

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
Стереометрия

УЧЕБНИК
ДЛЯ 8-го и 9-го КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Утверждено Наркомпросом РСФСР



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1935

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Трудности, связанные для учащихся с изображением пространственных фигур и тел на плоскости чертежа, заставили авторов ввести дополнительную главу „Изображение фигур и тел в пространстве“, не предусмотренную программой средней школы; эта глава отнесена на конец книги (гл. XIV). Отсутствие пространственных представлений и неграмотные изображения геометрических тел учащимися — обычное явление в средней школе. Между тем грамотный чертеж, выполненный на основании определенных правил, облегчает работу учащихся при решении тех или других вопросов геометрии, дает им возможность по четко выполненному чертежу восстановить и форму и размеры изображенного тела, не говоря уже о том, что от хорошего и четкого чертежа выигрывает и внешнее оформление работы. Небольшая затрата времени на прохождение этой главы окупается значительно ускоренным темпом работы при прохождении курса.

Авторы считают целесообразным проходить эту главу в самом начале курса после первой главы, невзирая на то, что некоторые вопросы в ней приходится принимать интуитивно. Для понимания изложенного в главе материала требуется только иметь представление о простейшем геометрическом теле — кубе, с которым учащиеся успели ознакомиться еще до начала изучения систематического курса стереометрии. На кубе рассматриваются всевозможные его сечения. Каждый преподаватель средней школы знает, какие затруднения встречаются у учащихся, когда им нужно провести какое-нибудь сечение тела; иной, даже из весьма способных учащихся, нередко охладевает к занятиям по стереометрии, заявляя, что он не способен заниматься ею за отсутствием четких пространственных представлений.

В главе даны только самые необходимые указания на приемы изображения тел и их сечений; внимательный преподаватель и учащийся, проработав указанную главу, убедятся в том, что много новых и нужных вопросов можно решить на основании данных в ней указаний.

Просьба авторов ко всем преподавателям — сообщить свое мнение, свои указания и свои предложения по поводу этой главы, чтобы можно было их использовать для более подробной методической обработки вопроса. Адрес: Москва, Учпедгиз, математическая редакция, для авторов.

Авторы.

„От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике, — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности“.

В. И. Ленин.

(Ленинский сборник, т. IX.)

I. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 1. Геометрия на плоскости и в пространстве.

1. Геометрия на плоскости, или планиметрия, изучает форму, размеры и положение плоских фигур, а также их свойства и зависимость между отдельными их элементами.

2. Геометрия в пространстве, или стереометрия, изучает форму, размеры и положение пространственных фигур и тел, а также их свойства и зависимость между отдельными их элементами.

3. Плоские фигуры изображаются на плоскости в определенном масштабе, обычно уменьшенными, в отдельных случаях увеличенными против их действительной величины; изображение плоских фигур каких-либо особых затруднений не представляет. Иначе обстоит дело с изображением пространственных фигур и тел; вызывается это тем, что тела, имеющие три измерения, приходится изображать на плоскости, имеющей всего два измерения. Это создает некоторые затруднения, а поэтому требует от изучающих стереометрию наличия пространственного воображения, умения и навыка не только „видеть“ тело, изображенное на плоскости, но и „изображать“ видимое тело трех измерений на плоскости двух измерений.

4. Развитие стереометрии началось значительно позднее развития планиметрии. Стереометрия, как и планиметрия, развивалась из наблюдений и из решений вопросов, которые возникали в процессе практической деятельности человека. Несомненно, что уже первобытный человек, перешедший к оседлой жизни и занявшийся земледелием, делал попытки оценивать, хотя бы в самых грубых чертах, размер собранного им урожая по массам хлеба, сложенным в кучи, копны или скирды.

Строитель даже самых древних примитивных построек должен был как-то учитывать материал, которым он располагал, или уметь подсчитать, сколько материала ему потребуется для возведения тех или иных построек. Каменотесное дело требовало знакомства с метрическими свойствами различных, хотя бы и простейших, геометрических тел: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра и т. п.

Потребности земледелия толкали людей к астрономическим наблюдениям, а последние — к изучению свойств сферы и ее частей и,

следовательно, законов взаимного расположения плоскостей и линий в пространстве.

Правильность сказанного подтверждается древнейшими памятниками — материальными и письменными.

Египетские пирамиды, главнейшие из которых были сооружены за 2, 3 и 4 тысячи лет до нашего времени, поражают нас точностью своих метрических соотношений; строители их должны были уже знать многие стереометрические положения и расчеты.

Древнейший египетский папирус Голенищева, хранящийся в Музее изящных искусств в Москве, а также папирус Райнда, написанный писцом Ахмесом и хранящийся в Британском музее в Лондоне, содержат ряд решений задач стереометрического содержания.

Примеры задач из папируса Голенищева.

ЗАДАЧА I. Сделать усеченную пирамиду (на папирусе пирамида изображена в виде трапеции), если известно: 6 — высота, 4 — внизу, 2 — наверху. Поступай, как следует: возвысь в квадрат 4, что даст 16; удвой 4, что даст 8; далее возвысь в квадрат 2, что даст 4. К 16 прибавь 8 и 4, что даст 28. Далее возьми $\frac{1}{3}$ от 6, что даст 2; далее возьми 28 дважды, что даст 56. Это есть 56. То, что хотели найти, — правильно.

В этой задаче указывается совершенно правильный способ для вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием по формуле:

$$V = \frac{1}{3} H(Q + q + V\overline{Qq}).$$

Принимая во внимание, что теоремы об объеме усеченной пирамиды нет еще в „Началах“ Евклида (3 века до начала нашей эры), приходится удивляться знанию ее египтянами за полтысячелетия до греков.

ЗАДАЧА II. Сделать корзину (определение поверхности полушара). Устье корзины $4\frac{1}{2}$.

Возьми $\frac{1}{9}$ от 9, ибо корзина есть половина, будет 1. Отними 1 от 9, будет 8. Возьми $\frac{1}{9}$ от 8, будет $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, т. е. $\frac{8}{9}$. Сделай остаток $(8 - \frac{8}{9})$, будет $7\frac{1}{9}$. Умножь $7\frac{1}{9}$ на $4\frac{1}{2}$, будет 32 (ответ).

В задаче под устьем корзины следует разумеать диаметр полушара, а предметом задачи является определение поверхности полушара.

Указываемые в решении действия могут быть выражены формулой:

$$S = \left[\left(2d - \frac{2}{9}d \right) - \frac{1}{9} \left(2d - \frac{2d}{9} \right) \right] d,$$

где d — диаметр полушара. Произведя в формуле упрощения, получим:

$$S = \frac{128}{81} d^2.$$

Отсюда легко найти соответствующее значения для π :

$$\frac{128}{81} d^2 = \frac{\pi d^2}{2}; \quad \pi = \frac{256}{81} = 3,16.$$

Если принять во внимание, что формула для поверхности шара дана только Архимедом в III в. до начала нашей эры, то следует признать, что египтяне уже знали приемы весьма точного вычисления поверхности шара.

В период экономического и культурного расцвета древней Греции и ее колоний геометрия достигла высокого теоретического развития.

Постепенное накопление сведений по стереометрии дало Демокриту возможность утверждать, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы, имеющей с пирамидой одинаковое основание и одинаковую высоту.

Евдокс дал исчерпывающее доказательство высказанного Демокритом утверждения об объеме пирамиды.

В III в. до начала нашей эры Менехм, ученик Платона, занимается исследованием свойств конических сечений — криволинейных фигур, получаемых сечением конуса плоскостью. Знаменитый философ древности Аристотель уделяет внимание правильным многогранникам.

К эпохе Евклида — III в. до начала нашей эры — было накоплено много геометрических и в частности стереометрических знаний, которые этим замечательным математиком были собраны, дополнены и изложены в строго логической системе в его знаменитых „Началах“.

После падения Греции наблюдается длительный застой в развитии математики и стереометрии в частности, длившийся почти полторы тысячи лет.

Ни римляне, ни индусы, ни арабы почти ничего не прибавили к геометрической сокровищнице греков, и только с XVI и XVII вв. нашей эры, в период социального подъема, вызвавшего бурный рост в области науки, наблюдается оживление и математической мысли под давлением развивающейся техники.

