a и углы B и C.

Рѣшеніе: $\left.\begin{array}{l} a \sin B = b \\ a \cos B = c \end{array}\right\} a = b \operatorname{cosec} B = c \sec B$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad C = 90^\circ - B$$

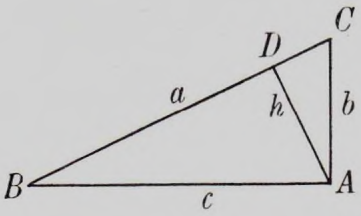
Повѣрка: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ по логариѳмамъ Гаусса.

Вычисленіе: (Порядокъ вычисленія обозначенъ арабскими цифрами).		Повѣрка:	
6.	$\operatorname{Log cosec} B =$	$\operatorname{Log} c^2 =$	4,64224
1. $\operatorname{Log} b = \operatorname{Log} a \sin B =$	2,10500	$+\Sigma =$	$+0{,}13661$
2. $\operatorname{Log} c = \operatorname{Log} a \cos B =$	2,32112	$\operatorname{Log} b^2 =$	4,21000
7. $\operatorname{Log} \sec B =$	0,06830	$R =$	0,43224
3. $\operatorname{Log} \operatorname{tg} B =$	9,78388	$\operatorname{Log} a^2 =$	4,77885
4. $B =$	$31^\circ 17' 54''$	$\operatorname{Log} a =$	2,38942
5. $C =$	$58^\circ 42' 6''$	равенъ найденному	
8. $\operatorname{Log} a =$	2,38942	значенію $\operatorname{Log} a$.	
9. $a =$	245,14 саж. *)		

§ 22. Особенные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. Особенными случаями рѣшенія треугольниковъ вообще и въ частности прямоугольныхъ называются такія задачи на рѣшеніе треугольниковъ, въ которыхъ даны не элементы, а величины, зависящія отъ элементовъ. Въ случаѣ подобнаго заданія необходимо составить уравненія, дающія возможность выразить элементы искомаго треугольника черезъ заданныя величины, и такимъ образомъ вопросъ о рѣшеніи данной задачи свести къ вопросу о рѣшеніи треугольника въ основныхъ случаяхъ.

Примѣръ 1. Въ прямоугольномъ треугольникѣ данъ острый уголъ B и высота h, опущенная изъ прямого угла на гипотенузу; рѣшить треугольникъ.

*) Гипотенуза, вычисленная по двумъ формуламъ, должна имѣть тождественное значеніе, и кромѣ того должно быть удовлетворено уравненіе $a^2 = b^2 + c^2$.



Пусть ABC будетъ данный прямоугольный треугольникъ, и $AD = h$ — данная высота. Для опредѣленія зависимости между данною величиною h и однимъ изъ элементовъ искомаго треугольника разсмотримъ $\triangle ABD$. По формулѣ (30) имѣемъ:

$$h = c \sin B, \text{ откуда } c = h \operatorname{cosec} B.$$

На основаніи послѣдняго равенства катетъ c опредѣляется по заданнымъ элементамъ h и B, и такимъ образомъ вопросъ о рѣшеніи данной задачи сводится къ вопросу о рѣшеніи треугольника по катету c и прилежащему углу B (3-й случай), именно: $C = 90° - B$; $a = c \sec B$; $b = c \operatorname{tg} B$

или: $a = h \sec B \operatorname{cosec} B$ и $b = h \sec B$

Примѣръ 2. Въ прямоугольномъ треугольникѣ данъ острый уголъ B и сумма катетовъ $b + c = m$; рѣшить треугольникъ.

Мы имѣемъ по формулѣ (31):

$$b = c \operatorname{tg} B$$

Исключивъ b изъ даннаго уравненія $b + c = m$, мы получимъ:

$$c(1 + \operatorname{tg} B) = m,$$

откуда

$$c = \frac{m}{1 + \operatorname{tg} B}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Далѣе рѣшаемъ прямоугольный треугольникъ по катету c и острому углу B (3-й случай):

$$C = 90° - B; b = c \operatorname{tg} B = \frac{m \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} B} = \frac{m}{1 + \operatorname{cotg} B} \text{ и } a = b \operatorname{cosec} B = c \sec B.$$

Замѣтимъ, что b можетъ быть найдено независимо отъ рѣшенія прямоугольнаго треугольника изъ уравненія $b + c = m$:

$$b = m - c = m\left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} B}\right) = \frac{m}{1 + \operatorname{cotg} B} \quad \ldots \quad (34)$$

Гипотенуза, вычисленная по двумъ формуламъ, должна имѣть тождественное значеніе, но, кромѣ того, уравненіе $a^2 = b^2 + c^2$ должно быть удовлетворено.

Примѣръ 3. Даны: сумма или разность гипотенузы a и катета b и одинъ изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника. Рѣшить треугольникъ.

Даны: $n = a \pm b$ и B. Рѣшеніе: уголъ $C = 90° - B$. Для опредѣленія гипотенузы a мы исключаемъ изъ перваго уравненія катетъ b съ помощью извѣстнаго намъ соотношенія $b = a \sin B$; получаемъ: $a(1 \pm \sin B) = n$, откуда выводимъ: $a = \dfrac{n}{1 \pm \sin B}$.

Далѣе рѣшаемъ прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и прилежащему углу B (1-й случай): $b = a \sin B$ и $c = a \cos B$. Замѣтимъ, что катетъ b можетъ быть также опредѣленъ изъ уравненія $n = a \pm b$. Для повѣрки можно воспользоваться Пиѳагоровымъ уравненіемъ: $a^2 = b^2 + c^2$.

§ 23. Упражненія и задачи.

1. Даны: $a = 402{,}73$; $C = 28°37'51''$; вычислить B, b и c.
2. Даны: $a = 86{,}25$; $b = 54{,}39$; вычислить B, C и c.
3. Даны: $a = 25785$; $c = 20473$: вычислить B, C и b.
4. Даны: $b = 60{,}33$; $B = 49°30'54''$; вычислить C, a и c.
5. Даны: $c = 173{,}50$ и $C = 82°31'15''$; вычислить B, a и b.
6. Даны: $b = 0{,}27093$ и $C = 63°19'38''$; вычислить B, a и c.
7. Даны: $c = 59{,}685$ и $B = 17°57'35''$; вычислить C, a и b.
8. Даны: $b = 0{,}0025632$; $c = 0{,}0095608$; вычислить B, C и a.
9. На тѣло дѣйствуетъ сила $R = 25{,}37$ клгр.; разложить ее на двѣ взаимно-перпендикулярныхъ составляющихъ P и S, изъ которыхъ S направлена подъ угломъ $B = 30°27'$ съ данною силою R. Вычислить величину обѣихъ составляющихъ.
10. На точку дѣйствуютъ двѣ силы подъ прямымъ угломъ одна къ другой; изъ нихъ одна равна 3,6 клгр., а другая 5,2 клгр. Какіе углы онѣ составляютъ съ равнодѣйствующею R, и чему равна послѣдняя? Вычислить углы съ точностью до одной десятой градуса, а равнодѣйствующую—до одной десятой килограмма.

11. Въ полдень, съ корабля, шедшаго со скоростью 12 морскихъ миль въ часъ въ направленіи $W\,16^\circ\,S$ (подъ угломъ въ 16° отъ запада къ югу), наблюдали маякъ въ направленіи $S\,31^\circ W$. Въ 1 ч. 40 м. пополудни тотъ же маякъ усматривался съ корабля въ направленіи $S\,16^\circ$ E. Вычислить разстояніе корабля отъ маяка съ обѣихъ точекъ.

12. На плоскость, наклоненную къ горизонтальной плоскости подъ угломъ въ 12°37′, положенъ шаръ вѣсомъ въ 2 п. 2 ф. Какую силу слѣдуетъ приложить къ шару по направленію наклонной плоскости, чтобы удержать его?

13. Изъ нѣкоторой точки круга, радіусъ котораго равенъ 235 m., проведены двѣ хорды; изъ нихъ одна въ 102 m., а другая въ 52 m. длиною; вычислить величину стягиваемыхъ ими центральныхъ угловъ и разность высотъ равнобедренныхъ треугольниковъ, построенныхъ при центрѣ на данныхъ хордахъ.

14. Вертикальный шестъ высотою въ 1 саж. отбрасываетъ на горизонтальную плоскость тѣнь отъ солнца длиною въ 0,75 саж. Вычислить угловую высоту Солнца H въ это время.

15. Даны: $B=80^\circ 17'49''$ и сумма катетовъ $b+c=425{,}8$ саж. Вычислить треугольникъ.

16. Даны: $B=55^\circ 41'23''$ и разность катетовъ $b-c=$ $=31{,}62$ саж. Вычислить треугольникъ.

17. Даны: $B=61^\circ 18'31''$ и сумма гипотенузы и катета: $a+b=623{,}6$ m. Вычислить прямоугольный треугольникъ.

18. Даны: $B=46^\circ 39'52''$ и разность гипотенузы и катета: $a-c=30{,}36$ m. Вычислить треугольникъ.

19. Въ прямоугольномъ треугольникѣ острый уголъ $B=48^\circ\ 15'\ 28''$. Высота, опущенная изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равна $h=15$ cm. Вычислить стороны треугольника.

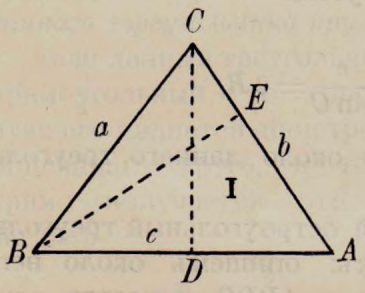
20. Опредѣлить длину стороны равносторонняго треугольника, высота котораго равна 2,35 саж.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

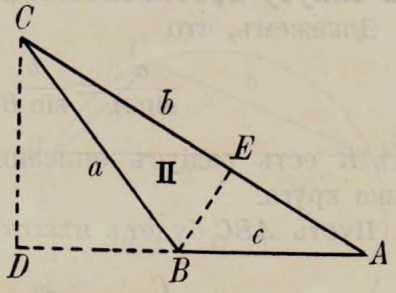
Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

§ 24. Пропорціональность стороны треугольника синусу противолежащаго угла.

Пусть ABC будетъ данный остроугольный или тупоугольный треугольникъ. Опустимъ изъ вершины C пер-



Остроугольный треугольникъ.



Тупоугольный треугольникъ.

пендикуляръ CD на сторону AB или на ея продолженіе. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ BCD и ADC имѣемъ:

$$CD = a \sin B = b \sin A,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Опустимъ затѣмъ изъ вершины B перпендикуляръ BE на сторону AC. Какъ и въ первомъ случаѣ, мы получимъ

два прямоугольныхъ треугольника ABE и BCE, для которыхъ имѣемъ:

$$BE = a \sin C = c \sin A,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Соединяя это отношеніе съ предыдущимъ, мы получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \\ \text{или: } \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B};\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin A}{\sin C} \text{ и } \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C} \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ (35)$$

т. е. *во всякомъ (прямолинейномъ) треугольникѣ стороны пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ.*

Формула (35) извѣстна подъ названіемъ *формулы синусовъ*; она является основною въ рѣшеніи прямолинейныхъ треугольниковъ.

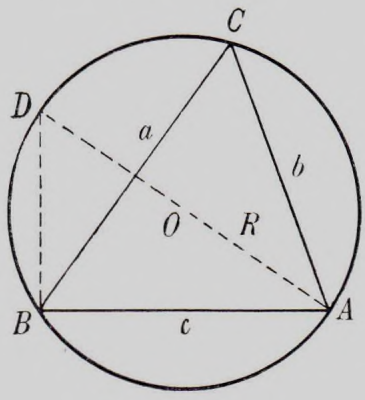
§ 25. Значеніе отношенія стороны треугольника къ синусу противолежащаго угла.

Докажемъ, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

гдѣ R есть радіусъ описаннаго около даннаго треугольника круга.

Пусть ABC будетъ нѣкоторый остроугольный треугольникъ: опишемъ около него кругъ $ABDC$ и черезъ одну изъ вершинъ, напр. A, проведемъ діаметръ $AOD = 2R$. Затѣмъ конецъ діаметра D соединимъ съ одною изъ другихъ вершинъ, напр., B. Построенный треугольникъ ABD будетъ прямоугольный, такъ какъ стороны угла ABD опираются на концы діаметра AD, а вершина B лежитъ



на окружности. Изъ построеннаго прямоугольнаго треугольника ABD выводимъ:

$$c = AD \sin D = 2R \sin D.$$

Но углы D и C, какъ имѣющіе вершины на окружности и опирающіеся на одну и ту же хорду AB, измѣряются половиною одной и той же дуги AB; поэтому они равны между собою и

$$c = 2R \sin D = 2R \sin C,$$

откуда

$$\frac{c}{\sin C} = 2R;$$

а такъ какъ по доказанному въ предыдущемъ § 24,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

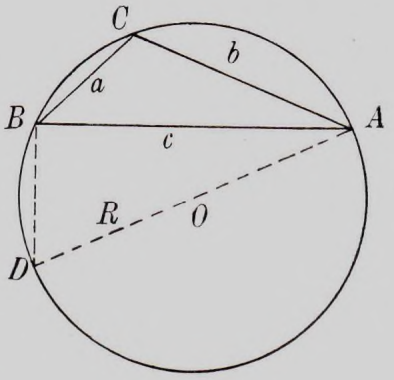
то мы получаемъ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Итакъ: *отношеніе любой стороны треугольника къ синусу противолежащаго ей угла равно діаметру описаннаго около даннаго треугольника круга.*

Если данный треугольникъ прямоугольный, то гипотенуза его является діаметромъ описаннаго круга, и тогда прямо получается отношеніе (36):

$$\frac{a}{\sin A} = a = 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin A}$$



Формула (36) справедлива и для всякаго тупоугольнаго треугольника.

Пусть ABC будетъ нѣкоторый тупоугольный треугольникъ; опишемъ около него кругъ, и изъ одной его вершины, напр. A, проведемъ діаметръ $AD = 2R$; затѣмъ соединимъ конецъ діаметра D съ другою вершиною треугольника, напр. съ B. Треугольникъ ABD будетъ прямоугольнымъ при B, потому, что вершина B лежитъ на окружности, а

стороны опираются на концы діаметра AD. Изъ него мы выводимъ:

$$c = 2R \sin D.$$

Но углы D и C, какъ противолежащіе въ четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, являются пополнительными, а потому $D = 180° - C$, и слѣдовательно

$$\sin D = \sin C.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто $\sin D$ его значеніе, мы получимъ:

$$c = 2R \sin C,$$

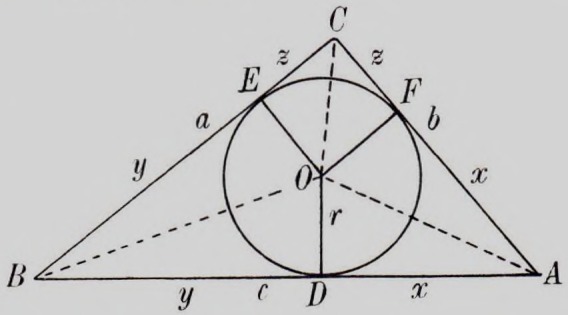
откуда

$$\frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Подобное же отношеніе получимъ и для другихъ сторонъ треугольника, а потому формула (36) справедлива для всякаго треугольника.

Итакъ: *во всякомъ треугольникѣ отношеніе стороны къ синусу противолежащаго угла есть величина постоянная и равно діаметру описаннаго около даннаго треугольника круга.*

§ 26. Выраженіе тангенса половины угла треугольника въ его сторонахъ.



Пусть ABC будетъ данный треугольникъ. Впишемъ въ него кругъ, центръ котораго O опредѣлится какъ пересѣченіе биссектрисъ трехъ угловъ A, B и C, а радіусъ r, какъ доказывается въ геометріи, имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

гдѣ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ есть полупериметръ даннаго треугольника.

Соединимъ центръ вписаннаго круга съ точками касанія въ D, E и F прямыми линіями: они перпендикулярны къ сторонамъ даннаго треугольника.

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $ADO = AFO$, $BDO = BEO$ и $CEO = CFO$ выводимъ:

$$\text{изъ } \triangle ADO: \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{r}{AD}$$

$$\text{изъ } \triangle BDO: \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \frac{r}{BD}$$

$$\text{изъ } \triangle CEO: \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{CE}$$

Пусть $AD = AF = x$, $BD = BE = y$ и $CE = CF = z$. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= y+z \\ b &= x+z \\ c &= x+y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Сложивъ эти равенства, мы получимъ:

$$a+b+c = 2s = 2(x+y+z),$$

откуда

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2} = s.$$

Вычитая изъ этого равенства по очереди три равенства (38), мы выводимъ:

$$x = s-a; \qquad y = s-b; \qquad z = s-c$$

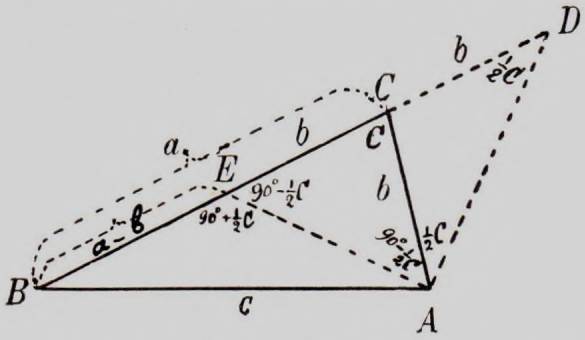
и слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c} \quad \ldots (39).$$

Итакъ: *тангенсъ половины угла треугольника равенъ частному отъ дѣленія радіуса вписаннаго въ треугольникъ круга на разность между полупериметромъ и стороною, противолежащей данному углу.*

§ 27. Отношеніе суммы или разности двухъ сторонъ треугольника къ третьей.

Пусть ABC будетъ данный треугольникъ, стороны котораго суть a, b и c, а противолежащіе углы A, B и C, и положимъ, что $a > b$. Изъ вершины треугольника C опишемъ полуокружность радіусомъ $CA = b$ и найдемъ точки



пересѣченія съ нею стороны BC и ея продолженія въ точкахъ E и D. Въ такомъ случаѣ

$$BD = BC + CD = a + b$$
$$BE = BC - EC = a - b.$$

Соединимъ прямыми линіями точки E и D съ вершиною треугольника A; мы получимъ два равнобедренныхъ треугольника ACD и ACE съ основаніями AD и AE. Затѣмъ получаются треугольники ABD и ABE, имѣющіе сторонами $BD = a + b$ и $BE = a - b$. Разсмотримъ углы треугольниковъ ABD и ABE, противолежащіе сторонамъ $a + b$, $a - b$ и c.