Серьезное развитие стереометрии следует отнести только к началу XVI в., и развитие это продолжается и в настоящее время.

§ 2. Аксиомы прямой в пространстве.

Аксиома 1. Через любую точку в пространстве можно провести бесчисленное множество прямых.

Аксиома 2. Через две различные точки пространства можно провести только одну прямую, иными словами, две точки пространства определяют только одну прямую.

§ 3. Определение положения плоскости в пространстве.

1. *Плоскостью называется поверхность, обладающая тем свойством, что прямая, проходящая через любые две точки этой поверхности, лежит в ней всеми своими точками.*

2. Плоскость мы можем себе мыслить образованной движением прямой AB , вращающейся вокруг одной неподвижной точки A и одновременно скользящей по некоторой прямой MN (рис. 1).

И в том случае, когда прямая перемещается параллельно самой себе и одновременно скользит по некоторой прямой MN , она описывает плоскость (рис. 2). Если прямая AB (рис. 1) при своем вращении вокруг точки A пересекает прямую MN в бесконечно удаленной точке, то в предельном своем положении AC она параллельна прямой MN и лежит с ней в одной плоскости.

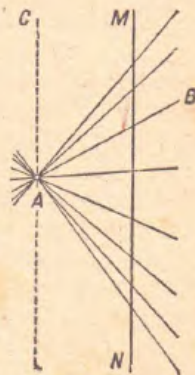


Рис. 1.

Прямая AB , движением которой образуется плоскость, называется образующей; прямая MN , указывающая, по какому направлению перемещается образующая, называется направляющей.

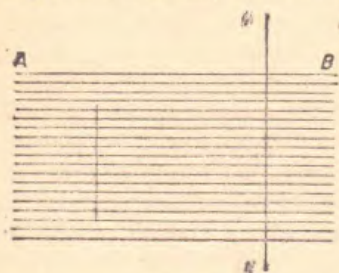


Рис. 2.

3. Из определения плоскости следует:

1) Прямая, имеющая две общие точки с плоскостью, лежит в ней всеми своими точками. Говорят, что плоскость проходит через данную прямую, если последняя лежит в ней.

2) Прямая может быть безгранично продолжена в обе стороны, а потому

через любые две точки плоскости можно всегда провести прямую; плоскость может быть безгранично продолжена во все стороны.

4. Плоскость делит все пространство на две части (области), расположенные по обе стороны от плоскости.

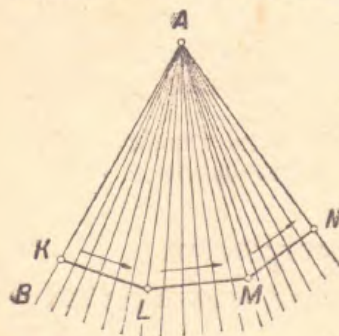


Рис. 3.

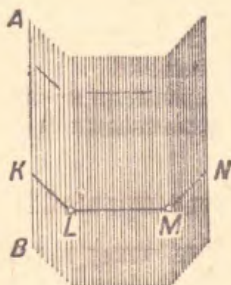


Рис. 4.

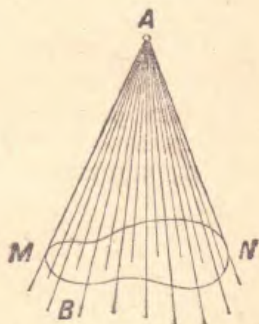


Рис. 5.

5. Если образующая AB , вращаясь вокруг неподвижной точки A (рис. 3), скользит по направляющей, которая представляет собою ломаную $KLMN$, то она опишет ломаную поверхность; ломаная поверхность получается и в том случае, если образующая AB , скользя по ломаной $KLMN$, перемещается параллельно самой себе (рис. 4). Такая поверхность состоит из отдельных плоских частей, или плоскостей; такова, например, боковая поверхность куба.

6. Если направляющая MN представляет собой кривую линию, то образующая AB , все время пересекая кривую MN , образует при своем движении кривую поверхность, при этом коническую поверхность (рис. 5), если AB одновременно проходит через какую-либо неподвижную точку A , не лежащую в плоскости кривой MN , и цилиндрическую поверхность (рис. 6), если AB , перемещаясь, все время остается параллельна своему первоначальному направлению.

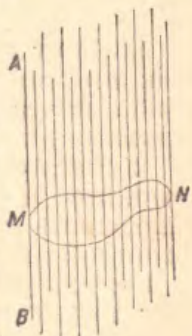


Рис. 6.

7. Через данную прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей.

Действительно, пусть дана какая-нибудь плоскость P , проходящая через прямую AB (рис. 7). Если вращать плоскость P вокруг прямой AB , как вокруг оси, то плоскость P займет в пространстве бесчисленное множество различных положений: P_1, P_2, P_3 и т. д. Плоскости, проходящие через данную прямую, образуют пучок плоскостей. Отсюда заключаем, что

одна прямая не определяет положения плоскости в пространстве.

Это суждение может быть высказано и иначе, принимая во внимание, что через две точки пространства можно провести только одну прямую:

две точки не определяют положения плоскости в пространстве.

Понятно, что

одна точка в пространстве, через которую можно провести бесчисленное множество прямых, не определяет положения плоскости в пространстве.

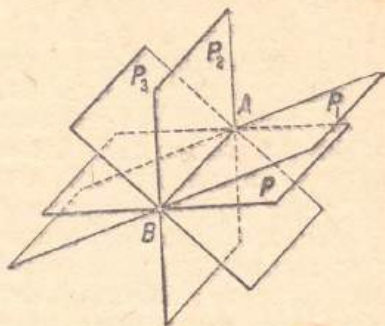


Рис. 7.

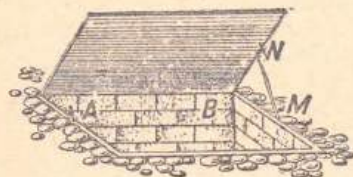


Рис. 8.

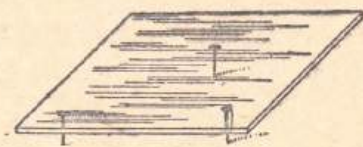


Рис. 9.

8. Имеем люк (рис. 8). Его крышка вращается на двух петлях A и B , или вокруг прямой AB . Если поднять крышку, а затем отпустить ее, она упадет. Стоит, однако, подпереть крышку в некоторой ее точке N планкой MN , т. е. дать ей еще одну, третью, точку опоры, и крышка займет определенное положение.

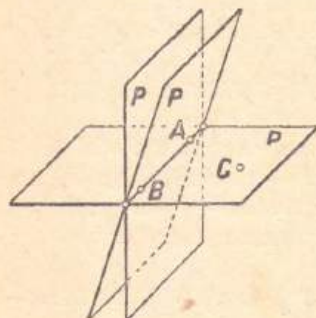


Рис. 10.

Итак, три точки, две петли A и B и точка опоры N , придали крышке люка определенное положение: крышка не падает.

Если воткнуть в стол три булавки, расположив их так, чтобы они не лежали на одной прямой (рис. 9), и положить на них кусок картона или стеклянную пластинку, то картон или пластинка примут определенное положение. Таким образом,

три точки, не лежащие на одной прямой, вполне определяют положение плоскости в пространстве.

9. Теорема. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Дано: A, B и C — три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой (рис. 10).

Требуется доказать: Через точки A, B и C можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Соединим две данные точки, например A и B , прямою AB и проведем через эту прямую AB плоскость P .

Если вращать плоскость P вокруг прямой AB как оси, то она пройдет через все точки пространства; среди отдельных положений плоскости P в пространстве будет одно, и только одно такое положение, когда она пройдет и через точку C .

Итак, через три точки A , B и C в пространстве, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

10. Следствия. 1) Две плоскости, имеющие три общие точки, не лежащие на одной прямой, совпадают.

2) Две плоскости пересекаются по прямой линии.

Допустим, что две плоскости пересекаются не по прямой линии, а по некоторой кривой; возьмем на этой кривой три какие-либо точки. Эти точки как точки кривой не лежат на одной прямой; значит, при таком допущении плоскости имели бы три общие точки, не лежащие на одной прямой; такие плоскости совпадают. Следовательно, допущение, что две плоскости пересекаются по кривой линии, неверно; они должны пересечься по прямой линии.

Не могут плоскости пересекаться и по ломаной, ибо мы тогда могли бы взять на обеих плоскостях три общие точки, не лежащие на одной прямой: две точки на одной из сторон ломаной и одну на другой, но в таком случае плоскости совпадают.



Рис. 11.

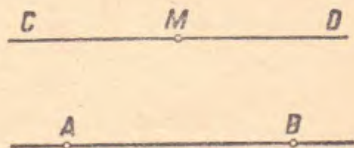


Рис. 12.

3) Через данную прямую и точку вне ее можно провести плоскость, и притом только одну.

Действительно, имеем прямую, определяемую двумя точками, и еще одну, третью точку, лежащую вне прямой; таким образом, имеем три точки, не лежащие на одной прямой, которыми вполне определяется положение плоскости.

4) Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну (рис. 11).

В самом деле, две пересекающиеся в точке O прямые AB и CD вполне определяются тремя точками: прямая AB — точками A и O , прямая CD — точкой C и той же точкой пересечения O , но через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

5) Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну (рис. 12).

Положение двух параллельных прямых вполне определяется тремя точками: двумя, A и B , взятыми на одной из прямых, например на AB , и третьей точкой M , взятой на второй прямой CD . Этими тремя точками A , B и M , не лежащими на одной прямой, определяется и положение параллельных прямых AB и CD и положение плоскости, проходящей через эти прямые AB и CD , притом единственной.

Общий вывод. Положение плоскости вполне определяется:

- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) прямою и точкой вне ее;
- 3) двумя пересекающимися прямыми и
- 4) двумя параллельными прямыми.

Вопросы и упражнения.

1. Определить наибольшее число прямых линий, которые можно провести через 5 точек в пространстве так, чтобы положение каждой прямой определялось данными точками.

2. Определить наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 5 данных точек в пространстве так, чтобы положение каждой из них определялось данными точками.

3. Из данной точки в пространстве проведено 5 лучей; найти наибольшее число плоскостей, положение которых определяется этими лучами.

4. Положение скольких плоскостей определено 4 параллельными прямыми и пятой прямой, пересекающей две из данных параллельных прямых?

II. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ.

§ 1. Прямая и плоскость.

1. Если прямая имеет две общие точки с плоскостью, то она лежит в плоскости всеми своими точками.

2. Если даны две точки A и B , лежащие по разные стороны от данной плоскости P (рис. 13), то прямая AB , проходящая через эти точки, имеет с плоскостью P только одну общую точку, точку M .

Прямая, имеющая с плоскостью только одну общую точку, пересекает плоскость.

Точка M называется основанием прямой, или следом ее. В точке M прямая AB делится на два луча MA и MB : один из них расположен по одну сторону от плоскости P , другой — по другую сторону от плоскости P .

3. Прямая, не имеющая с плоскостью ни одной общей точки, расположена параллельно плоскости. Так, например, любое ребро верхней грани куба параллельно плоскости нижней его грани.

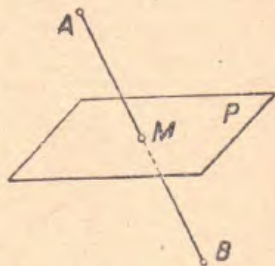


Рис. 13.

§ 2. Перпендикуляр к плоскости.

1. Прямая, пересекающая плоскость и образующая со всеми прямыми на плоскости, проходящими через ее основание, прямые углы, называется перпендикуляром к плоскости.

Прямая AB и плоскость P , к которой прямая перпендикулярна, называются взаимно перпендикулярными.

Запись: $AB \perp P$, или $P \perp AB$.

2. Дан отрезок AB (рис. 14) и к нему перпендикуляр OC , проходящий через середину O отрезка. При вращении перпендикуляра OC вокруг отрезка AB луч OC опишет некоторую поверхность. Любая

точка этой поверхности одинаково удалена от концов A и B данного отрезка AB . Поверхность эта — плоскость.

Действительно, пусть OC и OD (рис. 15) — два произвольных положения данного перпендикуляра OC в пространстве. Возьмем на них две произвольные точки C и D и проведем через них прямую CD . Любая точка E этой прямой CD также лежит на поверхности, образованной вращением перпендикуляра OC вокруг AB .

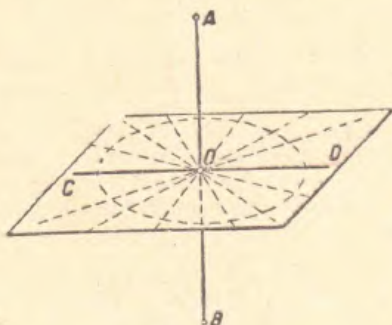


Рис. 14.

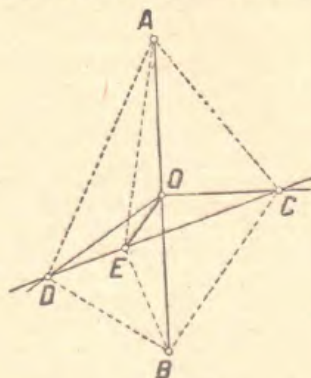


Рис. 15.

В самом деле, $\triangle CAD = \triangle CBD$ по трем сторонам: $AC = BC$, $AD = BD$, так как точки C и D одинаково удалены от A и от B , сторона же CD у этих треугольников общая; следовательно, $\angle ACD = \angle BCD$. Соединив точку E с точками A и B , получим два равных треугольника ACE и BCE , у которых EC — общая сторона, $CA = CB$ и $\angle ACE = \angle BCE$; отсюда следует, что $AE = BE$, т. е. точка E одинаково удалена от A и B и лежит на поверхности, образованной вращением перпендикуляра OC вокруг AB .

То же относится к любой точке прямой CD . Следовательно, прямая CD лежит на поверхности. Это верно для всякой прямой, проходящей через любые две точки поверхности; поверхность эта есть плоскость.

Рассматриваемая плоскость проходит и через точку O . Соединив E с O , имеем $\triangle AOE = \triangle BOE$ по трем сторонам: $OA = OB$, $AE = BE$ и OE — общая сторона, а потому $\angle AOE = \angle BOE = d$ как равные смежные углы; следовательно, $OE \perp AB$. Все прямые, перпендикулярные к отрезку AB в середине его O , лежат в плоскости, полу-

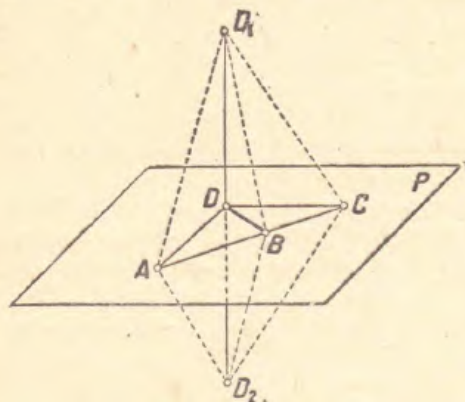


Рис. 16.

ченной вращением прямого угла AOC вокруг его стороны OA . Итак:

1) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость. Эта плоскость перпендикулярна к отрезку, концами которого служат две данные точки, и проходит через его середину.

2) Все перпендикуляры к прямой в данной на ней точке лежат в плоскости, перпендикулярной к прямой.

3. Теорема (о двух перпендикулярах). Прямая, перпендикулярная к двум прямым на плоскости, проходящим через ее основание, перпендикулярна и к самой плоскости,

Дано: Плоскость P и на ней прямые DC и DA ;
 $DD_1 \perp DC$ и $DD_1 \perp DA$ (рис. 16).

Требуется доказать: $DD_1 \perp P$.