Для этого разсмотримъ сначала углы равнобедренныхъ треугольниковъ ACD и AEC. Въ треугольникѣ ACD имѣемъ: $\angle ADC = \angle DAC = \frac{1}{2}C$, такъ какъ въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны половинѣ внѣшняго угла, съ нимъ не смежнаго; уголъ же $ACE = C$. Затѣмъ $\angle ACD = 180° - C$.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ AEC, по тѣмъ же основаніямъ, имѣемъ:

$\angle AEC = \angle EAC = 90° - \frac{1}{2}C$, и кромѣ того: $\angle ACE = C$.

Опредѣливъ углы этихъ треугольниковъ, мы можемъ затѣмъ опредѣлить углы треугольниковъ ABD и ABE.

1) Въ треугольникѣ ABD имѣемъ:

$$\angle BAD = A + \frac{1}{2}C = A + 90^\circ - \frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ + \frac{1}{2}(A-B);$$

онъ лежитъ противъ стороны $BD = a + b$.

$\angle ADB = \frac{1}{2}C$; онъ лежитъ противъ стороны c.

2) Въ треугольникѣ ABE имѣемъ:

$$\angle BAE = A - EAC = A - \left(90^\circ - \frac{1}{2}C\right) =$$

$$= A - 90^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(A-B).$$

Этотъ уголъ лежитъ противъ стороны $BE = a - b$.

Далѣе: $\angle BEA = 90^\circ + \frac{1}{2}C$, какъ пополнительный внѣшнему углу $AEC = 90^\circ - \frac{1}{2}C$. Противъ угла $90^\circ + \frac{1}{2}C$ лежитъ сторона c.

Итакъ имѣемъ:

	въ $\triangledown ABD$:		въ $\triangledown ABE$:	
стороны:	$a+b$;	c;	$a-b$;	c
углы:	$90^\circ + \frac{1}{2}(A-B)$;	$\frac{1}{2}C$;	$\frac{1}{2}(A-B)$;	$90^\circ + \frac{1}{2}C$

По формулѣ синусовъ мы можемъ написать:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left[90^\circ + \frac{1}{2}(A-B)\right]}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin(90^\circ + \frac{1}{2}C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

Подобныя же соотношенія получимъ и для другихъ сторонъ и угловъ; мы выписываемъ ихъ вмѣстѣ съ полученными:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } a>b\text{: } \dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} \text{ и } \dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} \\ \text{если } a>c\text{: } \dfrac{a+c}{b}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}B} \text{ и } \dfrac{a-c}{b}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}B} \\ \text{если } b>c\text{: } \dfrac{b+c}{a}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A} \text{ и } \dfrac{b-c}{a}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} \end{array}\right\} (40)$$

§ 28. Отношеніе разности двухъ сторонъ треугольника къ ихъ суммѣ.

Раздѣлимъ въ каждой горизонтальной строкѣ вторыя уравненія (40) на первыя и примемъ во вниманіе, что $A+B+C=180^\circ$ и что слѣдовательно:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}C=90^\circ-\frac{1}{2}(A+B); & \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B) \\ \frac{1}{2}B=90^\circ-\frac{1}{2}(A+C); & \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+C) \\ \frac{1}{2}A=90^\circ-\frac{1}{2}(B+C); & \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C) \end{array}$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } a>b\text{: } \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)} \\ \text{если } a>c\text{: } \dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-C)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+C)} \\ \text{если } b>c\text{: } \dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)} \end{array}\right\} \ldots\ (41).$$

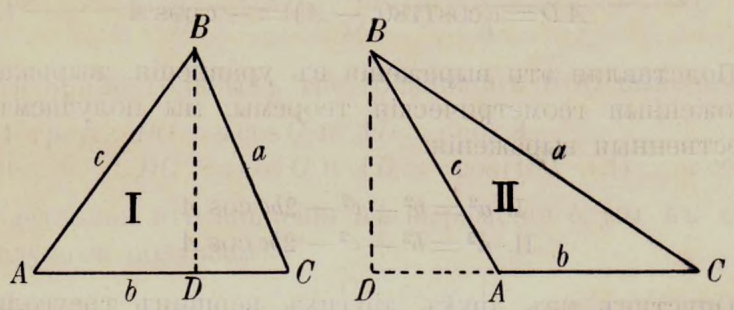
Изъ этихъ уравненій мы выводимъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{если } A > B\text{:} & \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C \\ \text{если } A > C\text{:} & \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-C) = \frac{a-c}{a+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B \\ \text{если } B > C\text{:} & \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (42)$$

Формулы (40) и (41) или выведенныя изъ нихъ формулы (42) называются формулами Мольвейде, по имени астронома Мольвейде, сообщившаго изящный ихъ выводъ въ 1808 г. въ журналѣ Zach: «Monatliche Correspondenz», vol. 18, p. 394 *).

§ 29. Выраженіе квадрата стороны треугольника.

Пусть ABC будетъ остроугольный (I) или тупоугольный (II) треугольникъ. Опустимъ изъ одной его вершины, напр. B, перпендикуляръ BD на сторону AC (I) или на ея продолженіе (II); затѣмъ назовемъ углы треугольниковъ



большими буквами, поставленными въ ихъ вершинахъ,— A, B и C, а противолежащія имъ стороны—маленькими буквами a, b и c.

Въ геометріи доказывается:

1. Квадратъ стороны, лежащей противъ остраго угла треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія одной изъ этихъ сторонъ на отрѣзокъ ея отъ вершины остраго угла до основанія высоты.

*) Тѣ же формулы встрѣчаются у И. Ньютона, В. Оппеля (1748) и Т. Симпсона (1748).

2. Квадратъ стороны, лежащей противъ тупого угла, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, сложенной съ удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ на отрѣзокъ ея продолженія отъ вершины тупого угла до основанія высоты.

Эти теоремы, переведенныя на алгебраическіе знаки, пишутся слѣдующимъ образомъ для стороны a, лежащей въ I-мъ треугольникѣ противъ остраго угла, во II-мъ—противъ тупого:

$$\text{(I)}\ a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD \qquad \text{(II)}\ a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AD.$$

Но изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ADB имѣемъ:

I для стороны a противъ остраго угла:

$$AD = c \cos A$$

II для стороны a противъ тупого угла:

$$AD = c \cos (180^\circ - A) = -c \cos A$$

Подставляя эти выраженія въ уравненія, выражающія изложенныя геометрическія теоремы, мы получаемъ тождественныя выраженія:

$$\text{I.}\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$\text{II.}\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Опустивъ изъ двухъ другихъ вершинъ треугольника перпендикуляры на противолежащія стороны, мы подобнымъ же образомъ выведемъ выраженія для квадрата другихъ сторонъ, и вообще будемъ имѣть:

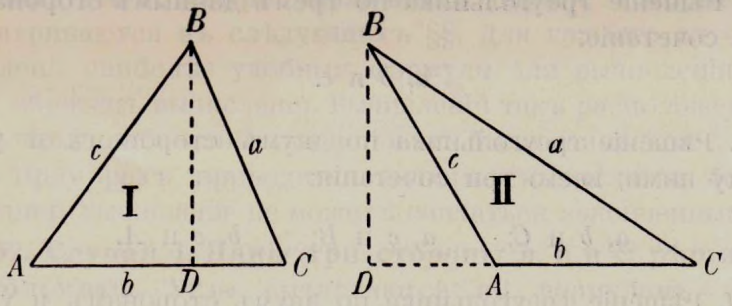
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Итакъ: *во всякомъ треугольникѣ квадратъ каждой стороны равняется суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія тѣхъ же сторонъ на косинусъ угла, между ними заключающагося.*

§ 30. Выраженіе стороны треугольника въ зависимости отъ двухъ другихъ (формула проекцій),

Пусть ABC будетъ нѣкоторый остроугольный (I) или тупоугольный (II) треугольникъ. Изъ вершины B опустимъ перпендикуляръ BD на сторону AC (I) или на ея продолженіе (II): тогда получимъ два прямоугольныхъ треугольника ADB и BDC. Изъ построенія мы видимъ, что

для I треугольника $b = DC + AD$
» II » $b = DC - AD$



но изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BDC выводимъ:

для I треуг.: $DC = a\cos C$ и $AD = c\cos A$
» II » : $DC = a\cos C$ и $AD = c\cos(180° - A) = -c\cos A$.

Подставляя эти значенія въ выраженія b, мы въ обоихъ случахъ получаемъ:

$$b = a\cos C + c\cos A.$$

Опустивъ изъ двухъ другихъ вершинъ треугольника перпендикуляры на противоположныя стороны, мы подобнымъ же образомъ выведемъ выраженія и для другихъ сторонъ, и вообще будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= a\cos C + c\cos A \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

Итакъ: *во всякомъ треугольникѣ каждая сторона равна суммѣ двухъ другихъ, помноженныхъ каждая на косинусъ угла, составляемаго ею съ первою стороною.*

Эти формулы называются *формулами проекцій.*

§ 31. Общія замѣчанія о рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ. Для рѣшенія треугольника необходимо, чтобы были даны три элемента, и чтобы въ числѣ ихъ была одна сторона. Въ треугольникѣ шесть элементовъ: три стороны и три угла. Изъ шести величинъ можно составить слѣдующее число сочетаній по три: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$; изъ числа этихъ сочетаній одно не даетъ рѣшенія, когда всѣ три данныхъ элемента — углы. Поэтому остается 19 сочетаній, соединяемыхъ въ слѣдующія четыре группы:

I. Рѣшеніе треугольника по тремъ даннымъ сторонамъ; одно сочетаніе:

a, b и c.

II. Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними; всего три сочетанія:

a, b и C; a, c и B; b, c и A.

III. Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ нихъ; всего шесть сочетаній:

a, b и A; a, b и B
a, c и A; a, c и C
b, c и B; b, c и C.

и IV. Рѣшеніе треугольника по одной изъ сторонъ и двумъ угламъ; всего девять сочетаній:

a, B и C; a, A и B; a, A и C
b, A и C; b, B и C; b, B и A
c, A и B; c, C и A; c, C и B.

Всего по четыремъ группамъ 19 сочетаній.

Всѣ три сочетанія II группы сводятся къ одному случаю: даны двѣ стороны и уголъ, между ними заключающійся (a, b и C).

Всѣ шесть сочетаній III группы сводятся къ одному случаю: даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ (a, b и A).

Всѣ девять сочетаній IV группы сводятся къ одному случаю, когда треугольникъ рѣшается по данной сторонѣ и даннымъ двумъ угламъ, прилегающимъ къ ней. Дѣйствительно, если извѣстны два угла треугольника, то и третій также извѣстенъ, такъ какъ онъ является пополненіемъ до 180° суммы двухъ данныхъ угловъ; напримѣръ $A = 180° - (B + C)$; поэтому для задачи безразлично, какіе бы два угла треугольника ни были даны: третій уголъ можетъ также считаться даннымъ.

Итакъ, рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ представляетъ всего четыре различныхъ случая, которые и разсматриваются въ слѣдующихъ §§. Для каждаго случая приведены наиболѣе удобныя формулы для вычисленія, а также образецъ вычисленія. Вычисленія такъ расположены, чтобы число пріисканій логариѳмовъ было наименьшее. Во всѣхъ примѣрахъ приводится повѣрка вычисленія; безъ послѣдней вычисленіе не можетъ считаться законченнымъ.

§ 32. Случай I. Даны три стороны a, b и c; рѣшить треугольникъ. Углы вычисляются по формуламъ (39) тангенса половины угла треугольника:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}; \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b}; \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c},$$

гдѣ r есть радіусъ вписаннаго въ данный треугольникъ круга, а s—полупериметръ треугольника. Величины r и s имѣютъ слѣдующее значеніе:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}} \quad \text{и} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Рѣшеніе треугольника, какъ извѣстно, возможно въ томъ случаѣ, если сумма какихъ-нибудь двухъ сторонъ больше третьей, а именно должно быть:

$$b + c > a; \quad a + c > b \text{ и } a + b > c$$

что приводится къ неравенствамъ:

$$s - a > 0; \quad s - b > 0 \text{ и } s - c > 0.$$

Если эти неравенства не удовлетворяются данными сторонами, то рѣшеніе треугольника невозможно.

Напримѣръ, $a = 26$, $b = 42$ и $c = 34$. Вычисляемъ s. Имѣемъ $2s = 26 + 42 + 34 = 102$; $s = 51$; эта сумма больше каждой изъ данныхъ сторонъ; поэтому рѣшеніе треугольника возможно. Но если $a = 26$, $b = 42$ и $c = 102$, то $2s = 170$ и $s = 85$; эта сумма меньше 102; вслѣдствіе этого $s - 102 = 85 - 102 < 0$, и рѣшеніе невозможно.

Повѣрка вычисленія производится четыре раза, а именно

1-я повѣрка : $(s - a) + (s - b) + (s - c) = s$

2-я » : $s \operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = r$

[Перемноживъ выраженія тангенсовъ половины угловъ, мы получимъ: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}A \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \frac{r^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{r^3}{r^2 s} = \frac{r}{s}$]

3-я повѣрка : $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^\circ$

4-я » : $A + B + C = 180^\circ$

Всѣ повѣрки, производимыя послѣдовательно, являются необходимыми.

Слѣдуетъ замѣтить, что при вычисленіи съ пятизначными логариѳмами двѣ послѣднія суммы могутъ отличаться отъ 90° и 180° на нѣсколько секундъ; при вычисленіи съ шестизначными логариѳмами на нѣсколько десятыхъ секунды и т. д.

Примѣръ: Даны $a = 473{,}25$ саж., $b = 339{,}07$ саж., $c = 387{,}96$ саж. Вычислить углы A, B и C.

Вычисленіе и повѣрка:

$s = 600{,}14$		$\operatorname{Log} r = 2{,}03432$
$a = 473{,}25$	$s - a = 126{,}89$	$\operatorname{Log}(s - a) = 2{,}10343$
$b = 339{,}07$	$s - b = 261{,}07$	$\operatorname{Log}(s - b) = 2{,}41676$
$c = 387{,}96$	$s - c = 212{,}18$	$\operatorname{Log}(s - c) = 2{,}32671$
$2s = 1200{,}28$	$s = 600{,}14$	$\operatorname{Log} \frac{1}{s} = 7{,}22175 - 10$
	$\operatorname{Log} s = 2{,}77825$	$\operatorname{Log} r^2 = 4{,}06865$

$\text{Log tg}\frac{1}{2}A = 9{,}93089$ $\qquad$ $\frac{1}{2}A = 40°27'37''$

$\text{Log tg}\frac{1}{2}B = 9{,}61756$ $\qquad$ $\frac{1}{2}B = 22\ 30\ 57$

$\text{Log tg}\frac{1}{2}C = 9{,}70761$ $\qquad$ $\frac{1}{2}C = 27\ \ 1\ 25$

$\text{Log}\, s = 2{,}77825$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(A+B+C) = 89°59'59''$

$\text{Сумма} = \text{Log}\, r = 2{,}03431$ $\qquad$ $A = 80°55'14''$

$B = 45\ \ 1\ 54$

$C = 54\ \ 2\ 50$

$A+B+C = 179\ 59\ 58$

Суммы отличаются на $1''$ отъ $90°$ и на $2''$ отъ $180°$, что допустимо для пятизначныхъ логариѳмовъ.

§ 33. Упражненія и задачи.

1. Рѣшить треугольникъ по слѣдующимъ даннымъ:

а. $a = 437$ m; $b = 209$ m; $c = 26$ m;

б. $a = 127{,}56$ саж.; $b = 206{,}39$ саж.; $c = 179{,}81$ саж.

в. $a = 48{,}2$ m; $b = 52{,}4$ m; $c = 60{,}8$ m.

г. $a = 1035$ m; $b = 1220$ m; $c = 1157$ m.

2. Даны: равнодѣйствующая сила $R = 18{,}62$ клгр. и обѣ составляющія: $P = 13{,}56$ клгр. и $Q = 10{,}72$ клгр. Вычислить уголъ между равнодѣйствующею и каждой изъ составляющихъ.

3. Участокъ земли, имѣющій форму треугольника, измѣренъ обходомъ, при чемъ для сторонъ получились слѣдующія длины: $a = 42{,}5$ саж., $b = 30{,}7$ саж. и $c = 23{,}8$ саж. Вычислить углы треугольника.

§ 34. Случай II. Даны двѣ стороны b и c, при чемъ b > c, и уголъ между ними A; рѣшить треугольникъ. Для рѣшенія треугольника по этимъ даннымъ слѣдуетъ сначала опредѣлить сумму и разность искомыхъ угловъ: $B+C$ и $B-C$, а затѣмъ каждый изъ нихъ.

Сумма угловъ B и C опредѣляется по основной формулѣ:

$$B+C = 180° - A \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90° - \frac{1}{2}A$$

Для опредѣленія же ихъ разности, пользуемся формулою (42):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A \quad \ldots\ldots (*)$$

Такъ какъ полуразность $\frac{1}{2}(B-C)$ опредѣляется по тангенсу, а онъ можетъ принимать всевозможныя значенія, то при любыхъ значеніяхъ b, c и A мы найдемъ для угла $\frac{1}{2}(B-C)$ вполнѣ опредѣленное значеніе; обозначимъ его буквою M: $\frac{1}{2}(B-C)=M$.

Итакъ, по $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)$ получаемъ положительное значеніе M для $\frac{1}{2}(B-C)$.

Затѣмъ изъ двухъ уравненій:

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ-\frac{1}{2}A,$$

$$\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C=M$$

выводимъ:

$$\left.\begin{aligned} B&=90^\circ-\frac{1}{2}A+M\\ C&=90^\circ-\frac{1}{2}A-M\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (**)$$

Сторона a вычисляется по взаимноповѣряющимъ формуламъ синусовъ:

$$a=b\frac{\sin A}{\sin B}=c\frac{\sin A}{\sin C}$$

или по формуламъ Мольвейде (40):

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}$$

Для того, чтобы задача имѣла рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы при рѣшеніи уравненій (**) для B и C получились положительныя значенія.