Доказательство. Проведем на плоскости P через основание D прямой D_1D произвольную прямую DB и продолжим D_1D за плоскость P на расстояние $DD_2 = D_1D$. Тогда $BD_1 = BD_2$ и $D_1D \perp DB$. Это справедливо для любой прямой, проходящей на плоскости P через основание D перпендикуляра D_1D ; значит D_1D перпендикулярна ко всем прямым, лежащим на плоскости P и проходящим через точку D , а потому $D_1D \perp P$.

4. Теорема. Через данную точку можно провести к данной плоскости только один перпендикуляр.

Дано: Плоскость P и точка M (рис. 17 и 18).

Требуется доказать: Через точку M можно провести только один перпендикуляр к P .

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) точка M лежит на плоскости P (рис. 17) и 2) точка M лежит вне плоскости P (рис. 18).

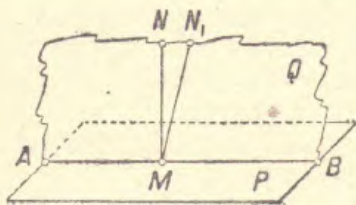


Рис. 17.

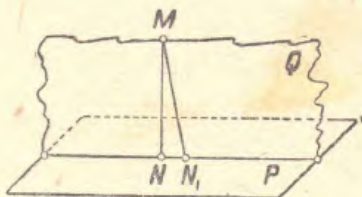


Рис. 18.

1) Пусть $MN \perp P$. Допустим, что через точку M можно провести к плоскости P еще другой перпендикуляр MN_1 . Проведем через две пересекающиеся прямые MN и MN_1 плоскость Q , которая пересечет плоскость P по прямой AB . Имеем: $\angle NMB = d$ по условию и $\angle N_1MB = d$ согласно сделанному допущению; получаем, что $\angle NMB = \angle N_1MB$. Но это невозможно, так как $\angle N_1MB$ составляет только часть угла NMB ; поэтому сделанное допущение, что через M может пройти еще другой перпендикуляр MN_1 , кроме данного MN , неверно.

Через точку M , взятую на плоскости P , можно провести только одну прямую, перпендикулярную к P .

2) Пусть $MN \perp P$ (рис. 18); допустим, что из точки M можно провести к плоскости P еще один перпендикуляр MN_1 . Проведем через две пересекающиеся прямые MN и MN_1 плоскость Q , которая пересечет плоскость P по прямой NN_1 ; в полученном треугольнике MNN_1 оказались два прямых угла: $\angle MNN_1$ и $\angle MN_1N$, что невозможно, а потому сделанное допущение, что из точки M можно провести к плоскости P еще другой перпендикуляр MN_1 , кроме данного MN , неверно.

Через точку M , взятую вне данной плоскости P , можно провести только один перпендикуляр к данной плоскости.

5. Теорема. К данной прямой через данную точку можно провести только одну перпендикулярную плоскость.

Дано: Прямая AB и точка M (рис. 19).

Требуется доказать: Через точку M можно провести только одну плоскость $P \perp AB$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) когда данная точка лежит на данной прямой и 2) когда данная точка лежит вне данной прямой.

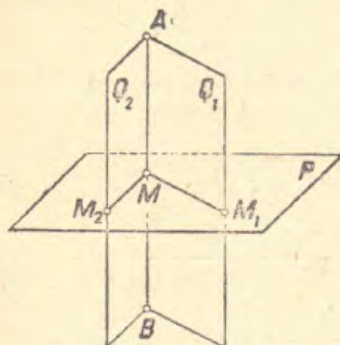


Рис. 19.

1) Проведем через данную прямую AB две произвольные плоскости Q_1 и Q_2 и в плоскости Q_1 прямую $MM_1 \perp AB$, а в плоскости Q_2 прямую $MM_2 \perp AB$.

Плоскость P , проведенная через две пересекающиеся прямые MM_1 и MM_2 , перпендикулярна к AB , так как $AB \perp MM_1$ и $AB \perp MM_2$. Плоскость эта — единственная, которую можно провести через две пересекающиеся прямые.

2) Если точка M лежит вне данной прямой, то проводим сначала плоскость Q_1 через точку M_1 и прямую AB и в этой плоскости проводим $M_1M \perp AB$; затем в плоскости Q_2 через точку M — прямую $MM_2 \perp AB$. Мы получаем две пересекающиеся прямые MM_1 и MM_2 , которыми определяется одна единственная плоскость P . Плоскость эта $P \perp AB$, так как $AM \perp MM_1$ и $AM \perp MM_2$.

§ 3. Перпендикуляр и наклонные. Проекция точки и отрезка на плоскость.

1. К данной плоскости P из точки M вне плоскости проведен перпендикуляр MA (рис. 20). Основание A перпендикуляра MA называется проекцией точки M на плоскость P .

Проекция точки на плоскость есть точка.

Всякая другая прямая MB , проведенная из той же точки M к плоскости P , называется наклонной, а отрезок AB на плоскости P , концами которого служат основания A и B перпендикуляра MA и наклонной MB , называется проекцией наклонной на данную плоскость.

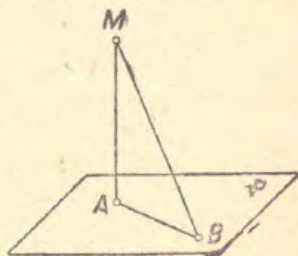


Рис. 20.

2. Теорема. Если из одной точки вне плоскости проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

- 1) перпендикуляр короче всякой наклонной;
- 2) наклонные равны, если равны их проекции;
- 3) из двух наклонных больше та, проекция которой больше.

Дано: $MN \perp P$; MA, MB, MC — наклонные (рис. 21).
 $NA = NB$ и $NB < NC$.

Требуется доказать: $MN < MA$; $MN < MB$ и т. д.
 $MA = MB$ и $MB < MC$.

Доказательство. Вращая прямоугольные треугольники MNA , MNB и MNC вокруг их общего катета MN , приводим их в такое положение, чтобы они лежали в одной плоскости (рис. 21а).

Тогда из прямоугольных треугольников MNA , MNB и MNC имеем: $MN < MA$, $MN < MB$ и $MN < MC$.

Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников MNA и MNB вытекает, что $MA = MB$; рассматривая тупоугольный треугольник MBC , замечаем, что $MB < MC$, а, следовательно, и $MA < MC$.

3. Теорема (обратная). Если из одной точки вне плоскости проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

- 1) равным наклонным соответствуют равные проекции;
- 2) большей проекции соответствует и большая наклонная.

Доказательство аналогично обратной теореме планиметрии.

4. Расстоянием точки от плоскости называется отрезок, концами которого служат данная точка и проекция ее на эту плоскость.

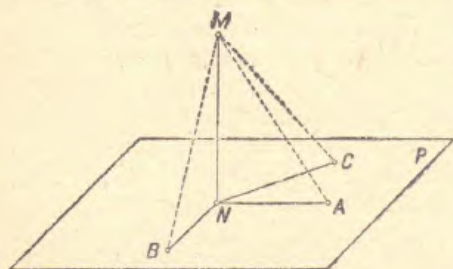


Рис. 21.

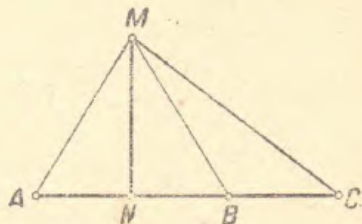


Рис. 21а.

Обозначим расстояние MN точки M от плоскости P через a (рис. 21), длину наклонной MA — через y , а проекцию ее NA — через x . Из прямоугольного треугольника MNA имеем: $y^2 = x^2 + a^2$, откуда $y = \sqrt{x^2 + a^2}$. В полученном равенстве длина перпендикуляра a — величина постоянная, а потому с изменением x — длины проекции наклонной — изменяется и y — длина наклонной.

Зависимость, выражаемая формулой $y = \sqrt{x^2 + a^2}$, может быть использована для алгебраического доказательства теоремы о перпендикуляре и наклонных.

Если обозначить $\angle MAN$ через α , то из прямоугольного треугольника MNA получаем: $y = \frac{a}{\sin \alpha}$ или $x = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$. Отсюда заключаем, что наклонная, а также и проекция наклонной изменяется с изменением угла α между наклонной и ее проекцией.

§ 4. Теорема о трех перпендикулярах.

1. Теорема. Прямая (CD), проведенная на плоскости через основанную (B) наклонной (MB) перпендикулярно к проекции (AB) наклонной, перпендикулярна и к самой наклонной.

Дано: $MA \perp P$; MB — наклонная; AB — проекция наклонной;
 $CD \perp AB$; CD — на плоскости P (рис. 22).

Требуется доказать: $CD \perp MB$.

Доказательство. Отложим на CD от точки B отрезки $BD = BC$ и соединим точки C и D с точками A и M . Тогда $AC = AD$ как наклонные в плоскости P , проекции которых BD и BC равны; кроме того, $MC = MD$ как наклонные, имеющие равные проекции AC и AD . Отсюда следует, что треугольник DMC равнобедренный; его медиана MB есть одновременно и его высота, т. е. $MB \perp CD$, или $CD \perp MB$.

2. Теорема (обратная). Прямая (CD), проведенная на плоскости через основание (B) наклонной (MB) перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна и к проекции (AB) наклонной.

Дано: $MA \perp P$; MB — наклонная; AB — проекция наклонной;
 $CD \perp MB$; CD — в плоскости P (рис. 22).

Требуется доказать: $CD \perp AB$.

Доказательство. Отложив $BD = BC$ и соединив точки C и D с точками A и M , имеем: $MC = MD$ как наклонные в плоскости треугольника CMD , проекции которых $BD = BC$, поэтому равны и проекции их AC и AD на плоскость P ; в таком случае треугольник DAC — равнобедренный, и медиана его AB перпендикулярна к основанию CD , т. е. $AB \perp CD$, или $CD \perp AB$.

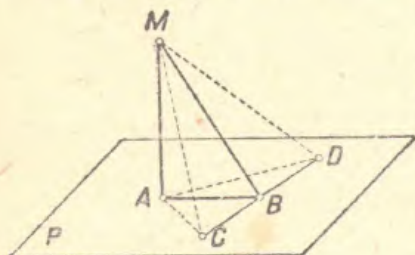


Рис. 22.

Теорема о трех перпендикулярах называется так потому, что в ней рассматриваются три пары прямых, взаимно перпендикулярных:

1) $MA \perp AB$; 2) $AB \perp CD$ и 3) $CD \perp MB$. Кроме того, следует уяснить себе, что прямая CD , перпендикулярная к двум прямым BA и BM , перпендикулярна и к плоскости треугольника MAB .

§ 5. Угол между прямой и плоскостью.

1. Любая прямая, проходящая на плоскости через основание перпендикуляра к плоскости, образует с перпендикуляром прямые углы. Прямая, проходящая на плоскости через основание наклонной, образует с наклонной прямые углы только в том случае, когда она перпендикулярна к проекции наклонной; во всех же остальных случаях прямая, проходящая на плоскости через основание наклонной, образует с ней два неравных смежных угла: один — острый, другой — тупой.

Говоря об угле между наклонной и прямой на плоскости, проходящей через основание наклонной, мы всегда будем иметь в виду острый угол. Из бесчисленного множества прямых, которые можно провести на плоскости через основание наклонной, выделяют прямую, перпендикулярную к ее проекции: она образует с наклонной наибольший угол, а именно — прямой, все же остальные образуют с нею острые углы, если иметь в виду сделанную выше оговорку.

2. Теорема. Наименьший острый угол, образуемый наклонной с прямой, проходящей на плоскости через основание наклонной, есть угол, образуемый наклонной с ее проекцией.

Дано: $MA \perp P$; MB — наклонная, AB — проекция наклонной на плоскость P и $\angle MBA = \beta$ между наклонной MB и ее проекцией AB (рис. 23).

Требуется доказать: $\angle MBA$ — наименьший угол между наклонной и прямой, проведенной на плоскости через основание наклонной.

а) Доказательство (первое). Пусть BC — произвольная прямая, проходящая на плоскости P через основание B наклонной MB . Проведем на плоскости P прямую $AC \perp BC$ и соединим C с M . Тогда на основании теоремы о трех перпендикулярах $BC \perp MC$, и треугольник MCB — прямоугольный.

Повернем плоскость треугольника MCB вокруг MB так, чтобы она совпала с плоскостью треугольника MAB . Геометрическое место вершин прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу MB , есть окружность, диаметром которой является гипотенуза (рис. 24). Хорда MC больше хорды MA (MA — перпендикуляр, MC — наклонная), и потому она стягивает и большую дугу: $\widehat{MAC} > \widehat{MA}$, а потому и $\angle \alpha > \angle \beta$.

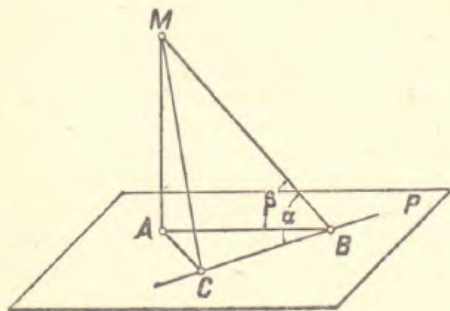


Рис. 23.

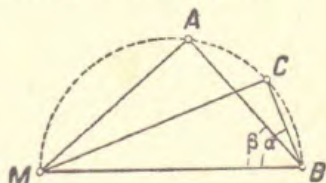


Рис. 24.

б) Доказательство (второе). 1) Из треугольника MAB имеем: $\sin \beta = \frac{MA}{MB}$. 2) из треугольника MCB имеем: $\sin \alpha = \frac{MC}{MB}$. Сравнивая правые части обоих равенств и зная, что $MA < MC$, заключаем, что $\sin \beta < \sin \alpha$, откуда следует, что $\beta < \alpha$.

Наименьший угол, образованный наклонной и ее проекцией на плоскость, и называется углом прямой с плоскостью.

Вопросы и упражнения.

1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек в пространстве.

2. Две прямые AB и CD на плоскости P пересекаются в точке M ; на них взяты отрезки $MA = MB$ и $MC = MD$. Вне плоскости взята точка N так, что $NA = NB$ и $NC = ND$. Доказать, что $NM \perp P$.

3. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек в пространстве, не лежащих на одной прямой.

4. Из точки A вне плоскости P проведены две равные наклонные AB и AC . Отрезок BC , концами которого служат основания наклонных, равен $a = 10$ см, угол между BC и наклонной AB равен $\alpha = 60^\circ$, угол между BC и проекцией наклонной AC равен $\beta = 30^\circ$. Найти расстояние точки A от плоскости.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника $c = 12$ см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится точка, отстоящая от каждой вершины треугольника на расстоянии $m = 10$ см?

6. К плоскости прямоугольника $ABCD$ через вершину его D проведен перпендикуляр DK , конец которого K отстоит от вершин A , B и C прямоугольника на расстояниях: $a = 2,4$ см, $b = 2,8$ см и $c = 3,6$ см. Вычислить длину DK .

7. Отрезок $AB=6$ см расположен вне плоскости P , концы его отстоят от плоскости на расстояниях $AM=8$ см и $BN=5$ см. Найти угол между AB и P .

8. Катеты прямоугольного треугольника $a=18$ см и $b=32$ см; к плоскости треугольника в середине гипотенузы проведен перпендикуляр $h=12$ см. Найти расстояние концов перпендикуляра от катетов.

III. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 1. Параллельные и скрещивающиеся прямые.

1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они, находясь в одной плоскости, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

2. Две прямые на плоскости, перпендикулярные к третьей прямой на той же плоскости, параллельны. Однако две прямые в пространстве, перпендикулярные к одной и той же прямой, могут и не быть параллельными. Так, например, если провести два или больше перпендикуляров к прямой, в одной и той же точке ее, то все они лежат в одной плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через эту точку; значит, все эти перпендикуляры пересекаются в одной точке. Два перпендикуляра к одной и той же прямой в пространстве могут и не пересекаться, сколько бы их ни продолжали, и все-таки не быть параллельными. Возьмем куб (рис. 25). Ребра его A_1D_1 и D_2C_2 оба перпендикулярны к ребру D_2D_1 ; они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

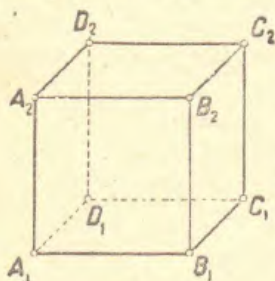


Рис. 25.