Такъ какъ $A < 180°$ и $\frac{1}{2} A < 90°$, а M положительный уголъ, то $B = (90° - \frac{1}{2}A) + M > 0$. Затѣмъ имѣемъ: $C = 90° - \left(\frac{1}{2}A + M\right) = 90° - \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C\right)$. Изъ равенства (*) имѣемъ: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B - C) < \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A$ или $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C) < \operatorname{tg}\left(90° - \frac{1}{2}A\right)$; но такъ какъ оба угла положительные и меньше 90°, а мы знаемъ, что для угловъ отъ 0° до 90° большему тангенсу соотвѣтствуетъ большій уголъ, то $\frac{1}{2}(B - C) < 90° - \frac{1}{2}A$, откуда: $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C < 90°$, а потому $C > 0$.

Итакъ, при всякихъ значеніяхъ заданныхъ величинъ мы получаемъ для угловъ B и C положительныя значенія. Значитъ, задача всегда возможна. Этотъ выводъ вполнѣ согласенъ съ тѣмъ, что намъ извѣстно изъ геометріи.

Повѣрка состоитъ въ томъ, что значеніе a, вычисленное по двумъ формуламъ Мольвейде, должно быть одно и то же.

Примѣръ. Даны: $b = 421{,}77$ m.; $c = 305{,}25$ m. и уголъ между ними $A = 107° 3'56''$.

Вычисленіе угловъ B и C.

$b = 421{,}77$ m	$A = 107° 3'56''$
$c = 305{,}25$ »	$\frac{1}{2}A = 53\ 31\ 58$
$b - c = 116{,}52$ »	$\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 36\ 28\ 2$
$b + c = 727{,}02$ »	$\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = 6\ 45\ 19$
$\operatorname{Log}(b - c) = 2{,}06640$	$B = 43\ 13\ 21$
$\operatorname{Log}(b + c) = 2{,}86154$	$C = 29\ 42\ 43$
$\operatorname{Log}\frac{b-c}{b+c} = 9{,}20486$	$A = 107\ 3\ 56$
$\operatorname{Log}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A = 9{,}86869$	$A + B + C = 180°\ 0'\ 0''$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B - C) = 9{,}07355$	

Вычисленіе стороны a.

$$\text{Log}\,(b+c) = 2{,}86154 \qquad \text{Log}\,(b-c) = 2{,}06640$$

$$\text{Log}\sin\frac{1}{2}A = 9{,}90537 \qquad \text{Log}\cos\frac{1}{2}A = 9{,}77406$$

$$\text{Log}\sec\frac{1}{2}(B-C) = 0{,}00303 \qquad \text{Log}\,\text{cosec}\frac{1}{2}(B-C) = 0{,}92948$$

$$\text{Log}\,a = 2{,}76994 \qquad \text{Log}\,a = 2{,}76994$$

Въ обоихъ случаяхъ $a = 588{,}76$ m. Рѣшеніе вѣрно.

§ 35. Упражненія и задачи.

4. Вычислить треугольники по слѣдующимъ даннымъ:

а. $a = 125{,}76$ саж.; $b = 206{,}39$ саж. и $C = 39°47'12''$.
б. $a = 304{,}2$ m; $c = 179{,}3$ m и $B = 102°34'50''$.
в. $b = 41{,}567$; $c = 24{,}379$ и $A = 13°\,5'\,8''$.
г. $b = 25{,}632$ cm; $c = 30{,}598$ cm и $A = 95°28'48''$.
д. $a = 532{,}6$ саж.; $c = 269{,}8$ саж. и $B = 55°32'8''$.
е. $a = 8525$ ф.; $b = 5583$ ф. и $C = 109°35'16''$.

5. Даны: равнодѣйствующая $R = 5{,}73$ клгр., составляющая $P = 2{,}86$ клгр. и уголъ между ними $A = 30°29'$. Вычислить другую составляющую Q и уголъ C, составляемый ею съ равнодѣйствующею R.

6. Силу $R = 40$ клгр. разложить на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна $P = 18{,}563$ клгр. образуетъ съ данною силою уголъ $A = 60°37'48''$; какъ велика другая составляющая Q, и какой уголъ B она составляетъ съ данною силою R?

7. Двѣ силы $P = 31{,}5$ клгр. и $Q = 16{,}8$ клгр. дѣйствуютъ на матеріальную точку подъ угломъ $\alpha = 88°13'43''$. Чему равны равнодѣйствующая R и углы, ею составляемые съ данными силами?

§ 36. Случай III. Даны двѣ стороны a и b и уголъ, лежащій противъ одной изъ нихъ, напримѣръ A; рѣшить треугольникъ.

Уголъ B, лежащій противъ стороны b, вычисляется по формулѣ синусовъ:

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A.$$

Для возможнаго рѣшенія необходимо, чтобы $\sin B = \frac{a}{b}\sin A$ былъ меньше или равенъ единицѣ; если же $\frac{b}{a}\sin A > 1$, то рѣшенія нѣтъ. Исключивъ послѣдній случай, какъ не имѣющій рѣшенія, разсмотримъ два первыхъ отдѣльно.

I. Если $\sin B = \frac{b}{a}\sin A = 1$, то $B = 90°$, и разсматриваемый нами треугольникъ будетъ прямоугольнымъ при B. Дальнѣйшее его рѣшеніе производится по формуламъ: $C = 90° - A$ и $c = a \operatorname{cotg} A$. Для повѣрки служатъ формулы (44).

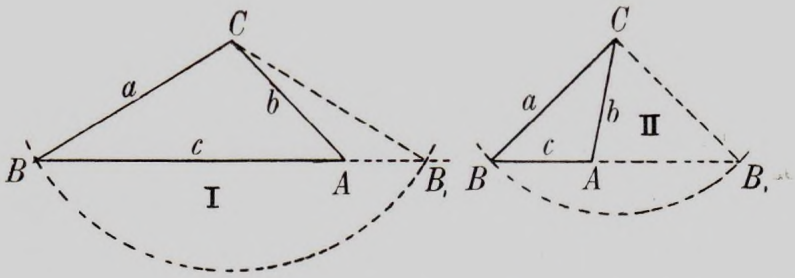
II. $\sin B = \frac{b}{a}\sin A < 1$. Такъ какъ уголъ B опредѣляется по синусу, то для него получается два значенія B_1 и B_2, при чемъ $B_1 < 90°$, а $B_2 = 180° - B_1$. Для рѣшенія вопроса о томъ, которое изъ этихъ значеній выражаетъ уголъ искомаго треугольника, слѣдуетъ обратить вниманіе на длину данныхъ сторонъ a и b. Здѣсь могутъ представиться три случая:

$$1)\ b < a,\ 2)\ b = a \text{ и } 3)\ b > a.$$

1. $b < a$. Такъ какъ въ каждомъ треугольникѣ большей сторонѣ противолежитъ бо́льшій уголъ, то при $b < a$ и $B < A$. Каковъ бы ни былъ данный уголъ A,—острый или тупой, уголъ B будетъ всегда острый, такъ какъ, съ одной стороны, онъ меньше угла A, а съ другой — въ треугольникѣ не можетъ быть двухъ тупыхъ угловъ. Итакъ, изъ двухъ значеній угла B, получаемыхъ по его синусу: $\sin B = \frac{b}{a}\sin A$, имѣетъ мѣсто только то, которое меньше $90°$.

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи производится по формуламъ $c = 180° - (A + B)$ и $c = a\frac{\sin C}{\sin A} = a \sin C \operatorname{cosec} A$.

Геометрическое построеніе въ этомъ случаѣ приводитъ также къ единственному рѣшенію. На произвольно избранной линіи BA отложимъ данный уголъ A: острый на первомъ рисункѣ и тупой на второмъ. По сторонѣ угла A отложимъ данную сторону $b = AC$; затѣмъ, изъ точки C, какъ центра, опишемъ кругъ радіуса $a > b$. Онъ пере-



сѣчетъ линію BA въ двухъ точкахъ B и B_1, но только одна изъ нихъ соотвѣтствуетъ задачѣ. Дѣйствительно, соединивъ B съ C, мы получимъ искомый треугольникъ ABC. Соединеніе съ C другой точки пересѣченія круга съ прямою BA, именно CB_1 не дастъ искомаго треугольника, такъ какъ въ треугольникахъ AB_1C уголъ при точкѣ A не есть данный, а равенъ $180°-A$.

Если заданный уголъ A прямой, то получается прямоугольный треугольникъ, AC перпендикулярно къ AB, и точки пересѣченія B и B_1 равно удалены отъ основанія A: получаются два равновеликихъ и симметрично расположенныхъ прямоугольныхъ треугольника.

2. $b=a$. При равенствѣ двухъ сторонъ треугольникъ становится равнобедреннымъ и $B=A$. Третій уголъ C опредѣляется изъ основного уравненія:

$$C=180°-(A+B)=180°-2A.$$

Третья сторона опредѣляется по формулѣ синусовъ:

$$c=a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Другого рѣшенія нѣтъ.

3. $b>a$. Если $b>a$, то уголъ B долженъ быть болѣе A; если, поэтому, данный уголъ A тупой, то рѣшенія быть не можетъ. Если же $A<90°$, то для угла B возможны оба значенія B_1 и $B_2=180°-B_1$. Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ два рѣшенія. Въ первомъ рѣшеніи для B получается острый уголъ, а во второмъ—тупой.

Первое рѣшеніе:

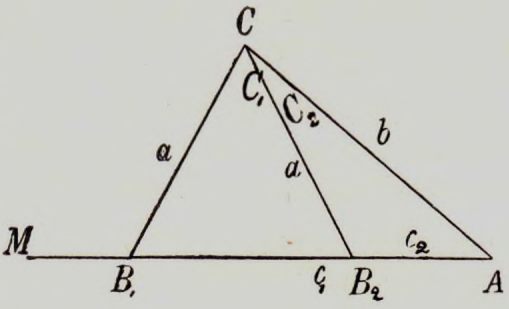
углы: $A,\ B = B_1$ и $C_1 = 180^\circ - (A + B_1)$;
стороны: $a,\ b$ и $c_1 = a \sin C_1 \operatorname{cosec} A$.

Второе рѣшеніе:

углы: $A, B_2 = 180^\circ - B_1$ и $C_2 = 180^\circ - A - (180^\circ - B_1) = B_1 - A$;
стороны: $a,\ b$ и $c_2 = a \sin C_2 \operatorname{cosec} A$.

Разсмотрѣнные случаи могутъ быть провѣрены геометрическимъ путемъ.

По линіи MA отложимъ данный уголъ $A = MAC$ и затѣмъ отъ A отложимъ данную сторону $b = AC$; изъ точки C, какъ центра, радіусомъ, равнымъ данной сторонѣ a, опишемъ кругъ, который пересѣчетъ прямую MA въ двухъ точкахъ B_1 и B_2; обѣ точки, соединенныя съ C, представятъ два треугольника AB_1C и AB_2C, удовлетворяющія заданію.



Въ треугольникѣ AB_1C имѣемъ: данныя a, b и A; искомыя: сторона $c_1 = AB_1$ и углы B_1 и C_1; $B_1 < 90^\circ$.

Въ треугольникѣ AB_2C имѣемъ тѣ же данныя a, b и A; а искомыя будутъ: сторона $c_2 = AB_2$, и углы B_2 и C_2; при чемъ $B_2 > 90^\circ$. Для тупого угла A нельзя построить треугольника при $a < b$.

§ 37. Примѣры и задачи.

1. Даны: $a = 1059{,}7$ m; $b = 3758{,}2$ m и $A = 73^\circ\ 52'\ 47''$.

Рѣшеніе: $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$.

Вычисленіе:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} b &= 3{,}57498 \\ \operatorname{Log} a &= 3{,}02519 \\ \operatorname{Log} \frac{b}{a} &= 0{,}54979 \\ \operatorname{Log} \sin A &= 9{,}98258 \\ \operatorname{Log} \sin B &= 0{,}53237 \end{aligned}$$

Рѣшеніе невозможно, такъ какъ $\sin B > 1$.

2. Даны; $a = 5793{,}3$ m; $b = 3891{,}6$ m и $A = 49^\circ\ 34'\ 15''$.

Рѣшеніе: $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$.

Вычисленіе:

$\operatorname{Log} b = 3{,}59013$
$\operatorname{Log} a = 3{,}76292$
$\operatorname{Log} \frac{b}{a} = 9{,}82721$
$\operatorname{Log} \sin A = 9{,}88151$
$\operatorname{Log} \sin B = 9{,}70872$
$B_1 = 30^\circ\ 45'\ 14''$
и $B_2 = 149^\circ\ 14'\ 16''$.

Такъ какъ $b < a$, то $B < A$ и B_2 не имѣетъ мѣста. Дальнѣйшее рѣшеніе производится по формулѣ: $C = 180^\circ - (A + B_1)$; $c = a \sin C \operatorname{cosec} A$.

$B_1 = 30^\circ\ 45'\ 14''$
$A = 49\ 34\ 15$
$A + B_1 = 80\ 19\ 29$
$C = 99\ 40\ 31$

$\operatorname{Log} a = 3{,}76292$
$\operatorname{Log} \sin C = 9{,}99378$
$\operatorname{Log} \operatorname{cosec} A = 0{,}11849$
$\operatorname{Log} c = 3{,}87519$
$c = 7502{,}2$ m

Повѣрка по формулѣ (44):

$\operatorname{Log} a = 3{,}76292$
$\operatorname{Log} \cos B_1 = 9{,}93418$
$\operatorname{Log} b = 3{,}59013$
$\operatorname{Log} \cos A = 9{,}81191$
$\operatorname{Log} a \cos B_1 = 3{,}69710$
$\Sigma = +0{,}17809$
$\operatorname{Log} b \cos A = 3{,}40204$
$R = 0{,}29506$
$\operatorname{Log} c = 3{,}87519$

Рѣшеніе вѣрно.

3. Даны: $a = 205{,}3$ саж.; $b = 98{,}5$ саж., и $A = 149^\circ\ 54'\ 37''$.

Вычисленіе:

$\operatorname{Log} b = 1{,}99344$
$\operatorname{Log} a = 2{,}31239$
$\operatorname{Log} \frac{b}{a} = 9{,}68105$
$\operatorname{Log} \sin A = 9{,}70014$
$\operatorname{Log} \sin B = 9{,}38119$
$B_1 = 13^\circ\ 55'\ 7''$
и $B_2 = 166^\circ\ 4'\ 53''$.

Такъ какъ $b < a$, то $B < A$ и B_2 не имѣетъ мѣста. Дальнѣйшее вычисленіе производится по формуламъ:

$C = 180^\circ - (A + B_1)$
и $c = a \sin C \operatorname{cosec} A$.

$B_1 = 13^\circ\ 55'\ 7''$
$A = 149\ 54\ 37$
$A + B_1 = 163\ 49\ 44$
$C = 16\ 10\ 16$

$\text{Log } a = 2{,}31239$
$\text{Log sin } C = 9{,}44480$
$\text{Log cosec } A = 0{,}29986$
$\text{Log } c = 2{,}05705$
$c = 114{,}0$ саж.

Повѣрка по формулѣ (44):
$\text{Log } a = 2{,}31239$
$\text{Log cos } B = 9{,}98706$
$\text{Log } b = 1{,}99344$
$\text{Log cos } A = 6{,}93714n$
$\text{Log } a \cos B = 2{,}29945$
$\Delta = -0{,}24237$
$\text{Log } b \cos A = 1{,}93058n$
$R = 0{,}36887$
$\text{Log } c = 2{,}05708$
Рѣшеніе вѣрно.

4. Даны: $a = b = 587{,}59$ m и $A = 70^\circ\ 37'\ 38''$. Вычислить c, B и C.

Рѣшеніе: треугольникъ равнобедренный. $B = A$; $C = 180^\circ - 2A$ и $c = a \sin C \operatorname{cosec} A$. Повѣрка: $\sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \frac{c}{b}$*).

Вычисленіе:
$B = A = 70^\circ\ 37'\ 48''$
$2A = 141\ 15\ 36$
$C = 38\ 44\ 24$
$\text{Log } a = 2{,}76907$
$\text{Log sin } C = 9{,}79642$
$\text{Log cosec } A = 0{,}02531$
$\text{Log } c = 2{,}59080$
$c = 389{,}76$ m

Повѣрка:
$\text{Log } c = 2{,}59080$
$\text{Log } a = 2{,}76907$
$\text{Log } \frac{c}{a} = 9{,}82173$
$\text{lg } {}^1/_2 = 9{,}69897$
$\text{Log sin } {}^1/_2 C = 9{,}52070$
${}^1/_2 C = 19^\circ\ 22'\ 12''$
$C = 38^\circ\ 44'\ 24''$
Рѣшеніе вѣрно.

*) Опустивъ перпендикуляръ изъ вершины угла C на основаніе c, мы раздѣлимъ пополамъ какъ уголъ C, такъ и основаніе c.

5. Даны: $a=378{,}95$ m, $b=507{,}84$ m и $A=18°23'18''$.

Рѣшеніе уравненія: $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$.

Вычисленіе:

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} b &= 2{,}70573\\ \operatorname{Log} a &= 2{,}57858\\ \hline \operatorname{Log}\frac{b}{a} &= 0{,}12715\\ \operatorname{Log}\sin A &= 9{,}49893\\ \hline \operatorname{Log}\sin B &= 9{,}62608\end{aligned}$$

$B_1=25°\ 0'\ 29''$ и $B_2=154°\ 59'\ 31''$.

Такъ какъ $b>a$, то задача имѣетъ 2 рѣшенія:

Рѣшеніе 1:

$C_1=180°-(A+B_1)$;
$c_1=a\sin C_1\operatorname{cosec} A_1$.

$$\begin{aligned}B_1 &= 25°\ 0'\ 29''\\ A &= 18\ 23\ 18\\ \hline A+B_1 &= 43\ 23\ 47\\ C_1 &= 136\ 36\ 13\\ \hline \operatorname{Log} a &= 2{,}57858\\ \operatorname{Log}\sin C_1 &= 9{,}83698\\ \operatorname{Log}\operatorname{cosec} A &= 0{,}50107\\ \hline \operatorname{Log} c_1 &= 2{,}91663\\ c_1 &= 825{,}34\text{ m.}\end{aligned}$$

Рѣшеніе 2:

$C_2=180°-(A+B_2)$;
$c_2=a\sin C_2\operatorname{cosec} A$.

$$\begin{aligned}B_2 &= 154°\ 59'\ 31''\\ A &= 18\ 23\ 18\\ \hline A+B_2 &= 173\ 22\ 49\\ C_2 &= 6\ 37\ 11\\ \hline \operatorname{Log} a &= 2{,}57858\\ \operatorname{Log}\sin C_2 &= 9{,}06175\\ \operatorname{Log}\operatorname{cosec} A &= 0{,}50107\\ \hline \operatorname{Log} c_2 &= 2{,}14140\\ c_2 &= 138{,}48\text{ m.}\end{aligned}$$

Повѣрка производится по формулѣ (44): $c=b\cos A+a\cos B$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} b &= 2{,}70573\\ \operatorname{Log}\cos A &= 9{,}97724\\ \operatorname{Log} b\cos A &= 2{,}68297\\ \Sigma &= +0{,}23366\\ \Delta &= -0{,}54155\\ \operatorname{Log} a\cos B &= 2{,}53583\ (n)\\ \hline R &= 0{,}14714\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} a &= 2{,}57858\\ \operatorname{Log}\cos B &= 9{,}95725\ (n)\end{aligned}$$

По аргументу R мы пріискиваемъ логариѳмъ суммы для c_1 и логариѳмъ разности для c_2

$\operatorname{Log} c_1=2{,}91663$ и $c_1=825{,}34$ m; $\operatorname{Log} c_2=2{,}14142$ и $c_2=138{,}49$ m.