То же самое можно сказать о ребрах B_2B_1 и A_2D_2 , A_1B_1 и B_2C_2 и т. д.

Две прямые в пространстве, которые не пересекаются и не параллельны, называются скрещивающимися прямыми.

3. Теорема. Через точку вне данной прямой в пространстве можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Дано: Прямая AB и точка M вне этой прямой (рис. 26).

Требуется доказать: Через точку M можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Доказательство. Через прямую AB и точку M вне ее проведем плоскость P . Прямая, проведенная на плоскости P через точку M параллельно AB , искомая. На основании же аксиомы о параллельных через точку M на плоскости P можно провести только одну прямую, параллельную AB .

4. Через две скрещивающиеся прямые провести плоскость нельзя. Если допустить противное, а именно, что можно провести плоскость, то данные прямые, как не пересекающиеся и лежащие в одной плоскости, должны были быть параллельными; это противоречит условию, что данные прямые — скрещивающиеся.

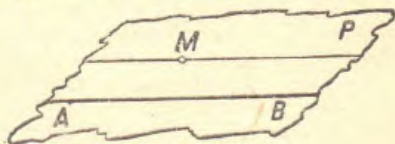


Рис. 26.

5. Теорема. Два перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны.

Дано: $AB \perp P$ и $CD \perp P$ (рис. 27).

Требуется доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. Чтобы доказать, что $AB \parallel CD$, мы должны убедиться: 1) в том, что AB и CD не пересекаются и 2) в том, что AB и CD лежат в одной плоскости.

1) Два перпендикуляра к одной плоскости не могут пересечься, ибо если бы они пересеклись в какой-либо точке, то из этой точки к плоскости были бы проведены два перпендикуляра, что невозможно.

2) Соединим основания перпендикуляров A и C и проведем на плоскости P прямую $MN \perp AC$; отложим затем $AN = AM$. Прямая $BA \perp MN$ и проходит через середину A отрезка MN . Любая точка прямой AB одинаково удалена от концов M и N отрезка MN . Соединяя N и M с точкой C и произвольной точкой D на перпендикуляре CD , имеем $CN = CM$ и $DN = DM$ как наклонные, проекции которых равны; это значит, что любая точка прямой CD одинаково удалена от точек M и N . Все точки пространства, одинаково удаленные от концов отрезка MN , лежат в одной плоскости, а потому AB и CD лежат в одной плоскости. Итак, *прямые AB и CD не пересекаются и лежат в одной плоскости, а потому они параллельны.*

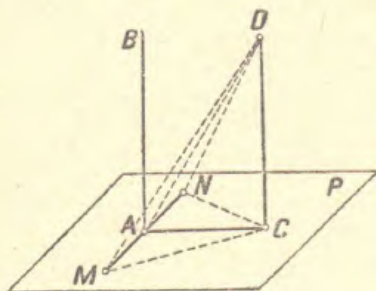


Рис. 27.

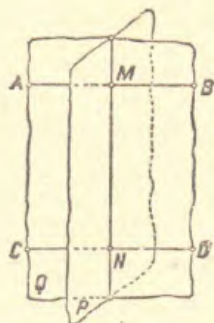


Рис. 23.

6. Теорема. Плоскость, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

Дано: $AB \parallel CD$; плоскость P пересекает прямую AB в точке M (рис. 28).

Треб. доказать: Плоскость P пересекает прямую CD .

Доказательство. Проведем плоскость Q через данные параллельные прямые AB и CD . Эта плоскость Q пересекает плоскость P по некоторой прямой MN , на которой лежит точка M , точка пересечения прямой AB с плоскостью P . Если допустить, что прямая MN не пересекает прямую CD , т. е. $CD \parallel MN$ и $AB \parallel CD$, то это противоречит аксиоме о параллельных. Итак, прямая CD пересекает MN , а потому CD пересекает и плоскость P .

7 (9)¹. Теорема. Плоскость, перпендикулярная к одной из двух данных параллельных прямых, перпендикулярна и к другой.

Дано: $AB \parallel CD$ и плоскость $P \perp AB$ (рис. 29).

Требуется доказать: Плоскость $P \perp CD$.

Доказательство. Проведем через прямые AB и CD плоскость Q ; она пересечет плоскость P по прямой AC . Прямая $AB \perp P$, а потому $AB \perp AC$, или $AC \perp AB$. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых на плоскости, то она перпендикулярна и к другой; следовательно, $AC \perp CD$.

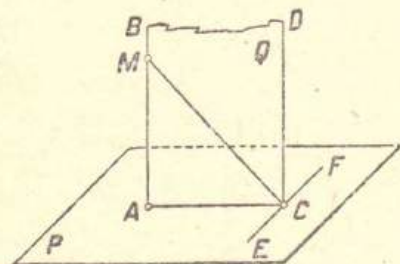


Рис. 29.

На плоскости P проведем $EF \perp AC$; возьмем на AB произвольную точку M и соединим ее с точкой C ; тогда $EF \perp CM$ на основании теоремы о трех перпендикулярах. Следовательно, $EF \perp AC$ и $EF \perp CM$, значит $EF \perp Q$, а потому $EF \perp CD$; если $CD \perp EF$ и $CD \perp AC$, то $CD \perp P$, т. е. плоскость P перпендикулярна и к прямой CD , параллельной AB .

Эта теорема является теоремой, обратной к теореме: два перпендикуляра к плоскости параллельны.

8 (10). Следствие. Две прямые (AB) и (CD), параллельные каждой порознь одной и той же третьей прямой (MN), параллельны между собою.

Если провести плоскость $P \perp MN$, то плоскость P перпендикулярна к прямым AB и CD , а потому $AB \parallel CD$.

9 (7). Теорема. Два угла, стороны которых параллельны и одинаково направлены, равны.

Дано: $BA \parallel B_1A_1$ и $BC \parallel B_1C_1$ и одинаково направлены (рис. 30).

Требуется доказать: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим на сторонах данных углов отрезки $BA = B_1A_1$ и $BC = B_1C_1$ и соединим прямыми точки B и B_1 , A и A_1 и C и C_1 . Тогда четырехугольники ABB_1A_1 и BB_1C_1C — параллелограммы, так как в каждом из них две противолежащие стороны равны по построению и параллельны по условию. Поэтому и $BB_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$ и $BB_1 = AA_1 = CC_1$.

Соединим затем прямыми точки A и C , A_1 и C_1 , получим четырехугольник AA_1C_1C — параллелограмм: $AA_1 = CC_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$ по доказанному; следовательно, $AC = A_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем равным сторонам, а потому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

10 (8). Теорема. Две параллельные прямые, пересекающие плоскость, образуют с ней равные углы.

Дано: 1) $AB \parallel CD$; 2) плоскость P , пересекающая данные прямые; 3) BK и DL — проекции прямых на плоскость P (рис. 31).

Требуется доказать: $\angle ABK = \angle CDL$.

¹ В скобках указаны соответствующие номера на стр. 18 и 19 первого издания.

Доказательство. Треугольники AKB и CLD — прямоугольные треугольники. $AB \parallel CD$ по условию и $AK \parallel CL$ по построению, так как $AK \perp P$ и $CL \perp P$, а потому $\angle KAB = \angle LCD$ как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами; следовательно, и $\angle ABK = \angle CDL$, т. е. прямые AB и CD образуют с плоскостью равные углы.

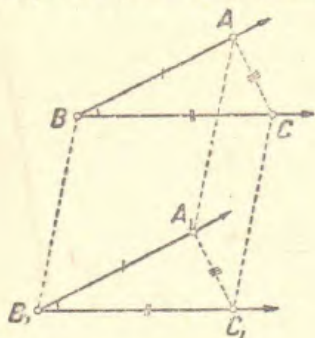


Рис. 30.