Разногласіе для c_2 на 0,01 m вполнѣ допустимо. Рѣшеніе вѣрно.

Вычислить треугольники по слѣдующимъ даннымъ:

8. $a = 42{,}75$ m; $b = 33{,}29$ m и $A = 75°43'27''$.
9. $a = 115{,}26$ саж.; $b = 127{,}59$ саж. и $B = 147°52'19''$.
10. $a = 75{,}23$ cm.; $c = 102{,}53$ cm и $A = 23°49'56''$,
11. $b = c = 112{,}73$ m; $B = C = 14°5'48''$.
12. $b = 23{,}47$; $c = 10{,}54$ и $C = 173°21'17''$.
13. $b = 102{,}3$ m; $c = 154{,}3$ m и $B = 8°13'49''$.
14. $a = 10{,}56$ m; $c = 13{,}37$ m и $C = 96°17'50''$.
15. Даны: равнодѣйствующая $R = 52$ клгр., одна изъ составляющихъ $P = 37$ клгр. и уголъ $A = 31°25'$, образуемый другою составляющею съ равнодѣйствующею. Вычислить вторую составляющую Q и уголъ, образуемый первою составляющею P съ равнодѣйствующею R.

§ 38. Случай IV. Даны сторона a и прилежащіе углы B и C; рѣшить треугольникъ.

Уголъ A опредѣлится по формулѣ

$$A = 180° - (B + C),$$

а стороны по формулѣ синусовъ:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A} = a \sin B \operatorname{cosec} A$$

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A} = a \sin C \operatorname{cosec} A$$

Рѣшеніе возможно для всѣхъ угловъ, удовлетворяющихъ неравенству $B + C < 180°$.

Для провѣрки вычисляемъ обратно сторону a по формулѣ (44): $a = b \cos C + c \cos B$.

Примѣръ: $a = 347{,}25$ m, $B = 36°48'52''$ и $C = 52°35'43''$.

$B = 36°\ 48'\ 52''$	$\operatorname{Log} a \sin B = 2{,}31823$
$C = 52\ \ 35\ \ 43$	$\operatorname{Log} \operatorname{cosec} A = 0{,}00002$
$B + C = 89\ \ 24\ \ 35$	$\operatorname{Log} a \sin C = 2{,}44066$
$A = 90\ \ 35\ \ 25$	$\operatorname{Log} b = 2{,}31825$
$\operatorname{Log} \sin B = 9{,}77759$	$\operatorname{Log} c = 2{,}44068$
$\operatorname{Log} a = 2{,}54064$	$b = 208{,}09$ m.
$\operatorname{Log} \sin C = 9{,}90002$	$c = 275{,}86$ m.

Повѣрка:

$\text{Log } c = 2{,}44068$
$\text{Log cos } B = 9{,}90340$
$\text{Log } b = 2{,}31825$
$\text{Log cos } C = 9{,}78350$

$\text{Log } c \cos B = 2{,}34408$
$\Sigma = +0{,}19655$
$\text{Log } b \cos C = 2{,}10175$
$R = 0{,}24233$
$\text{Log } a = 2{,}54063$

Рѣшеніе вѣрно.

§ 39. Упражненія и задачи.

Вычислить треугольникъ по слѣдующимъ даннымъ:

16. $a = 43{,}785$ саж.; $B = 63^\circ\,7'48''$ и $C = 40^\circ 53'14''$.
17. $a = 13{,}26$ д., $A = 38^\circ 47'51''$ и $B = 93^\circ 21'35''$.
18. $a = 275{,}2$ cm, $A = 123^\circ 39'26''$ и $C = 46^\circ 52'41''$.
19. $b = 125{,}6$ саж., $A = 83^\circ 17'28''$ и $C = 64^\circ 36'18''$.
20. $b = 1126{,}9$ ф., $B = 13^\circ 51'43''$ и $C = 20^\circ 34'57''$.
21. $b = 25{,}32$ mm, $A = 40^\circ 13'56''$ и $B = 71^\circ 34'48''$.
22. $c = 83{,}6$ саж., $A = 49^\circ 51'30''$ и $B = 95^\circ\,6'17''$.
23. $c = 2475{,}8$ m, $A = 32^\circ 57'40''$ и $C = 142^\circ 15'49''$.
24. $c = 57{,}23$ арш., $B = 152^\circ 30'18''$ и $C = 20^\circ 19'45''$.

25. Двѣ силы дѣйствуютъ на матеріальную точку подъ угломъ $\alpha = 70^\circ 13'54''$; одна изъ нихъ $P = 2{,}37$ клгр. составляетъ съ равнодѣйствующею уголъ $\beta = 25^\circ 40'37''$. Какъ велики другая составляющая Q и равнодѣйствующая R?

26. Разложить силу $R = 25{,}742$ клгр. на двѣ другія P и Q, составляющія съ данною силою R углы $\alpha = 37^\circ 23'40''$ и $\beta = 40^\circ 34'58''$.

27. Отдаленный предметъ N отстоитъ отъ двухъ точекъ A и B на разстояніи x и y; разстояніе же между точками $AB = 5373{,}2$ саж. Угломѣрнымъ инструментомъ измѣрили углы $NAB = 53^\circ 17'18''$ и $NBA = 64^\circ 51'47''$. Вычислить разстоянія $x = NA$ и $y = NB$.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Вычисленіе площадей треугольниковъ.

§ 40. Вычисленіе площадей прямоугольныхъ треугольниковъ. Площадь треугольника F равняется основанію, умноженному на половину высоты. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ взять за основаніе одинъ изъ катетовъ, то другой будетъ высотою треугольника и, слѣдовательно:

$$F = \frac{1}{2} bc$$

Подставляя вмѣсто b и c ихъ значенія, выведенныя при рѣшеніи прямоугольныхъ треугольниковъ (30) и (31), мы получимъ слѣдующія выраженія для площади F:

$$\left.\begin{aligned} F = \frac{1}{2} bc &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \cos B = \frac{1}{2} ac \sin B \\ &= \frac{1}{2} ac \cos C = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} C \quad = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{cotg} B \\ &= \frac{1}{2} c^2 \operatorname{tg} B \quad = \frac{1}{2} c^2 \operatorname{cotg} C = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin C \cos C \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (45)$$

Примѣненіе той или другой изъ этихъ формулъ зависитъ отъ условій заданія.

Примѣръ. Даны: гипотенуза $a = 352{,}7$ m и уголъ $B = 30°28'47''$. Вычислить площадь прямоугольнаго треугольника.

Рѣшеніе: $F = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B$; повѣрка: вычисляется катетъ $b = a \sin B$ и $b = \frac{2F}{a \cos B}$.

Вычисленіе:

$\text{Log } a = 2{,}54741$

$\text{Log } a^2 = 5{,}09482$

$\text{Log } \frac{1}{2} = 9{,}69897$

$\text{Log } \frac{1}{2} a^2 = 4{,}79379$

$\text{Log sin } B = 9{,}70521$

$\text{Log cos } B = 9{,}93541$

$\text{Log } F = 4{,}43441$

$F = 27190 \text{ m}^2$

Повѣрка.

$\text{Log sin } B = 9{,}70521$

$\text{Log } a = 2{,}54741$

$\text{Log cos } B = 9{,}93541$

$\text{Log } b = 2{,}25262$

$\text{Log } F = 4{,}43441$

$\text{Log } 2 = 0{,}30103$

$\text{Log } 2F = 4{,}73544$

$\text{Log } a \cos B = 2{,}48282$

$\text{Log } b = 2{,}25262$

Рѣшеніе вѣрно.

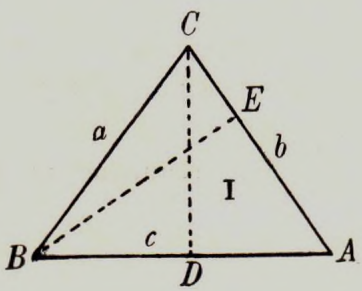
§ 41. Упражненія.

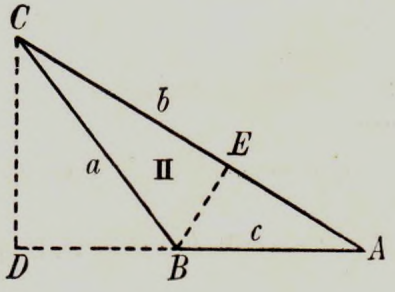
Вычислить площадь прямоугольныхъ треугольниковъ по слѣдующимъ даннымъ:

1. $a = 532$ саж.; $B = 43^\circ\ 7'54''$
2. $a = 127{,}3$ саж.; $C = 59^\circ\ 4'20''$
3. $a = 25{,}3$ ф.; $b = 18{,}7$ ф.
4. $a = 1257$ m; $c = 935$ m.
5. $b = 57{,}3$ д.; $B = 72^\circ 56'33''$
6. $c = 573{,}4$ саж.; $C = 73^\circ 13'47''$
7. $b = 34{,}5$ m; $C = 47^\circ 54'39''$
8. $c = 234{,}8$ саж.; $B = 38^\circ 17'28''$

§ 42. Вычисленіе площадей косоугольныхъ треугольниковъ.

Пусть ABC будетъ нѣкоторый остроугольный (I) или тупоугольный (II) треугольникъ. Примемъ сторону $AB = c$ за основаніе. Изъ вершины C опустимъ перпендикуляръ CD на основаніе или его продолженіе: онъ будетъ высотою тре-





угольниковъ I или II. Въ обоихъ случаяхъ площадь треугольника $F = \frac{1}{2} c \times CD$, но $CD = b \sin A = a \sin B$; поэтому

$$F = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Принявъ за основаніе сторону a, мы получимъ, кромѣ того, $F = \frac{1}{2} ab \sin C$ и, слѣдовательно:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Мы получили такое же выраженіе, какъ и для площади прямоугольнаго треугольника (45).

Итакъ: *Площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ сторонъ треугольника, умноженнаго на синусъ угла, между ними заключающагося.*

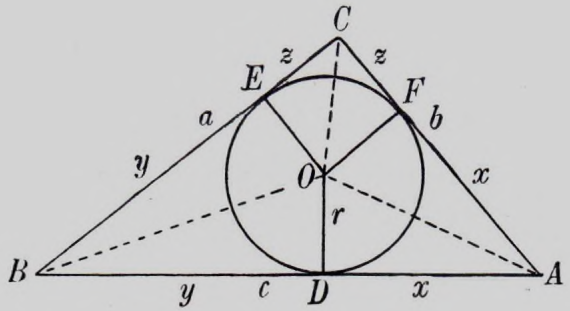
Если въ первомъ изъ этихъ выраженій (46) исключить b, во второмъ—c и въ третьемъ—a, пользуясь формулами синусовъ (35), то получимъ:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin (B+C)} \\ F &= \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin (A+C)} \\ F &= \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin (A+B)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Вычисленіе площадей по послѣднимъ формуламъ удобно въ томъ случаѣ, если даны одна сторона и два угла треугольника, тогда какъ вычисленіе площадей по первымъ (46) примѣняется въ тѣхъ случаяхъ, когда даны двѣ стороны и уголъ, между ними заключающійся.

Выраженію площади треугольника можетъ быть данъ другой видъ, примѣняемый въ томъ случаѣ, если даны три стороны треугольника.

Пусть ABC будетъ данный треугольникъ. Впишемъ въ него кругъ, центръ котораго находится въ точкѣ O, а радіусъ $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, гдѣ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ есть полупериметръ треугольника (37). Площадь даннаго тре-



угольника равна суммѣ площадей трехъ треугольниковъ *BOC*, *COA* и *AOB*; ихъ же площади равны:

$$\triangle BOC = \frac{1}{2}ra; \quad \triangle COA = \frac{1}{2}rb; \quad \triangle AOB = \frac{1}{2}rc$$

слѣдовательно $F = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

или $F = rs$ . . . . . (48)

т. е. *площадь треугольника равна полупериметру его, помноженному на радіусъ вписаннаго круга.*

§ 43. Упражненія.

Вычислить площади косоугольныхъ треугольниковъ по слѣдующимъ даннымъ:

9. $a = 48{,}2$ саж.; $b = 52{,}4$ саж.; $c = 60{,}8$ саж.
10. $a = 13{,}26$ д.; $A = 38°47'51''$ и $B = 93°21'35''$.
11. $a = 275{,}2$ cm; $A = 123°39'26''$ и $C = 46°52'41''$.
12. $b = 125{,}6$ саж.; $A = 83°17'28''$ и $C = 64°36'18''$.
13. $b = 160{,}99$ саж.; $B = 13°57'43''$ и $C = 20°34'57''$.
14. $b = 25{,}32$ mm; $A = 40°13'56''$; $B = 71°34'48''$.
15. $c = 83{,}6$ саж.; $A = 49°51'30''$; $B = 95°\ 6'17''$
16. $c = 2475{,}8$ m; $A = 32°57'40''$; $C = 142°15'49''$.
17. $c = 57{,}23$ арш.; $B = 152°30'18''$; $C = 20°19'45''$.
18. $a = 42{,}75$ m; $b = 33{,}29$ m; $A = 75°43'27''$.
19. $a = 115{,}26$ саж: $b = 127{,}59$ саж.; $B = 147°52'19''$.
20. $a = 75{,}23$ cm; $c = 102{,}53$ cm; $A = 23°49'56''$.
21. $b = c = 112{,}73$ m; $B = 14°\ 5'48''$
22. $b = 23{,}47$; $c = 10{,}54$; $C = 173°21'17''$.
23. $b = 102{,}3$ m; $c = 154{,}3$; $B = 8°13'49''$.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

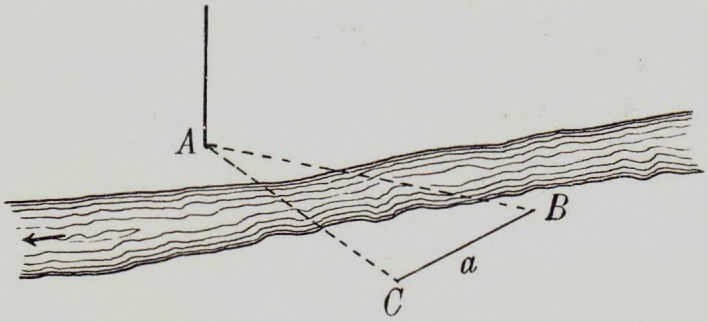
Приложеніе рѣшенія треугольниковъ къ рѣшенію геометрическихъ задачъ на вычисленіе.

Пользуясь правилами вычисленія треугольниковъ, мы можемъ рѣшить рядъ полезныхъ задачъ; мы раздѣлимъ ихъ на задачи: А) въ полѣ, Б) на плоскости, В) въ пространствѣ и Г) задачи о правильныхъ многоугольникахъ.

А. Задачи въ полѣ.

§ 44. Въ настоящемъ отдѣлѣ мы предложимъ нѣсколько задачъ, встрѣчающихся на практикѣ.

1. Опредѣленіе разстоянія до недоступнаго предмета. Положимъ, требуется опредѣлить разстояніе отъ C до недоступнаго предмета A, лежащаго за рѣкою.



Въ мѣстности, предполагаемой горизонтальной, на нѣкоторомъ разстояніи отъ точки C, съ которой виденъ предметъ A, выберемъ точку B такъ, чтобы съ нея были видны предметъ A и точка C.

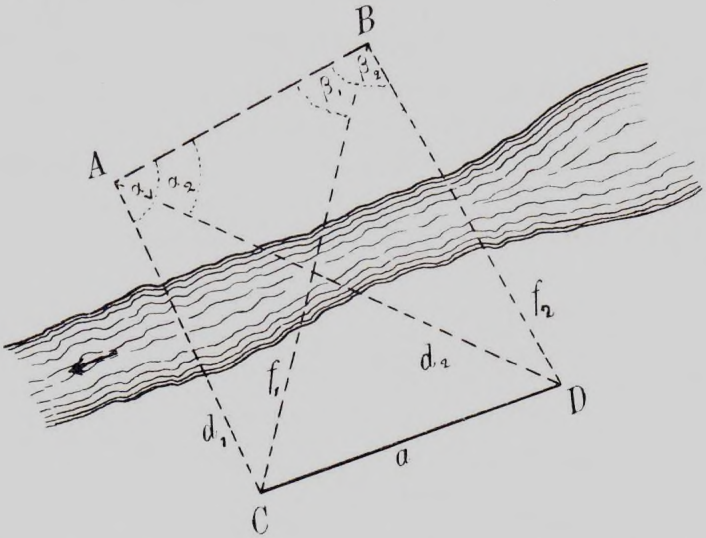
Измѣримъ длину линіи $BC = a$; затѣмъ ставимъ угломѣрный инструментъ въ одну изъ точекъ, напримѣръ C,

и измѣряемъ уголъ $ACB = C$, послѣ чего переносимъ инструментъ въ другую точку B, а на его мѣстѣ въ точкѣ C ставимъ вѣху. Изъ точки B измѣряемъ второй уголъ треугольника $ABC = B$.

Въ плоскомъ треугольникѣ ABC сторона BC и прилежащіе къ ней углы B и C измѣрены непосредственно; этотъ случай разсмотрѣнъ въ § 38. Мы имѣемъ рѣшеніе:

$$AC = b = a\frac{\sin B}{\sin (B + C)}.$$

2. Опредѣленіе разстоянія между двумя недоступными предметами. Положимъ, предметы A и B лежатъ за рѣкою, а наблюдатель находится по сю сторону рѣки въ точкѣ C; требуется опредѣлить разстояніе AB, не переѣзжая рѣки.