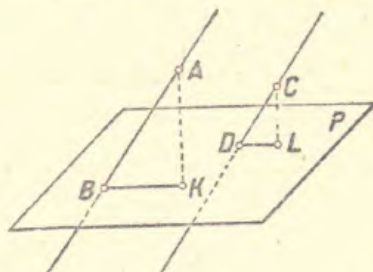


Рис. 31.

§ 2. Параллельные прямые и плоскости.

1. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжать.

Например, в кубе (рис. 25, стр. 16) ребро $A_2B_2 \parallel$ пл. $A_1B_1C_1D_1$.

2. Первый признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, лежащая вне данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на данной плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Дано: 1) MN — прямая на плоскости P ; 2) $AB \parallel MN$ (рис. 32).

Требуется доказать: $AB \parallel P$.

Доказательство (от противного). Пусть прямая AB не параллельна плоскости P и, следовательно, пересекает плоскость P . Проведем через AB и MN плоскость Q ; тогда AB может пересечь плоскость P не иначе, как пересекаясь с прямой MN , общей для обеих плоскостей; но это противоречит условию; значит, AB не пересекает P , а потому $AB \parallel P$.

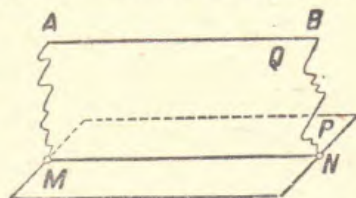


Рис. 32.

Следствие. Прямая, параллельная линии пересечения двух данных плоскостей, параллельна каждой из плоскостей.

3. **Теорема (обратная).** Если через данную прямую (AB), параллельную данной плоскости (P), провести плоскость (Q), пересекающую данную плоскость (P), то линия (MN) пересечения плоскостей параллельна данной прямой (AB).

Дано: $AB \parallel P$; MN — линия пересечения плоскости P и плоскости Q , проведенной через AB (рис. 32).

Требуется доказать: $AB \parallel MN$.

Доказательство (от противного). Проведем через AB плоскость Q , пересекающую данную плоскость P по прямой MN . Тогда

$AB \parallel MN$, ибо в противном случае AB , пересекая прямую MN , должна была бы пересечь и плоскость P , на которой лежит MN , что невозможно, так как $AB \parallel P$; итак, $AB \parallel MN$.

Следствие. Прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна их линии пересечения.

4. Второй признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема. Прямая и плоскость, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.

Дано: $AB \perp MN$ и $P \perp MN$ (рис. 33).

Требуется доказать: $AB \parallel P$.

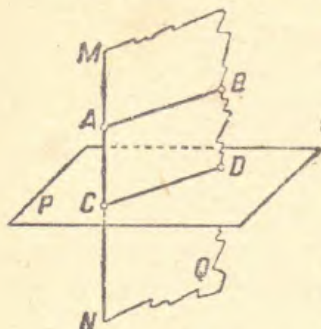


Рис. 33.

Доказательство. Проведем через две пересекающиеся прямые MN и AB плоскость Q ; она пересечет плоскость P по прямой $CD \perp MN$. $AB \perp MN$ по условию, а $CD \perp MN$ по построению; следовательно, $CD \parallel AB$, а потому, на основании первого признака параллельности прямой и плоскости, $AB \parallel P$.

Следствие. Все точки прямой, параллельной данной плоскости, отстоят от плоскости на одинаковом расстоянии.

Дано: $MN \parallel P$; $AA_1 \perp P$ и $BB_1 \perp P$ (рис. 34).

Требуется доказать: $AA_1 = BB_1$.

Доказательство. Два перпендикуляра AA_1 и BB_1 , проведенные из двух произвольных точек A и B прямой MN к плоскости P , лежат в одной плоскости Q и параллельны. Эта плоскость Q пересекает плоскость P по прямой $A_1B_1 \parallel AB$. Следовательно, AA_1B_1B прямоугольник. $\angle A_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, а потому $AA_1 = BB_1$. Итак, все точки MN отстоят от P на одинаковом расстоянии.

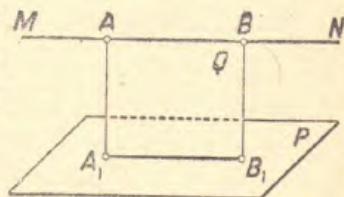


Рис. 34.

Расстоянием прямой от данной плоскости, которой она параллельна, называется отрезок, концами которого служат произвольная точка прямой и проекция этой точки на данную плоскость.

§ 3. Параллельные плоскости.

1. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжать.

2. Первый признак параллельности плоскостей.

Теорема. Две плоскости параллельны, если они перпендикулярны к одной и той же прямой.

Дано: Прямая AB ; плоскость $P \perp AB$; плоскость $Q \perp AB$ (рис. 35).

Требуется доказать: Плоскость $P \parallel Q$.

Доказательство (от противного). Допустим, что плоскость P не параллельна плоскости Q . Пусть плоскость P и плоскость Q пересекаются по прямой CD ; тогда через какую-нибудь точку M_1 прямой CD

проходили бы две плоскости, перпендикулярные прямой AB , что невозможно, а потому плоскость $P \parallel Q$.

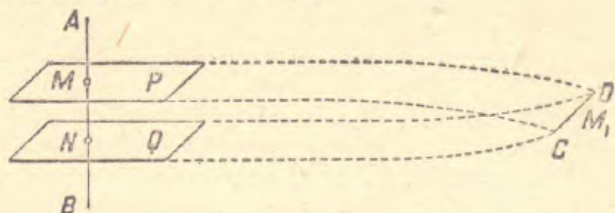


Рис. 35.

3. Второй признак параллельности плоскостей.

Теорема. Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые на одной из них параллельны двум пересекающимся прямым на другой плоскости.

Дано: OB и OA — две пересекающиеся прямые на плоскости P ;
 O_1B_1 и O_1A_1 — две пересекающиеся прямые на плоскости Q ;
 $OB \parallel O_1B_1$ и $OA \parallel O_1A_1$ (рис. 36).

Требуется доказать: $P \parallel Q$.

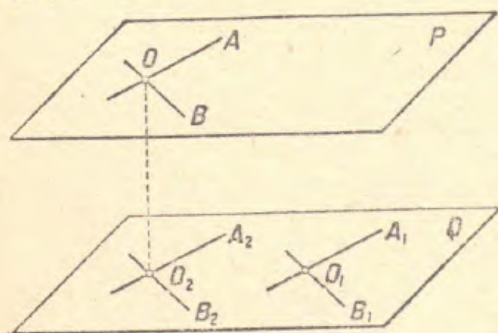


Рис. 36.

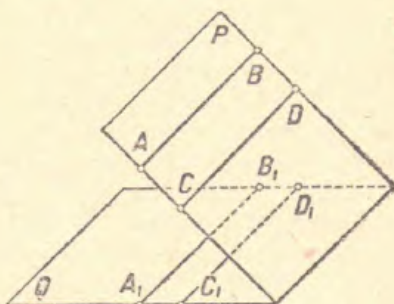


Рис. 36а.

Доказательство. Из точки пересечения O прямых OA и OB на плоскости P проводим перпендикуляр OO_2 к плоскости Q ; $OO_2 \perp Q$. Через основание O_2 перпендикуляра OO_2 проводим на плоскости Q прямую $O_2B_2 \parallel O_1B_1$ и прямую $O_2A_2 \parallel O_1A_1$; тогда $O_2B_2 \parallel OB$ и $O_2A_2 \parallel OA$, так как две прямые, параллельные одной и той же третьей, параллельны между собою. Но $OO_2 \perp O_2B_2$, а потому $OO_2 \perp OB$; также и $OO_2 \perp O_2A_2$ и потому $OO_2 \perp OA$; следовательно, $OO_2 \perp P$, так как OO_2 перпендикулярна к двум прямым OA и OB , лежащим на плоскости P и проходящим через основание O прямой OO_2 . Итак, $OO_2 \perp Q$ по построению и $OO_2 \perp P$ по доказанному, а потому $P \parallel Q$ на основании первого признака параллельности плоскостей.