Для рѣшенія этой задачи выбираютъ другую точку D, изъ которой были бы видны обѣ недоступныя точки A и B и точка C. Измѣривъ разстояніе $CD = a$ между избранными точками C и D *), опредѣляютъ разстояніе избран-

*) Предполагается, что всѣ точки A, B, C и D лежатъ въ одной и той же горизонтальной плоскости.

ныхъ точекъ C и D до каждой изъ недоступныхъ точекъ A и B по правиламъ, изложеннымъ въ предыдущей задачѣ. Для этого измѣряютъ угломѣрнымъ инструментомъ съ точки C углы ACD и BCD, а съ точки D—углы ADC и BDC. По основанію a и прилежащимъ угламъ ACD и ADC вычисляются разстоянія $d_1 = CA$ и $d_2 = DA$. Затѣмъ въ треугольникѣ BDC по основанію a и прилежащимъ угламъ BCD и BDC вычисляются разстоянія $f_1 = CB$ и $f_2 = DB$.

Разсмотримъ треугольникъ ABC; въ немъ извѣстны: двѣ стороны d_1 и f_1 и уголъ между ними $ACB = ACD - BCD = C$; слѣдовательно треугольникъ рѣшается, и искомое разстояніе AB — третья сторона треугольника ABC — вычисляется по извѣстнымъ намъ правиламъ. То же искомое разстояніе можетъ быть вычислено изъ треугольника ABD по двумъ сторонамъ d_2 и f_2 и углу между ними $ADB = BDC - ADC = D$. Оба треугольника рѣшаются по правиламъ, изложеннымъ въ § 34; оба рѣшенія, полученныя для AB, должны быть тождественны между собою, что и служитъ повѣркою вычисленій.

Приводимъ самое рѣшеніе:

$$d_1 = a\frac{\sin ADC}{\sin(ADC + ACD)}; \qquad d_2 = a\frac{\sin ACD}{\sin(ADC + ACD)}$$

$$f_1 = a\frac{\sin BDC}{\sin(BDC + BCD)}; \qquad f_2 = a\frac{\sin BCD}{\sin(BDC + BCD)}$$

въ $\triangle ABC$	въ $\triangle ABD$
$C = ACD - BCD$	$D = BDC - ADC$
$\alpha_1 = BAC;\quad \beta_1 = ABC$	$\alpha_2 = BAD;\quad \beta_2 = ABD$

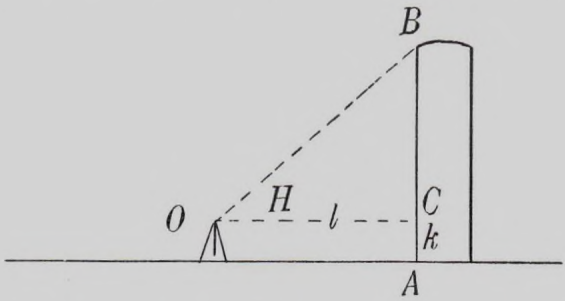
Для опредѣленія угловъ α и β имѣемъ въ каждомъ треугольникѣ слѣдующія системы уравненій:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ - C \qquad \alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ - D$$

$$\operatorname{tg}\frac{(\alpha_1 - \beta_1)}{2} = \frac{f_1 - d_1}{f_1 + d_1}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{(\beta_2 - \alpha_2)}{2} = \frac{d_2 - f_2}{d_2 + f_2}\operatorname{cotg}\frac{D}{2}$$

$$AB = d_1\frac{\sin C}{\sin\beta_1} = f_1\frac{\sin C}{\sin\alpha_1}; \qquad AB = d_2\frac{\sin D}{\sin\beta_2} = f_2\frac{\sin D}{\sin\alpha_2}$$

3. Опредѣленіе высоты доступной башни надъ горизонтальною плоскостью. Для рѣшенія этой задачи ставимъ угломѣрный инструментъ въ нѣкоторой точкѣ O, отстоящей отъ башни на разстояніе $OC = l$, и измѣряемъ $\angle BOC = H$ и высоту k инструмента надъ горизонтальною



плоскостью. Искомая высота $h = AB$ опредѣлится слѣдующимъ образомъ:

$$h = k + BC,$$

но

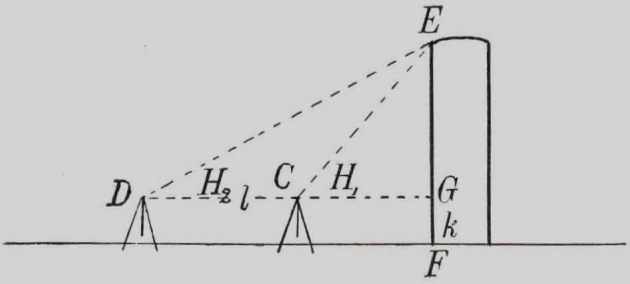
$$BC = l \operatorname{tg} H;$$

слѣдовательно

$$h = k + l \operatorname{tg} H.$$

4. Опредѣленіе высоты недоступной башни или горы надъ горизонтальною плоскостью.

1-й способъ. Пусть EF будетъ недоступная башня. Выберемъ двѣ точки C и D, лежащія на створѣ башни*).



*) Если двѣ линіи DE и CE лежатъ въ одной вертикальной плоскости съ третьей EG, то говорятъ, что онѣ лежатъ на створѣ третьей.

Пусть $CD = l$ будетъ измѣренное разстояніе между избранными точками D и C. Съ помощью угломѣрнаго прибора, помѣщеннаго въ обѣихъ точкахъ на одинаковой высотѣ k надъ горизонтальною плоскостью, измѣряютъ $\angle ECG = H_1$ и $\angle EDG = H_2$. Въ треугольникѣ EDC имѣемъ: сторону $CD = l$ и прилежащіе углы H_2 и $180° - H_1$; слѣдовательно треугольникъ рѣшается (§ 38). Стороны CE и DE опредѣляются по формуламъ:

$$CE = l\frac{\sin H_2}{\sin DEC} = l\frac{\sin H_2}{\sin (H_1 - H_2)}$$

и

$$DE = l\frac{\sin H_1}{\sin DEC} = l\frac{\sin H_1}{\sin (H_1 - H_2)}$$

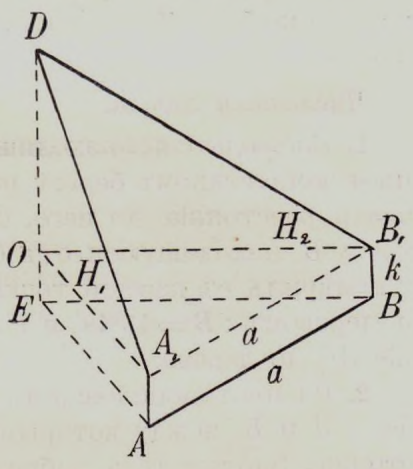
Затѣмъ изъ треугольника ECG или EDG выводимъ:

$$EG = CE \sin H_1 = DE \sin H_2 = l\frac{\sin H_1 \sin H_2}{\sin (H_1 - H_2)}$$

и получаемъ для высоты башни h слѣдующее выраженіе:

$$h = k + EG = k + l\frac{\sin H_1 \sin H_2}{\sin (H_1 - H_2)}.$$

2-й способъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, напримѣръ, если опредѣляемая высота очень значительная, выгоднѣе выбрать двѣ точки не на створѣ башни, горы и т. п. Положимъ, требуется измѣрить высоту горы DE. Выберемъ двѣ точки A и B, не лежащія на линіи, проходящей черезъ основаніе O горы; пусть разстояніе между ними будетъ $AB = a$. Затѣмъ угломѣрнымъ приборомъ, находящимся на высотѣ $B_1B = k$ надъ горизонтальною плоскостью, измѣримъ въ точкахъ A и B горизонтальные углы $OA_1B_1 = A$ и $OB_1A_1 = B$; въ



такомъ случаѣ треугольникъ A_1B_1O рѣшается, и мы вычисляемъ по извѣстнымъ намъ правиламъ стороны OA_1 и OB_1:

$$OA_1 = a\frac{\sin B}{\sin(A+B)} \text{ и } OB_1 = a\frac{\sin A}{\sin(A+B)}.$$

Для опредѣленія высоты OD намъ остается измѣрить или уголъ $DA_1O = H_1$, или $DB_1O = H_2$; зная одинъ изъ этихъ угловъ, мы опредѣляемъ OD изъ прямоугольныхъ треугольниковъ A_1OD и B_1OD:

$$\text{или изъ } \triangle A_1OD = OA_1 \operatorname{tg} H_1 = a\frac{\sin B}{\sin(A+B)}\operatorname{tg} H_1$$

$$\text{или изъ } \triangle B_1OD = OB_1 \operatorname{tg} H_2 = a\frac{\sin A}{\sin(A+B)}\operatorname{tg} H_2.$$

Иногда для контроля измѣряютъ оба угла.

Если инструментъ находится на высотѣ k надъ горизонтальною плоскостью, то высота горы h будетъ:

$$h = DE = k + OD = k + a\frac{\sin B}{\sin(A+B)}\operatorname{tg} H_1$$

или

$$h = k + a\frac{\sin A}{\sin(A+B)}\operatorname{tg} H_2.$$

Замѣтимъ, что если углы H_1 и H_2 измѣрены недостаточно точно, то величины OD, а слѣдовательно и h, полученныя по I-й и II-й формулѣ, могутъ нѣсколько отличаться одна отъ другой.

Численныя задачи.

1. Наблюдатель, находящійся въ точкѣ C, видитъ на противоположномъ берегу рѣки одинокое дерево A. Желая знать разстояніе до него, онъ выбралъ вспомогательную точку B, находящуюся отъ C на разстояніи $a = 123{,}4$ саж., и измѣрилъ съ каждой точки уголъ между другою точкою и деревомъ: $B = 47°48'$ и $C = 63°30'$. Вычислить разстояніе AC до дерева.

2. На противоположномъ берегу озера находятся два дома A и B, между которыми требуется опредѣлить разстояніе. Наблюдатель выбралъ двѣ точки C и D и измѣ-

рилъ между ними разстояніе $a = 231{,}7$ саж. Затѣмъ измѣрилъ углы:

съ точки C: $ACD = 91^\circ\ 2'47''$ и $BCD = 62^\circ 24'30''$
» » D: $ADC = 52^\circ 37'\ 8''$ и $BDC = 80^\circ 46'10''$

Вычислить разстояніе AB.

3. Угловая высота вершины дерева, измѣренная угломѣрнымъ приборомъ, находящимся на высотѣ $k = 0{,}47$ саж. надъ землею, равна $H = 47^\circ 13'$. Вычислить высоту дерева, если разстояніе отъ него до инструмента $l = 7{,}32$ саж.

4. Съ двухъ точекъ горизонтальной плоскости, лежащихъ на створѣ недоступной башни, измѣрены угловыя высоты вершины башни $H_1 = 63^\circ\ 5'33''$ и $H_2 = 51^\circ 53'\ 4''$. Вычислить высоту башни, если извѣстно, что разстояніе между точками $l = 2$ саж. и что инструментъ помѣщается на высотѣ $k = 0{,}31$ саж. надъ землею.

5. Двѣ точки горизонтальной плоскости, лежащія на створѣ вершины горы, высота которой надъ тою же плоскостью $h = 117{,}9$ m. усматриваются съ вершины горы подъ углами пониженія *) $\alpha = 22^\circ\ 3'40''$ и $\beta = 11^\circ\ 4'56''$; вычислить разстояніе между точками.

6. Съ высоты $h = 33{,}5$ саж. надъ уровнемъ озера наблюдалось изображеніе облака въ озерѣ; универсальнымъ инструментомъ измѣрены углы $a = 52^\circ 36'$ и $b = 60^\circ 48'$, составляемые прямымъ лучомъ, идущимъ отъ облака къ глазу наблюдателя и отраженнымъ отъ озера, съ горизонтальною плоскостью; вычислить высоту облака x надъ уровнемъ озера.

Б. Задачи на плоскости.

§ 45. Въ настоящемъ отдѣлѣ мы предложимъ нѣсколько задачъ на вычисленіе, рѣшаемыхъ на плоскости.

1. Рѣшить треугольникъ по данному углу C, противолежащей ему сторонѣ c и суммѣ двухъ другихъ сторонъ $a + b = m$.

*) Подъ угломъ пониженія понимается уголъ, составляемый направленіемъ на предметъ съ горизонтальною плоскостью, проходящею черезъ глазъ наблюдателя, въ томъ случаѣ, если наблюдаемый предметъ лежитъ ниже этой горизонтальной плоскости.

Изъ основного свойства суммы угловъ треугольника мы выводимъ

$$A+B=180^\circ-C.$$

По формулѣ Мольвейде (§ 27) опредѣляемъ разность тѣхъ же угловъ:

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a+b}{c}\sin\frac{1}{2}C=\frac{m}{c}\sin\frac{1}{2}C.$$

Зная сумму $A+B$ и разность $A-B$, мы опредѣляемъ и самые углы A и B:

$$A+B=180^\circ-C$$
$$A-B=N;$$

слѣдовательно:

$$A=90^\circ+\frac{N-C}{2} \text{ и } B=90^\circ-\frac{N+C}{2}$$

Затѣмъ стороны a и b опредѣлятся по формуламъ:

$$a=c\frac{\sin A}{\sin C} \text{ и } b=m-a=m-c\frac{\sin A}{\sin C}$$

Для повѣрки b опредѣляется по формуламъ синусовъ или по формулѣ (44):

$$b=c\frac{\sin B}{\sin C}=a\cos C+c\cos A.$$

Напримѣръ: $C=52^\circ 36' 48''$, $c=15{,}34$ m и $a+b=28{,}69$ m.

2. Рѣшить треугольникъ по даннымъ угламъ: A и B и периметру $2s=a+b+c$.

Третій уголъ C опредѣлится изъ основного уравненія:

$$C=180^\circ-(A+B).$$

Затѣмъ изъ формулы синусовъ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

выводимъ:

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2s}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$$

Опредѣливъ $2R$, мы вычисляемъ стороны a, b и c по формуламъ синусовъ:

$$a=2R\sin A;\quad b=2R\sin B \text{ и } c=2R\sin C.$$

Напримѣръ: $A=45^\circ 36' 51''$, $B=38^\circ 55' 42''$ и $2s=a+b+c=$ $=163{,}78$ саж.

3. Рѣшить треугольникъ по даннымъ: углу B, прилежащей сторонѣ a и суммѣ двухъ другихъ сторонъ $b+c=n$.

Мы имѣемъ:

$$a+b+c=a+n=2s \text{ и } s=\frac{a+n}{2}.$$

По формулѣ тангенса половиннаго угла имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b} \text{ и } \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c},$$

откуда, перемноживъ, получимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r^2}{(s-b)(s-c)},$$

но (§ 26):

$$r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s};$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}=\frac{n-a}{2s};$$

вторая часть состоитъ изъ извѣстныхъ величинъ, а такъ какъ уголъ B данъ, то изъ послѣдняго уравненія мы опредѣляемъ уголъ C:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{n-a}{2s}\operatorname{cotg}\frac{B}{2},$$

а затѣмъ уголъ A опредѣлится по основному уравненію:

$$A=180^\circ-(B+C).$$

Стороны b и c опредѣляются по формуламъ синусовъ:

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A};\quad c=a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Для повѣрки составляемъ сумму $b+c$, которая должна равняться данному значенію n.

Напримѣръ: $B=68^\circ 30' 54''$, $a=302,54$ m и $b+c=456,76$ m.

4. Рѣшить треугольникъ по даннымъ: углу B, прилежащей сторонѣ a и разности двухъ другихъ сторонъ $b-c=m$.

По формуламъ тангенса половиннаго угла треугольника мы имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{r}{s-c} \text{ и } \operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{r}{s-b},$$

гдѣ

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c) \text{ и } r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій мы выводимъ:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}=\frac{s-b}{s-c}$$

но

$$s-b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(b-c)=\frac{1}{2}(a-m)$$

$$s-c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(b-c)=\frac{1}{2}(a+m)$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{a-m}{a+m}\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.$$

Уголъ A опредѣлится по основной формулѣ:

$$A=180^\circ-(B+C),$$

а стороны b и c по формуламъ синусовъ:

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A} \text{ и } c=a\frac{\sin C}{\sin A};$$

для повѣрки имѣемъ $b-c=m$.

Напримѣръ: $B=53^\circ 45' 30''$, $a=55{,}66$ саж. и $b-c=m=$ $=13{,}30$ саж.

5. Рѣшить треугольникъ по углу A, противолежащей ему сторонѣ a и разности двухъ другихъ сторонъ $b-c=n$.

По формулѣ Мольвейде (§ 27) мы опредѣляемъ $B-C$:

$$\sin\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{a}\cos\frac{1}{2}A=\frac{n}{a}\cos\frac{1}{2}A,$$

а сумму тѣхъ же угловъ опредѣляемъ по основной формулѣ:

$$B+C=180^\circ-A.$$

Зная сумму и разность угловъ B и C, мы опредѣляемъ каждый изъ нихъ. Затѣмъ стороны b и c опредѣляются по формулѣ синусовъ:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{и} \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Для повѣрки составляемъ разность:

$$b - c = n.$$

Напримѣръ: $A = 46^\circ\ 7'\ 18''$, $a = 38{,}64$ саж. и $b - c = n = 7{,}58$ саж.

6. Рѣшить треугольникъ по даннымъ угламъ A и B и перпендикуляру h, опущенному изъ вершины угла A на противолежащую сторону.

Третій уголъ C опредѣлится по основному уравненію

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

а стороны опредѣлятся слѣдующимъ образомъ. Перпендикуляръ h дѣлитъ сторону a на два отрѣзка; одинъ изъ нихъ равенъ $h\operatorname{cotg} C$, а другой $h\operatorname{cotg} B$. Слѣдовательно

$$a = h(\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B) = \frac{h\sin(B+C)}{\sin B \sin C}$$

а стороны b и c опредѣлятся по формуламъ:

$$b = \frac{h}{\sin C} \quad \text{и} \quad c = \frac{h}{\sin B}$$

Для повѣрки вычисляемъ сторону a по формулѣ проекцій (44):

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

Напримѣръ: $A = 59^\circ\ 30'\ 12''$, $B = 39^\circ\ 58'\ 41''$ и $h = 125{,}73$ m.

7. Рѣшить треугольникъ по данной его площади F и по даннымъ угламъ A и B.

Третій уголъ опредѣляется по основной формулѣ

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Стороны же опредѣлятся по формуламъ (47):

$$F = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin A \sin C}{\sin B} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin A \sin B}{\sin C}$$

откуда выводимъ:

$$a=\sqrt{\frac{2F\sin A}{\sin B\,\sin C}};\ b=\sqrt{\frac{2F\sin B}{\sin A\,\sin C}}\ \text{и}\ c=\sqrt{\frac{2F\sin C}{\sin A\,\sin B}}$$

гдѣ для a, b и c берутся абсолютныя или ариѳметическія значенія корня.

Если мы помножимъ числителя и знаменателя подкоренныхъ выраженій: для стороны a — на $\sin A$, для стороны b — на $\sin B$, для стороны c — на $\sin C$, и для краткости обозначимъ:

$$K=\sqrt{\frac{2F}{\sin A\,\sin B\,\sin C}},$$

то получимъ весьма простыя формулы для вычисленія, именно:

$$a=K\sin A;\quad b=K\sin B;\quad c=K\sin C.$$

Величина K имѣетъ одинъ знакъ $+$, представляя абсолютное или ариѳметическое значеніе корня.

Для повѣрки мы вычисляемъ произведеніе:

$$a\,b\,c=K^3\sin A\sin B\sin C=2FK.$$

Напримѣръ: $F=2576{,}9\ \text{m}^2$; $A=40^\circ\,31'\,18''$ и $B=72^\circ\,54'\,14''$.

8. Рѣшить треугольникъ по даннымъ тремъ высотамъ его h, h' и h''.

Для рѣшенія треугольника, мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ.—Площадь треугольника равна:

$$F=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bh'=\frac{1}{2}ch'',$$

откуда

$$ah=bh'=ch''=2F$$

или

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{h}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{h'}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{1}{h''}\right)}=2F$$

Назовемъ для краткости:

$$\frac{1}{h}=H;\ \frac{1}{h'}=H'\ \text{и}\ \frac{1}{h''}=H'';$$

тогда предыдущая формула перепишется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{a}{H}=\frac{b}{H'}=\frac{c}{H''}=2F$$

Изъ этихъ отношеній мы выводимъ заключеніе, что если построить треугольникъ, стороны котораго суть H, H' и H'', то онъ будетъ подобенъ данному, имѣющему стороны a, b и c, пропорціональныя сторонамъ перваго треугольника; въ подобныхъ же треугольникахъ углы, противолежащіе пропорціональнымъ сторонамъ, равны между собою. Слѣдовательно противъ стороны H лежитъ такой же уголъ, какъ противъ стороны a, именно A; противъ H' лежитъ уголъ B, а противъ H''—уголъ C. Опредѣлимъ углы A, B и C по формулѣ тангенса половиннаго угла по тремъ сторонамъ треугольника H, H' и H'' (39):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\frac{r}{S-H}\ ;\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{r}{S-H'}\ \text{и}\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{r}{S-H''}$$

гдѣ

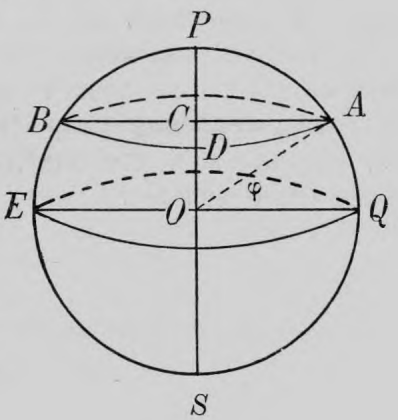
$$S=\frac{1}{2}(H+H'+H'')\quad\text{и}\quad r=\sqrt{\frac{(S-H)\,(S-H')\,(S-H'')}{S}}.$$

Послѣ опредѣленія угловъ искомаго треугольника, мы опредѣляемъ его стороны по формуламъ:

$$a=\frac{h'}{\sin C}=\frac{h''}{\sin B};\quad b=\frac{h}{\sin C}=\frac{h''}{\sin A}\quad\text{и}\quad c=\frac{h}{\sin B}=\frac{h'}{\sin A}.$$

Повѣрка производится по правиламъ § 32.

Напримѣръ: $h=20$ m; $h'=23$ m и $h''=25$ m; вычислить треугольникъ.



9. Вычислить длину параллели земного шара подъ географическою широтою φ, если радіусъ земного шара равенъ R.

Пусть PS будетъ ось земли, а $EQ \perp OP$ — пересѣченіе съ плоскостью экватора нѣкоторой меридіанальной пло-

скости. Пусть $\angle AOQ = \varphi$ будетъ данная географическая широта, а $OA = R$ — радіусъ земного шара. Проведемъ черезъ точку A плоскость параллельно плоскости экватора; она пересѣчетъ поверхность земного шара по кругу ABD, центръ котораго лежитъ на оси земли въ точкѣ C. Длина параллели ADB равна:

$$ADB = 2\pi\, AC,$$

но изъ прямоугольнаго треугольника OCA, въ которомъ $\angle A = \varphi$, имѣемъ:

$$AC = OA \cos\varphi = R\cos\varphi,$$

а потому

$$ADB = 2\pi R\cos\varphi.$$

Если данная широта $\varphi = 0$, то параллель совпадаетъ съ экваторомъ; тогда $\cos\varphi = 1$ и длина окружности экватора $EQ = 2\pi R$; если же разсматриваемая широта $\varphi = 90^\circ$, то параллель, соотвѣтствующая полюсу, исчезаетъ, такъ какъ $\cos 90^\circ = 0$ и слѣдовательно

$$ADB \text{ (для } \varphi = 90^\circ) = 0.$$

Этотъ выводъ очевиденъ, потому что черезъ полюсъ нельзя провести параллели; она сливается съ самимъ полюсомъ, т. е. съ точкою.

Напримѣръ, вычислить длину параллели для географической широты $\varphi = 58^\circ 35' 48''$ при $R = 6367{,}4$ km.

10. Въ равнобедренномъ треугольникѣ основаніе относится къ сторонѣ, какъ $m : n$; высота же треугольника равна h; вычислить треугольникъ.

Углы при основаніи назовемъ A и C: они равны между собою; уголъ же при вершинѣ будетъ B. Опустивъ изъ вершины перпендикуляръ на основаніе b, мы раздѣлимъ его пополамъ, и для опредѣленія угловъ A и C получимъ слѣдующее условіе:

$$\cos C = \cos A = \frac{b}{2a} = \frac{m}{2n}.$$

Уголъ B опредѣлится по основной формулѣ:

$$B = 180^\circ - 2A = 180^\circ - 2C.$$

Боковыя стороны a и c опредѣлятся изъ прямоугольныхъ треугольниковъ, составленныхъ перпендикуляромъ, боковыми сторонами и половиною основанія:

$$a = c = \frac{h}{\sin C} = \frac{h}{\sin A},$$

а основаніе изъ тѣхъ же треугольниковъ:

$$b = 2h \operatorname{cotg} C = 2h \operatorname{cotg} A.$$

Для повѣрки вычисляемъ основаніе по формулѣ синусовъ:

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Напримѣръ, $b : a = 3 : 5$ и $h = 14{,}7$ m.; вычислить треугольникъ.

11. Вычислить углы треугольника, стороны котораго относятся какъ $m : n : p$, напримѣръ, какъ $2 : 3 : 4$.

Построимъ треугольникъ, имѣющій сторонами m, n и p (для возможности построенія данныя числа должны удовлетворять условіямъ: $m + n > p$, $m + p > n$ и $n + p > m$). Искомый треугольникъ будетъ подобенъ построенному, потому что его стороны пропорціональны построенному, а такъ какъ соотвѣтственные углы подобныхъ треугольниковъ равны между собою, то достаточно вычислить углы треугольника, стороны котораго суть данныя числа m, n и p. Рѣшеніе подобнаго треугольника производится по правиламъ § 32.

12. Радіусъ круга, вписаннаго въ данный треугольникъ, равенъ R; между этимъ кругомъ и вершиною угла A вписанъ другой кругъ, касающійся перваго круга и сторонъ, образующихъ уголъ A. Опредѣлить радіусъ r второго круга.

Пусть KE будетъ кругъ радіуса R, вписаннаго въ данный треугольникъ ABC; $OE = R$. Пусть LI будетъ другой кругъ, вписанный въ уголъ A касательно къ первому кругу и къ сторонамъ угла A. Линія соединяющая центры обоихъ круговъ, дѣлитъ уголъ A пополамъ. Радіусъ малаго круга $DJ = r$.

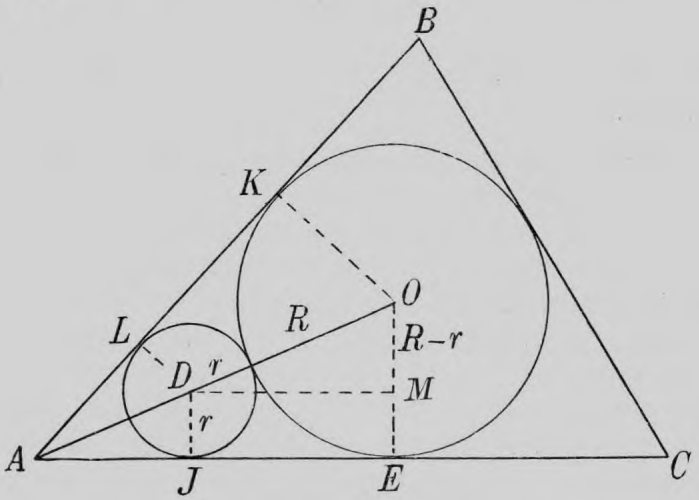
Проведемъ изъ центра D второго круга линію DM параллельно AC; мы получимъ прямоугольный треугольникъ DMO, въ которомъ катетъ $MO = R - r$, а гипотенуза $R + r$; уголъ же при D равенъ $\frac{1}{2} A$; поэтому:

$$\frac{R-r}{R+r} = \sin \frac{1}{2} A$$

откуда выводимъ:

$$r = R \frac{1 - \sin \frac{1}{2} A}{1 + \sin \frac{1}{2} A}$$

Напримѣръ, даны: $A = 48^\circ 36' 50''$ и $R = 20{,}30$ cm; вычислить r.



Примѣчаніе. Если между вторымъ кругомъ, о которомъ изложено въ настоящей задачѣ, и вершиною угла A впишемъ еще кругъ, радіусъ котораго r_1, то значеніе его опредѣляется подобнымъ же образомъ:

$$r_1 = r \frac{1 - \sin \frac{1}{2} A}{1 + \sin \frac{1}{2} A}$$

Выражая же радіусъ r_1 черезъ R, мы получимъ:

$$r_1 = R \left(\frac{1 - \sin \frac{1}{2} A}{1 + \sin \frac{1}{2} A} \right)^2$$

Если между третьимъ кругомъ и вершиною угла A впишемъ четвертый кругъ подобнымъ же образомъ, а затѣмъ

пятый, шестой и т. д., и назовемъ ихъ радіусы r_2, r_3 и т. д., то выведемъ:

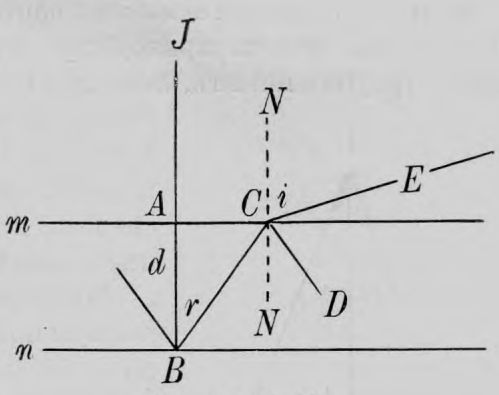
$$r_2 = R\left(\frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{1+\sin\frac{1}{2}A}\right)^3, \qquad r_3 = R\left(\frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{1+\sin\frac{1}{2}A}\right)^4$$

и т. д.

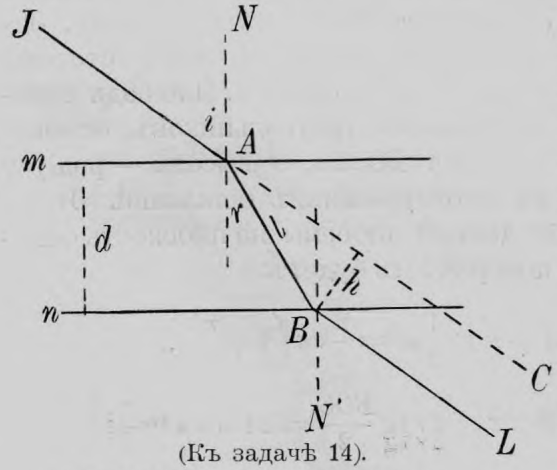
и вообще

$$r_k = R\left(\frac{1-\sin\frac{1}{2}A}{1+\sin\frac{1}{2}A}\right)^{k+1}.$$

13. На прозрачную стеклянную пластинку, ограниченную параллельными плоскостями m и n, падаетъ перпендикулярно лучъ свѣта IA. Противоположная плоскость n закрашена непрозрачнымъ веществомъ, такъ что лучъ свѣта отражается отъ B, расходясь во всѣ стороны какъ отъ свѣтящейся точки. Толщина пластинки $AB = d = 15$ mm; коэффиціентъ преломленія стекла пластинки $\mu = 1{,}509$. Опредѣлить положеніе предѣльнаго луча BC, который не выйдетъ изъ пластинки, а отразится отъ поверхности m по направленію CD полнымъ внутреннимъ отраженіемъ, т. е. вычислить AC.



(Къ задачѣ 13).



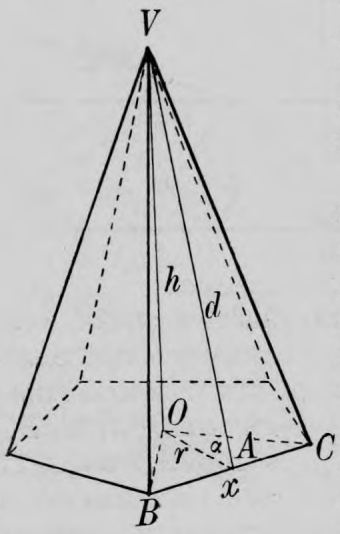
(Къ задачѣ 14).

14. На стеклянную пластинку, ограниченную параллельными плоскостями, толщиною въ

$d = 35$ mm, падаетъ лучъ свѣта IA подъ угломъ $i = 55°39'$ съ нормалью въ точкѣ A. Вычислить: 1) разстояніе $l = AB$ между точками вступленія луча въ пластинку и его выступленія изъ нея; и 2) разстояніе h между лучомъ BL, вышедшимъ изъ пластинки, и продолженіемъ луча IAC, если показатель преломленія стекла пластинки $\mu = 1{,}509$.

B. Задачи въ пространствѣ.

§ 46. Всѣ предлагаемыя въ настоящемъ отдѣлѣ стереометрическія задачи приводятся къ рѣшенію прямолинейныхъ треугольниковъ, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ. Для этого необходимо сдѣлать наглядное построеніе и расчленить задачу такъ, чтобы она свелась къ рѣшенію одного или нѣсколькихъ треугольниковъ.



Положимъ, требуется вычислить полную поверхность и объемъ правильной n-гранной пирамиды по данной апоѳемѣ ея d и углу α, составляемому плоскостью боковой грани съ плоскостью основанія. Боковая поверхность правильной пирамиды состоитъ изъ n равныхъ между собою треугольниковъ, основаніе которыхъ есть сторона $BC = x$, высота $= d$. Площадь основанія состоитъ изъ n равныхъ треугольниковъ, основанія которыхъ равны сторонѣ $BC = x$, а высоты — радіусу r круга, вписаннаго въ многоугольникъ основанія. Этотъ радіусъ есть проекція данной апоѳемы на плоскость основанія: $r = d\cos\alpha$. Вся поверхность будетъ:

$$F = n \times \frac{1}{2} xd + n \times \frac{1}{2} xr = \frac{n}{2} xd\left(1 + \frac{r}{d}\right),$$

но $$\frac{r}{d} = \cos\alpha \quad \text{и} \quad x = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{BOC}{2} = 2d\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n};$$

слѣдовательно:

$$F = nd^2 \cos\alpha (1+\cos\alpha) \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

Объемъ v правильной пирамиды равенъ произведенію одной трети высоты на площадь основанія. Высота $h = d\sin\alpha$; площадь же основанія равна $n \times \frac{1}{2}\, x\, r = nd^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, а потому

$$v = \frac{1}{3} d \sin\alpha \times nd^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{n}{3} d^3 \sin\alpha \cos^2\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Если $n = 6$, $d = 35$ mm и $\alpha = 35°40'18''$, то $\frac{\pi}{n} = \frac{180°}{6} = 30°$.

Вычисленіе поверхности:

$\operatorname{Log}\cos\alpha = 9{,}90975$
$R = 0{,}09025$
$\operatorname{Log}(1+\cos\alpha) = 0{,}25825$
$\operatorname{Log} 6 = 0{,}77815$
$\operatorname{Log} d^2 = 3{,}08814$
$\operatorname{Log}\cos\alpha = 9{,}90975$
$\operatorname{Log}(1+\cos\alpha) = 0{,}25825$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 9{,}76144$
$\operatorname{Log} F = 3{,}79573$
$F = 6247{,}9$ mm²

Вычисленіе объема:

$\operatorname{Log} d = 1{,}54407$
$\operatorname{Log} 2 = 0{,}30103$
$\operatorname{Log} d^3 = 4{,}63221$
$\operatorname{Log}\sin\alpha = 9{,}76577$
$\operatorname{Log}\cos^2\alpha = 9{,}81950$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 9{,}76144$
$\operatorname{Log} v = 4{,}27995$
$v = 19053$ mm³.

Для повѣрки вычисляемъ отношеніе объема къ поверхности: $\frac{v}{F} = \frac{d\sin\alpha\cos\alpha}{3(1+\cos\alpha)}$.

$\operatorname{Log} d$ 1,54407
$\operatorname{Log}\frac{1}{3} = 9{,}52288$
$\operatorname{Log}\frac{1}{1+\cos\alpha} = 9{,}74175$
$\operatorname{Log}\sin\alpha = 9{,}76577$
$\operatorname{Log}\cos\alpha = 9{,}90975$
$\operatorname{Log}\frac{v}{F} = 0{,}48422$

$\operatorname{Log} v = 4{,}27995$
$\operatorname{Log} F = 3{,}79572$
$\operatorname{Log}\frac{v}{F} = 0{,}48423$

Рѣшеніе вѣрно.

Данная стереометрическая задача сведена къ рѣшенію трехъ плоскихъ треугольниковъ: 1) треугольника BVC, составляющаго грань пирамиды; 2) треугольника VOA, построеннаго на высотѣ пирамиды, ея апоѳемѣ и проекціи послѣдней на плоскости основанія и 3) треугольника BOC, представляющаго проекцію грани данной пирамиды на плоскости основанія.

Задачи.

1. Кругъ, площадь котораго равна 333 кв. дюйма, разсѣченъ радіусами на три равныя части, и изъ одной части построенъ конусъ. Вычислить а) уголъ при вершинѣ конуса и б) объемъ конуса.

2. Объемъ V прямого конуса съ круговымъ основаніемъ равенъ 0,275 куб. саж.; радіусъ основанія $r=1$ арш. Вычислить высоту конуса и уголъ A наклоненія производящей конуса къ его основанію.

3. Прямоугольный треугольникъ вращается около катета AB: вычислить боковую поверхность S тѣла вращенія, если гипотенуза треугольника $a=43{,}56$ cm, $B=28^\circ 36' 46''$.

4. Вычислить объемъ шарового сегмента, если радіусъ шара $R=48{,}683$ cm, а площадь основанія сегмента$=1200$ cm^2.

5. Вычислить уголъ x, образуемый двумя діагоналями куба.

6. Кругъ радіуса $r=1{,}561$ m служитъ основаніемъ прямого конуса, образующая котораго составляетъ съ плоскостью основанія уголъ $\alpha=63^\circ 20'$; вычислить объемъ конуса.

7. Вычислить объемъ V прямого цилиндра съ круговымъ основаніемъ, происшедшаго отъ вращенія прямоугольника около длинной стороны, если извѣстно, что діагональ его $d=3{,}75$ m, а уголъ, ею составляемый съ длинной стороной, $\alpha=38^\circ 56' 34''$.

8. Резервуаръ лампы имѣетъ форму, происшедшую отъ вращенія правильной трапеціи около основанія $a=8$ cm, при чемъ сторона трапеціи, параллельная основанію, въ два раза меньше основанія, а объемъ резервуара равенъ объему одной спиртовой бутылки $\left(\frac{1}{20}\right.$ ведра$\left.\right)$. Вычислить

радіусъ r резервуара, его наклонную производящую b и уголъ α, составляемый послѣднею съ осью вращенія. Объемъ одной спиртовой бутылки опредѣлится изъ условія 1 куб. метръ $= 81\frac{1}{3}$ ведра.

9. Вычислить число милліоновъ квадратныхъ километровъ, заключающихся въ двухъ полярныхъ ($2S$), двухъ умѣренныхъ ($2S_1$), и тропическомъ (S_2) поясахъ. Радіусъ земного шара $R = 6367{,}4$ клм., а наклонъ экватора къ эклиптикѣ $\omega = 23°27'$.

10. У наклонной призмы основаніе правильный треугольникъ, сторона котораго $a = 3$ m. Центръ нижняго основанія служитъ проекціей одной изъ вершинъ верхняго основанія, а боковыя ребра составляютъ съ плоскостью основанія уголъ $\alpha = 73°25'10''$. Вычислить объемъ призмы.

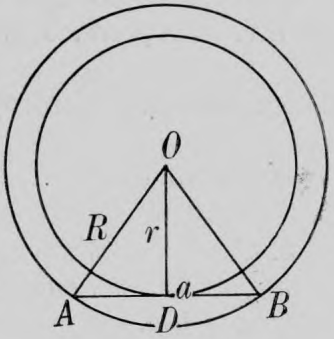
11. Плоскій уголъ при вершинѣ правильной четыреугольной пирамиды $\alpha = 15°36'42''$; опредѣлить ея объемъ и полную поверхность, при основаніи $a = 5{,}32$ m.

12. Вычислить двугранный уголъ въ правильномъ тетраедрѣ.

Г. Задачи о правильныхъ многоугольникахъ.

§ 47. Въ настоящемъ отдѣлѣ излагается рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ о правильныхъ многоугольникахъ.

1. Опредѣлить радіусы вписаннаго въ кругъ и описаннаго около него правильнаго многоугольника въ зависимости отъ длины стороны многоугольника.



Пусть $AB = a$ будетъ сторона нѣкотораго правильнаго многоугольника; O — центръ вписаннаго и описаннаго круговъ; $OD = r$ — радіусъ вписаннаго круга, $OA = R$ — радіусъ описаннаго, а n — число сторонъ даннаго правильнаго многоугольника. Замѣтимъ, что n не можетъ быть меньше 3.

Уголъ AOB составляетъ n-ю часть четырехъ прямыхъ, поэтому $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ и $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180^\circ}{n}$.

Далѣе, въ $\triangle AOD$ имѣемъ:

$$AD = \frac{a}{2} = R\sin\frac{180^\circ}{n} = r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

откуда выводимъ слѣдующія выраженія для радіусовъ круговъ вписаннаго въ данный правильный многоугольникъ и описаннаго около него:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} \text{ и } r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Такъ какъ n не можетъ быть меньше 3, то $\frac{180^\circ}{n}$ не можетъ быть больше 60°.

2. Опредѣлить периметръ вписаннаго въ кругъ и описаннаго около него правильнаго n-угольника въ зависимости отъ радіуса круга.

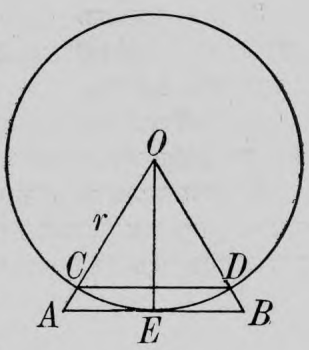
Пусть r будетъ радіусъ даннаго круга; впишемъ въ него и опишемъ около него правильные многоугольники объ n сторонахъ. Пусть сторона вписаннаго многоугольника будетъ a_n, а описаннаго b_n. Въ такомъ случаѣ (49) имѣемъ:

$$a_n = 2r\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ и } b_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Затѣмъ периметръ многоугольника, состоящій изъ n равныхъ сторонъ, будетъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для вписаннаго многогоульника } P_1 = na_n = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n} \\ \text{» описаннаго . » } P_2 = nb_n = 2nr\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} \end{array}\right\}. \quad (50)$$

3. Опредѣлить площадь правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ и описаннаго около него, въ зависимости отъ радіуса круга.



Пусть r будетъ радіусъ даннаго круга; найдемъ выраженіе для площади правильнаго вписаннаго въ него и описаннаго около него многоугольниковъ. Пусть CD будетъ сторона правильнаго вписаннаго, а AB— описаннаго многоугольника объ n сторонахъ. $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, а $\angle AOE = \frac{180^\circ}{n}$.

Площадь вписаннаго правильнаго многоугольника f_1 равна площади $\triangle COD$, взятой n разъ, а площадь описаннаго многоугольника f_2 равна площади $\triangle AOB$, взятой столько же разъ.

$$\text{Плош. } \triangle COD = \frac{r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{и плош. } \triangle AOB = \frac{1}{2} AB \times r = r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n};$$

слѣдовательно:

$$f_1 = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \quad \text{и} \quad f_2 = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \ldots . \quad (51)$$

Въ обоихъ случаяхъ площадь выражена въ квадратныхъ единицахъ того наименованія, которое принято для радіуса. Напримѣръ, если радіусъ выраженъ въ метрахъ, то площадь будетъ выражена въ квадратныхъ метрахъ, если радіусъ выраженъ въ футахъ, то площадь въ квадратныхъ футахъ, и т. д. Если радіусъ круга принимается за единицу, то площадь будетъ выражена въ квадратныхъ радіусахъ; въ послѣднемъ случаѣ формулы (51) принимаютъ слѣдующій видъ:

$f_1 = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$ кв. радіусовъ и $f_2 = n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ кв. радіусовъ.

Задачи.

1. Вычислить площадь f правильнаго 18-угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса въ 15 m.

2. Вычислить площадь f_1 правильнаго 36-угольника, описаннаго около круга радіуса въ 12,7 m.

3. Вычислить радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго въ правильный 36-угольникъ, при сторонѣ послѣдняго $a = 1{,}6$ m.

4. Вычислить отношеніе радіусовъ круговъ, описанныхъ около равновеликихъ правильныхъ 12-ти и 6-угольниковъ.

5. Вычислить разность площадей описаннаго f_2 и вписаннаго f_1 правильныхъ 12-угольниковъ въ кругъ, радіусъ котораго равенъ 16,5 саж.

ОТВѢТЫ НА ЗАДАЧИ ВЪ ПЕРВОЙ ЧАСТИ.

Глава II, § 15 (Стр. 35).

1. 9,57762
2. 9,94804
3. 9,99364
4. 9,72440
5. 9,98774
6. 9,69927
7. 9,56129n
8. 9,95137n
9. 9,73535
10. 9,64742n
11. 0,14524
12. 9,55811n
13. 0,01613
14. 0,01881n
15. 0,03886
16. 0,01354
17. $\operatorname{Log}\sin y = 9{,}86968$; $\operatorname{Log}\cos y = 9{,}82722$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg} y = 0{,}04246$; $\operatorname{Log}\operatorname{cot g} y = 9{,}95754$
$\operatorname{Log}\sec y = 0{,}17278$; $\operatorname{Log}\operatorname{cosec} y = 0{,}13032$
18. $\operatorname{Log}\sin y = 9{,}91890$; $\operatorname{Log}\cos y = 9{,}74682n$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg} y = 0{,}17208n$; $\operatorname{Log}\operatorname{cotg} y = 9{,}82792n$
$\operatorname{Log}\sec y = 0{,}25318n$; $\operatorname{Log}\operatorname{cosec} y = 0{,}08110$
19. $y = 12^\circ\ 51'\ 40''$
20. $y = 157^\circ\ 44'\ 47''$
21. $y = 65^\circ\ 43'\ 21''$
22. $y = 159^\circ\ 39'\ 40''$
23. $y = 15^\circ\ 6'\ 2''$
24. $y = 77^\circ\ 38'\ 4''$
25. $y = 155^\circ\ 28'\ 51''$
26. $y = 56^\circ\ 23'\ 38''$
27. $y = 105^\circ\ 40'\ 35''$
28. $y = 100^\circ\ 27'\ 12''$
29. $y = 26^\circ\ 41'\ 29''$
30. $y = 126^\circ\ 15'\ 47''$

Глава II, § 18 (Стр. 43).

31. По логариѳмамъ Гаусса рѣшеніе получается однимъ пріискиваніемъ. Введеніе вспомогательнаго угла не упрощаетъ вычисленіе.

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2\varphi; \qquad \sqrt{a+b} = \sqrt{a(1+\operatorname{tg}^2\varphi)} = \sqrt{a}\sec\varphi.$$

Вычисленіе:

по логариѳмамъ Гаусса:	съ помощью вспомогательнаго угла:
$\operatorname{Log} b = 1{,}65893$	$\operatorname{Log} b = 1{,}65893$
$\Sigma = 0{,}17213$	$\operatorname{Log} a = \underline{1{,}34589}$
$\operatorname{Log} a = \underline{1{,}34589}$	$\operatorname{Log}\operatorname{tg}^2\varphi = 0{,}31304$
$R = 0{,}31304$	$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\varphi = 0{,}15652$
$\operatorname{Log}(a+b) = 1{,}83106$	$\operatorname{Log}\sec\varphi = 0{,}24258$
$\operatorname{Log}\sqrt{a+b} = 0{,}91553$	$\operatorname{Log}\sqrt{a} = \underline{0{,}67295}$
$\sqrt{a+b} = 8{,}2324$	$\operatorname{Log}\sqrt{a+b} = 0{,}91553$

32. $\sqrt{a-b} = 1{,}2669$ **33.** $\frac{a+b}{a-b} = 3{,}1657$

34. $a\sin A + b\cos A = 42{,}056$ **35.** $x = 9{,}8190$

36. $x = 1{,}9615$ **37.** $x = 1{,}1112$

Глава III, § 23 (Стр. 49).

1. $B = 61^\circ 22' 9''$; $b = 353{,}48$; $c = 192{,}97$.

2. $B = 39^\circ 5'41''$; $C = 50^\circ 54'19''$; $c = 66{,}94$.

3. $B = 37^\circ 26'20''$; $C = 52^\circ 33'40''$; $b = 15676$.

4. $C = 40^\circ 29' 6''$; $a = 79{,}32$; $c = 51{,}50$.

5. $B = 7^\circ 28'45''$; $a = 174{,}99$; $b = 22{,}78$.

6. $B = 26^\circ 40'22''$; $a = 0{,}60356$; $c = 0{,}53932$.

7. $C = 72^\circ 2'25''$; $a = 62{,}741$; $b = 19{,}346$.

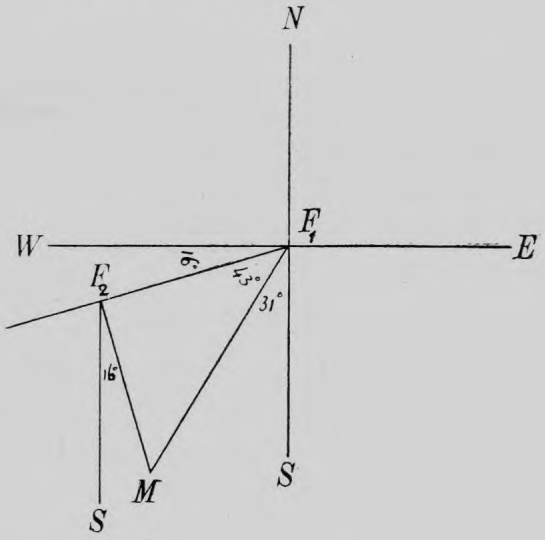
8. $B = 15^\circ 0'28''$; $C = 74^\circ 59'32''$; $a = 0{,}0098982$.

9. $P = 12{,}86$ клгр.; $S = 21{,}87$ клгр.

10. $B = 34^\circ{,}7$; $C = 55^\circ{,}3$; $R = 6{,}3$ клгр. Для рѣшенія достаточно трехзначныхъ логариѳмовъ.

11. Если M маякъ, F_1 и F_2 — два положенія корабля во время наблюденія, то легко видѣть, что $\angle MF_2F_1 = 90°$, $\angle MF_1F_2 = 43°$ и $F_1F_2 = 20$ миль. $MF_1 = 27{,}3$ м.; $MF_2 = 18{,}6$ м.

Для рѣшенія этой задачи, какъ и предыдущей, достаточно трехзначныхъ логариѳмовъ.



12. 18 фунт.

13. 25° 4′ 6″ и 12°42′14″; 4,2 m.

14. $H = 53°\ 8'$.

15. $C = 9°42'11''$; $c = 62{,}18$ саж.; $b = 363{,}62$ саж.; $a = 368{,}90$ саж.

16. $C = 34°18'37''$; $b = 99{,}565$ саж.; $c = 67{,}945$ саж.; $a = 120{,}54$ саж.

17. $C = 28°41'29''$; $a = 332{,}22$m, $b = 291{,}41$m и $c = 159{,}49$m.

18. $C = 43°20'\ 8''$; $a = 96{,}77$m; $b = 70{,}39$m и $c = 66{,}41$ m.

19. $b = h \sec B = 22{,}530$ cm; $c = h\ \mathrm{cosec}\ B = 20{,}103$ cm и $a = 30{,}195$ cm.

20. $a = b = c = h \sec 30° = 2{,}71$ саж.

Глава IV, § 33 (Стр. 65).

1. а. Рѣшенія нѣтъ, потому что $s - a \angle 0$.

б. $A = 37°47'16''$; $B = 82°28'36''$; $C = 59°44'12''$.

в. $A = 49°43'28''$; $B = 56°\ 2'22''$; $C = 74°14'10''$.

г. $A = 51°32'28''$; $B = 67°22'16''$; $C = 61°\ 5'16''$.

2. $\angle RP = 34^\circ 36' 2''$; $\angle RQ = 45^\circ 54' 48''$.
3. $A = 101^\circ 44' 20''$; $B = 45^\circ\ 0' 40''$ и $C = 33^\circ 15'\ 0''$.

Глава IV, § 35 (Стр. 68).

4. а. $A = 36^\circ 15' 5''$; $B = 103^\circ 57' 43''$ и $c = 136{,}09$ саж.
б. $A = 50^\circ 24' 22''$; $C = 27^\circ\ 0' 48''$ и $b = 385{,}3$m.
в. $B = 149^\circ 42' 21''$; $C = 17^\circ 12' 31''$ и $a = 18{,}656$.
г. $B = 37^\circ 40' 19''$; $C = 46^\circ 50' 53''$ и $a = 41{,}749$ cm.
д. $A = 94^\circ\ 6' 56''$; $C = 30^\circ 20' 56''$ и $b = 440{,}3$ саж.
е. $A = 43^\circ 34' 35''$; $B = 26^\circ 50'\ 9''$ и $c = 11652$ ф.
5. $Q = 3{,}57$ клгр.; $C = 23^\circ 57'\ 4''$.
6. $Q = 34{,}875$ клгр.; $B = 27^\circ 38' 12''$.
7. $R = 36{,}2$ клгр.; $\angle PR = 27^\circ 40' 27''$ и $\angle QR = 60^\circ 33' 16''$.

Глава IV, § 37 (Стр. 75).

8. $c = 36{,}26$ m.; $B = 48^\circ 59' 44''$ и $C = 55^\circ 16' 49''$.
9. $c = 14{,}29$ саж.; $A = 28^\circ 42' 47''$ и $C = 3^\circ 24' 54''$.
10. Два рѣшенія: а) $b_1 = 156{,}59$ cm; $B_1 = 122^\circ 45' 13''$ и $C_1 = 33^\circ 24' 51''$, и б) $b_2 = 30{,}99$ cm; $B_2 = 9^\circ 34' 55''$ и $C_2 = 146^\circ 35' 9''$
11. $a = 218{,}67$ m и $A = 151^\circ 48' 24''$.
12. Рѣшенія нѣтъ.
13. Два рѣшенія: а) $a_1 = 252{,}6$ саж.; $A_1 = 159^\circ 18'\ 2''$. и $C_1 = 12^\circ 28'\ 9''$ и б) $a_2 = 52{,}8$ саж.; $A_2 = 4^\circ 14' 20''$ и $C_2 = 167^\circ 31' 51''$.
14. $b = 7{,}12$ m.; $A = 51^\circ 43' 30''$ и $B = 31^\circ 58' 40''$.
15. Два рѣшенія: а) $Q_1 = 69{,}6$ клгр. и $C = 101^\circ 29'$ и б) $Q_2 = 19{,}2$ клгр. и $C = 15^\circ 41'$.

Глава IV, § 39 (Стр. 76).

16. $A = 75^\circ 58' 58''$; $b = 40{,}257$ саж. и $c = 29{,}541$ саж.
17. $b = 21{,}13$ д.; $c = 15{,}69$ д.; $C = 47^\circ 50' 34''$.
18. $b = 54{,}4$ cm; $c = 241{,}3$ cm; $B = 9^\circ 27' 53''$.
19. $a = 234{,}7$ саж.; $c = 213{,}5$ саж. и $B = 32^\circ 6' 14''$.
20. $a = 2660{,}4$ ф.; $c = 1653{,}5$ ф.; $A = 145^\circ 33' 20''$.
21. $a = 17{,}24$ mm; $c = 24{,}78$ mm; $C = 68^\circ 11' 16$.
22. $a = 111{,}3$ саж.; $b = 145{,}0$ саж.; $C = 35^\circ\ 2' 13''$.

23. $a = 2200{,}9$ m; $b = 336{,}8$ m; $B = 4°46'31''$.
24. $a = 20{,}55$ арш.; $b = 76{,}05$ арш.; $A = 7°\ 9'57''$.
25. $Q = 1{,}46$ клгр. и $R = 3{,}18$ клгр.
26. $P = 17{,}122$ клгр. и $Q = 15{,}983$ клгр.
27. $x = 5517{,}0$ саж. и $y = 4885{,}4$ саж.

Глава V, § 41 (Стр. 78).

1. 29 дес. 1006 кв. саж.
2. 1 дес. 1172,3 кв. саж.
3. 159,33 кв. ф.
4. 39,277 гект.
5. 3 кв. ф. 71,7 кв. д.
6. 20 дес. 1540 кв. саж.
7. 658,9 m^2
8. 9 дес. 163 кв. саж.

Глава V, § 43 (Стр. 80).

9. 1215,4 кв. саж.
10. 103,83 кв. д.
11. 5460,5 cm^2.
12. 5 дес. 1316 кв. саж.
13. 4 дес. 1107 кв. саж.
14. 202,6 mm^2
15. 1 дес. 2235 кв. саж.
16. 22,681 гект.
17. 271,5 кв. арш.
18. 584,87 m^2.
19. 438,0 кв. саж.
20. а) 3243,5 cm^2 и б) 642,0 cm^2.
21. 3001,9 m^2
22. Рѣшенія нѣтъ.
23. а) 2789,8 m^2 и б) 583,4 m^2.

Глава VI, § 44 (Стр. 86).

1. $AC = 98{,}1$ саж.

2. Задача рѣшается по правиламъ § 44 № 2. Мы приводимъ полностью вычисленіе.

Основаніе $a = CD = 231{,}7$ саж.

$ACD = 91°\ 2'47''$ и $ADC = 52°\ 37'\ 8''$

$BCD = 62\ 24\ 30$ и $BDC = 80\ 46\ 10$

$A = 180° - (ACD + ADC)$ $\qquad$ $B = 180° - (BCD + BDC)$

$d_1 = a\ \mathrm{cosec} A \sin ADC$ $\qquad$ $d_2 = a\ \mathrm{cosec} A \sin ACD$

$f_1 = a\ \mathrm{cosec} B \sin BDC$ $\qquad$ $f_2 = a\ \mathrm{cosec} B \sin BCD$

$ACD =$	91°	2'47''	$BCD =$	62°	24' 30''
$ADC =$	52	37 8	$BDC =$	80	46 10
$ACD + ADC =$	143	39 55	$BCD + BDC =$	143	10 40
$A =$	36	20 5	$B =$	36	49 20

$$\text{Log cosec } A = 0{,}22731;$$
$$\text{Log } a = 2{,}36493;$$
$$\text{Log cosec } B = 0{,}22233;$$

$\text{Log sin } ADC = 9{,}90015;$	$\text{Log sin } BDC = 9{,}99434;$
$\text{Log } a \text{ cosec } A = 2{,}59224;$	$\text{Log } a \text{ cosec } B = 2{,}58726;$
$\text{Log sin } ACD = 9{,}99993;$	$\text{Log sin } BCD = 9{,}94756$

$\text{Log } d_1 = 2{,}49239$	$\text{Log } d_2 = 2{,}59217$
$\text{Log } f_1 = 2{,}58160$	$\text{Log } f_2 = 2{,}53482$
$d_1 = 310{,}74$ саж.	$d_2 = 390{,}99$ саж.
$f_1 = 381{,}59$ »	$f_2 = 342{,}63$ »

Рѣшеніе треугольниковъ ABC и ABD для опредѣленія искомаго разстоянія AB:

$\triangle ABC$	$\triangle ABD$
$C = ACD - BCD$	$D = BDC - ADC$
$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ - C$	$\beta_2 + \alpha_2 = 180^\circ - D$
$\text{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{f_1 - d_1}{f_1 + d_1}\text{cotg}\frac{1}{2}C;$	$\text{tg}\frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2) = \frac{d_1 - f_2}{d_2 + f_2}\text{cotg}\frac{1}{2}D$
$AB = d_1 \sin C \text{ cosec } \beta_1$	$AB = d_2 \sin D \text{ cosec } \beta_2$
$AB = f_1 \sin C \text{ cosec } \alpha_1$	$AB = f_2 \sin D \text{ cosec } \alpha_2$

Вычисленіе треугольниковъ:

$ACD = 91^\circ\ 2'47''$	$BDC = 80^\circ 46'10''$
$BCD = 62\ 24\ 30$	$ADC = 52\ 37\ 8$
$C = 28\ 38\ 17$	$D = 28\ 9\ 2$
$\alpha_1 + \beta_1 = 151\ 21\ 43$	$\beta_2 + \alpha_2 = 151\ 50\ 58$
$\frac{1}{2}C = 14\ 19\ 9$	$\frac{1}{2}D = 14\ 4\ 31$
$f_1 = 381{,}59$	$d_2 = 390{,}99$
$d_1 = 310{,}74$	$f_2 = 342{,}63$
$f_1 - d_1 = 70{,}85$	$d_2 - f_2 = 48{,}36$
$f_1 + d_1 = 692{,}33$	$d_2 + f_2 = 733{,}62$
$\text{Log}(f_1 - d_1) = 1{,}85034$	$\text{Log}(d_2 - f_2) = 1{,}68449$
$\text{Log}(f_1 + d_1) = 2{,}84031$	$\text{Log}(d_2 + f_2) = 2{,}86547$
$\text{Log}\frac{f_1 - d_1}{f_1 + d_1} = 9{,}01003$	$\text{Log}\frac{d_2 - f_2}{d_2 + f_2} = 8{,}81902$

$\operatorname{Log}\frac{f_1-d_1}{f_1+d_1}=9{,}01003$	$\operatorname{Log}\frac{d_2-f_2}{d_2+f_2}=8{,}81902$
$\operatorname{Log}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C=0{,}59303$	$\operatorname{Log}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}D=0{,}60081$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1-\beta_1)=9{,}60306$	$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta_2-\alpha_2)=9{,}41983$
$\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)=75^\circ 40' 51''$	$\frac{1}{2}(\beta_2+\alpha_2)=75^\circ 55' 29''$
$\frac{1}{2}(\alpha_1-\beta_1)=21\ 50\ 49$	$\frac{1}{2}(\beta_2-\alpha_2)=14\ 43\ 52$
$\alpha_1=97\ 31\ 40$	$\beta_2=90\ 39\ 21$
$\beta_1=53\ 50\ 3$	$\alpha_2=61\ 11\ 37$
$\operatorname{Log} d_1=2{,}49240$	$\operatorname{Log} d_2=2{,}59217$
$\operatorname{Log}\sin C=9{,}68059$	$\operatorname{Log}\sin D=9{,}67375$
$\operatorname{Log} f_1=2{,}58160$	$\operatorname{Log} f_2=2{,}53483$
$\operatorname{Log} d_1\sin C=2{,}17299$	$\operatorname{Log} d_2\sin D=2{,}26592$
$\operatorname{Log}\operatorname{cosec}\beta_1=0{,}09296$	$\operatorname{Log}\operatorname{cosec}\beta_2=0{,}00003$
$\operatorname{Log} AB=2{,}26595$	$\operatorname{Log} AB=2{,}26595$
$\operatorname{Log} f_1\sin C=2{,}26219$	$\operatorname{Log} f_2\sin D=2{,}20858$
$\operatorname{Log}\operatorname{cosec}\alpha_1=0{,}00376$	$\operatorname{Log}\operatorname{cosec}\alpha_2=0{,}05737$
$\operatorname{Log} AB=2{,}26595$	$\operatorname{Log} AB=2{,}26595$

$AB=184{,}5$ саж.

3. $h=k+l\operatorname{tg} H=0{,}47+7{,}91=8{,}38$ саж.

4. $h=k+l\sin H_1\ \sin H_2\ \operatorname{cosec}(H_1-H_2)=0{,}31+7{,}22=$ $=7{,}53$ саж.

5. $x=h\sin(\alpha-\beta)\ \operatorname{cosec}\alpha\ \operatorname{cosec}\beta=311{,}1$ m.

6. $x=h\sin(b+a)\ \operatorname{cosec}(b-a)=216$ саж.

Глава VI, § 45 (Стр. 87).

1. $A+B=127^\circ 23' 12''$; $A-B=N=68^\circ\ 2' 26''$; отсюда: $A=97^\circ 42' 49''$; $B=29^\circ 40' 23''$; $a=19{,}132$ m; $b=9{,}558$ m.

2. $C=95^\circ 27' 27''$; $a=50{,}05$ саж.; $b=44{,}01$ саж. $c=69{,}72$ с.; $a+b+c=163{,}78$ саж. $=2s$.

3. $C=33^\circ 12' 42''$; $A=78^\circ 16' 24$; $b=287{,}52$ m и $c=169{,}25$ m. Повѣрка $b+c=456{,}77$ m отличается отъ данной суммы $n=456{,}76$ m на 0,01 m, что допустимо.

4. $C = 34°35'20''$; $A = 91°39'10''$; $b = 44{,}91$ саж.; $c = 31{,}61$ с. Повѣрка: $b - c = 13{,}30$ саж. $= m$.

5. $\frac{1}{2}(B+C) = 66°56'21''$; $\frac{1}{2}(B - C) = 10°23'55''$; отсюда $B = 77°20'16''$ и $C = 56°32'26''$; $b = 52{,}30$ саж. и $c = 44{,}72$ саж. Повѣрка: $b - c = 7{,}58$ саж. $= n$.

6. $C = 80°31'\ 7''$; $a = 170{,}95$ m; $b = 127{,}47$ m и $c = 195{,}69$ m. Повѣрка $a = b\cos C + c\cos B = 170{,}95$ m.

7. $C = 66°34'28''$; $\operatorname{Log} K = 1{,}97819$; $a = 61{,}79$ m; $b = 90{,}90$ m; $c = 87{,}26$ m. Повѣрка : $\operatorname{Log} abc = 5{,}69031$ и $\operatorname{Log} 2FK = 5{,}69031$.

8. $A = 73°27'28''$; $B = 56°28'0''$ и $C = 50°\ 4'32''$ $a = 29{,}991$ m; $b = 26{,}079$ m и $c = 23{,}993$ m.

9. $2\pi R\cos\varphi = 20846$ km.

10. $C = A = 72°32'33''$; $B = 34°54'54''$; $a = c = 15{,}41$ m. $b = 9{,}25$ m.

11. $A = 28°57'18''$; $B = 46°34'\ 4''$ и $C = 104°28'38''$.

12. $r = 8{,}46$ cm.

13. $AC = 13{,}27$ mm. [Пусть уголъ паденія нѣкотораго отраженнаго луча BC будетъ $BCN = r$; уголъ преломленія $N'CE = i$; въ такомъ случаѣ для предѣльнаго луча имѣемъ условіе $\mu\sin r = \sin i = 1$; откуда выводимъ: $\sin r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1{,}509}$ и $r = 41°30'20''$, и [затѣмъ $AC = d\operatorname{tg} r = 13{,}27$ mm].

14. Мы имѣемъ: $\frac{\sin i}{\sin r} = \mu = 1{,}509$; откуда $\sin r = \frac{\sin i}{\mu}$; $r = 33°10'\ 9''$. Затѣмъ $l = \frac{d}{\cos r} = 41{,}81$ mm; $h = l\sin(i - r) = 15{,}99$ mm.

Глава VI, § 46 (Стр. 100).

1. $C = 38°56'34''$; $V = \frac{37}{3}\sqrt{\frac{37}{\pi}}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C = 119{,}72$ куб. д. [Пусть r будетъ радіусъ даннаго круга, а ρ — радіусъ кругового основанія конуса. По условію имѣемъ $2\pi\rho = \frac{1}{3}2\pi r$; откуда $\rho = \frac{1}{3}r$; слѣдовательно $\sin\frac{1}{2}C = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{3}$, если C есть уголъ при вершинѣ конуса].

2. $h = \frac{3V}{\pi r^2} = 2{,}3635$; $A = 81°58'19''$

3. $S = \pi a^2 \sin B = 2854{,}8$ cm^2.

4. $V = 2493{,}0$ cm^3.

$\left[V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right)\right.$, гдѣ $H = R(1 - \cos\alpha)$, $\sin\alpha = \frac{r}{R}$

и $r = \sqrt{\frac{1200}{\pi}}$ есть радіусъ площади основанія. $\operatorname{Log} H = 0{,}61227\left.\right]$

5. $x = 180° - 2\alpha = 70°31'46''$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

6. $V = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha = 7{,}931$ m^3.

8. $V = \pi d^3 \sin^2\alpha \cos\alpha = 50{,}906$ m^3.

9. $b = 6{,}38$ cm; $r = 6{,}06$ cm; $\alpha = 71°43'40''$.

[Пусть v будетъ объемъ одной спиртовой бутылки; имѣемъ

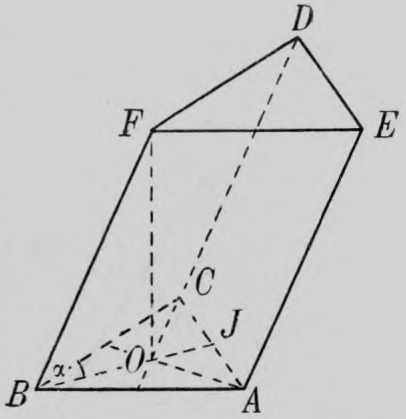
$$v = \frac{3\,000\,000}{4\,880} \text{ cm}^3; \quad r = \sqrt{\frac{3v}{2\pi a}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4r}{a}\Big]$$

10.

$2s = 4\pi R^2 (1 - \cos\omega)$	$= 42{,}1$	милл.	кв.	клм.
$2s_1 = 4\pi R^2 (\cos\omega - \sin\omega)$	$= 264{,}6$	»	»	»
$s_2 = 4\pi R^2 \sin\omega$	$= 202{,}7$	»	»	»
Поверхность земн. шара	$= 509{,}4$	»	»	»

Повѣрка: та же поверхность $= 4\pi R^2 = 509{,}3$ милл. кв. клм.

11. $V = \frac{a^3}{4} \operatorname{tg}\alpha = 2267$ m^3.



[Пусть $ABCFDE$ будетъ данная трехгранная призма, въ основаніи которой правильный треугольникъ ABC. Перпендикуляръ FO, опущенный изъ вершины верхней грани на основаніе, проходитъ по заданію черезъ центръ основанія O. Плоскость FBO, проведенная черезъ ребро BF и перпендикуляръ, пересѣкаетъ основаніе по линіи

BOI, а плоскій уголъ FBO равенъ данному углу α. Имѣемъ: $OF = OB \operatorname{tg} \alpha$; $OB = OA$; $a = AB = OB \cos 30^\circ + OA \cos 30^\circ = 2OB \cos 30^\circ = \sqrt{3}.OB$; откуда $OB = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$.

слѣдовательно $OF = \frac{1}{3} a \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$. $V = ABC \times OF$; но

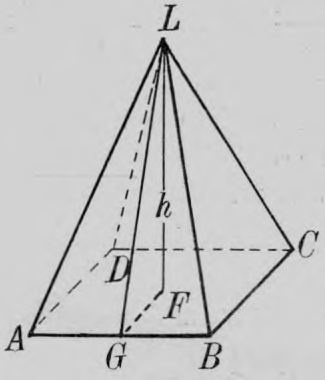
$$ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{5}; \text{ отсюда } V = \frac{a^3}{4} \operatorname{tg} \alpha \ ]$$

12. $F = 234{,}75$ m^2; $V = 181{,}32$ m^3.

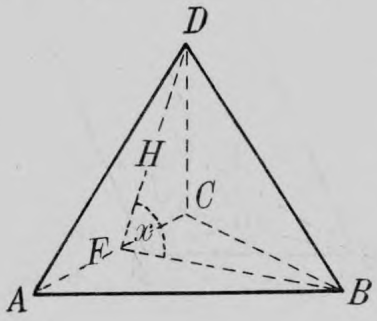
$[\angle ALG = \frac{1}{2}\alpha; LG = \frac{1}{2} a \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha; \triangle ABL = \frac{1}{2} LG.a = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha.$

Вся поверхность $F = 4 \triangle ABL + ABCD = a^2 \left(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + 1 \right)$.

Пусть $LF = h$; объемъ $V = ABCD \times \frac{1}{3} h$;



но $h = \sqrt{LG^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\alpha - 1}$].



13. $x = 70^\circ 31' 46''$ [Черезъ одно изъ реберъ, напр. DB, проведемъ плоскость, перпендикулярную къ противолежащему ребру AC; она пересѣчетъ противолежащія грани по линіямъ DF и BF; $\angle DFB = x$ будетъ искомый. Если сторона тетраедра $= a$

и $DF = H$, то $H = a \sin 60^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, такъ какъ $\angle DAF = 60^\circ$.
Такъ какъ въ правильномъ тетраедрѣ $FD = FB = H$, то

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}DB}{H} = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\Big].$$

Глава VI, § 47 (Стр. 101).

1. $f_1 = 692{,}58$ m^2.

2. $f_2 = 507{,}99$ m^2.

3. $r = 9{,}144$ m и $R = 9{,}179$ m.

4. $\frac{R}{r} = \sqrt{\sin 60^\circ} = 0{,}93065$.

5. $x = f_2 - f_1 = 58{,}63$ кв. саж.