Замечание. Если две прямые на одной плоскости P параллельны между собою и параллельны двум прямым на другой плоскости Q , то эти плоскости могут и не быть параллельными (рис. 36а). Следовательно, условие параллельности двух прямых на одной плоскости двум прямым на другой — условие недостаточное. Достаточным условием для параллельности двух плоскостей будет только тогда, когда две пересекающиеся прямые, лежащие на одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим на другой плоскости.

4. Теорема. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то прямые, по которым плоскости пересекаются, параллельны.

Дано: Плоскость $S \parallel Q$; плоскость P пересекает плоскости S и Q ; AB и CD — линии пересечения плоскостей (рис. 37).

Требуется доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство (от противного). Допустим, что прямая AB не параллельна прямой CD ; тогда прямые AB и CD или пересекаются или скрещиваются. Однако пересечься они не могут, так как в этом случае пересеклись бы и плоскости S и Q , на которых они лежат; они не могут и скрещиваться, так как они лежат в одной плоскости P . Следовательно, допущение, что AB не параллельна CD , неверно, а потому $AB \parallel CD$.

Следствия. 1) Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую. 2) Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

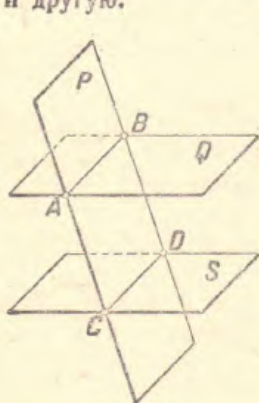


Рис. 37.

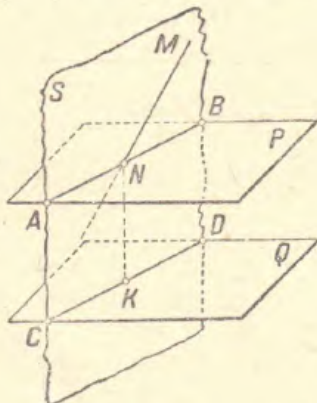


Рис. 38.

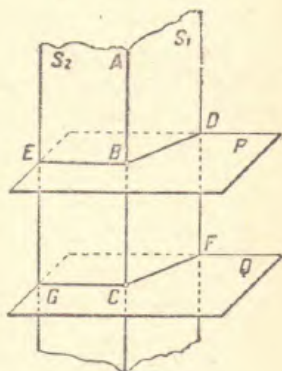


Рис. 38а

1) Пусть MN пересекает плоскость P в точке N . Проведем из точки N (рис. 38) перпендикуляр NK к плоскости Q и через две пересекающиеся прямые MN и NK плоскость S ; последняя пересечет плоскости P и Q по параллельным прямым AB и CD . Прямые AB , CD и MN лежат в одной плоскости S . Прямая MN пересекает AB , а потому она пересечет и прямую CD , а следовательно, и плоскость Q .

2) Пусть плоскость S (рис. 38) пересекает плоскость P по прямой AB . Проведем на плоскости S прямую MN , пересекающую AB ; MN пересечет и плоскость Q , а потому и плоскость S пересечет плоскость Q .

5. Теорема. Прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и к другой.

Дано: $P \parallel Q$ и $AB \perp P$ (рис. 38а).

Требуется доказать: $AB \perp Q$.

Доказательство. Прямая AB , пересекая плоскость P , пересечет и плоскость Q в некоторой точке C .

Проведем через AB две произвольные плоскости S_1 и S_2 ; они пересекут плоскости P и Q по прямым $BD \parallel CF$ и $BE \parallel CG$. Но $AB \perp BD$ и $AB \perp BE$; следовательно, $AB \perp CF$ и $AB \perp CG$, и потому $AB \perp Q$.

6. Теорема. Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны.

Дано: $AB \parallel CD$; $P \parallel Q$; MN и M_1N_1 — отрезки параллельных AB и CD между плоскостями P и Q (рис. 39).

Требуется доказать: $MN = M_1N_1$.

Доказательство. Проведем через AB и CD плоскость S ; она пересечет плоскости P и Q по прямым $MM_1 \parallel NN_1$. Получим четырехугольник MNN_1M_1 , противоположные стороны которого попарно параллельны; следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм, и $MN = M_1N_1$.

Следствие. Параллельные плоскости отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии.

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется отрезок перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки одной плоскости на другую и заключенного между этими плоскостями.

7. Теорема. Если две прямые пересекают ряд параллельных плоскостей, то соответствующие отрезки прямых между плоскостями пропорциональны.

Дано: Плоскость $P \parallel Q \parallel R$ (рис. 40); AB и CD — прямые, пересекающие плоскости P, Q и R .

Требуется доказать: $KL:LM = K_1L_1:L_1M_1$.

Доказательство. Проведем через K_1 прямую $K_1M_2 \parallel KM$; тогда $K_1L_2 = KL$ и $L_2M_2 = LM$. Плоскость, проходящая через прямые K_1M_1 и K_1M_2 , пересекает плоскости Q и R по прямым параллельным, а потому $L_2L_1 \parallel M_2M_1$ и $\frac{K_1L_1}{L_1M_1} = \frac{K_1L_2}{L_2M_2} = \frac{KL}{LM}$.

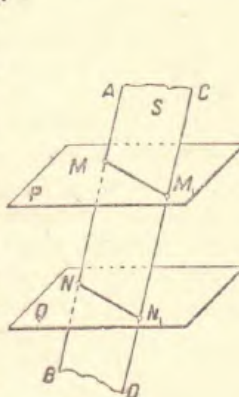


Рис. 39.

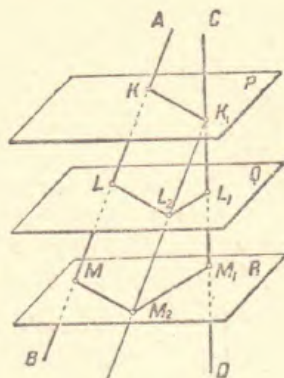


Рис. 40.

§ 4. Скрещивающиеся прямые.

1. Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести одну плоскость, параллельную другой прямой, и обе плоскости взаимно параллельны.

Дано: AB и CD — скрещивающиеся прямые (рис. 41).

Требуется доказать: через AB и CD проходят две параллельные плоскости.

Доказательство. Через произвольную точку M прямой AB проводим прямую $KL \parallel CD$ и через обе пересекающиеся прямые AB и KL плоскость P .

Через произвольную точку N прямой CD проводим прямую $K_1L_1 \parallel AB$ и через обе пересекающиеся прямые K_1L_1 и CD плоскость Q .

По второму признаку параллельности двух плоскостей имеем: плоскость $P \parallel Q$.

2. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Проводим из точки M плоскости P перпендикуляр MO к плоскости Q (рис. 41) и через основание его O прямую $K_2L_2 \parallel K_1L_1$, тогда $K_2L_2 \parallel AB$.

K_2L_2 пересекает CD в точке O_1 . Если затем провести $O_1N_1 \parallel OM$, то O_1N_1 есть кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми CD и AB .

В самом деле, $MO \perp Q$, а потому $MO \perp P$, но тогда $N_1O_1 \perp Q$ и $N_1O_1 \perp P$; следовательно, $N_1O_1 \perp CD$ и $N_1O_1 \perp AB$; N_1O_1 — кратчайшее расстояние между прямыми CD и AB , оно равно расстоянию между параллельными плоскостями P и Q , в которых лежат скрещивающиеся прямые. Итак,

кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть в то же время и расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые.

3. Задача. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD и точка M . Провести через точку M прямую, пересекающую обе скрещивающиеся прямые (рис. 42).

Решение. Проведем через AB и CD взаимно параллельные плоскости P и Q , а через точку M и прямую AB плоскость S ; эта плоскость S , пересекая плоскость P , пересечет и параллельную ей плоскость Q по некоторой прямой $A_1B_1 \parallel AB$. Прямая A_1B_1 пересечет CD , ибо если бы она была ей параллельна, то и $CD \parallel AB$, что невозможно, так как это противоречит условию задачи, согласно которому CD и AB скрещиваются. Итак, A_1B_1 пересекает CD . Обозначим точку их пересечения через K и проведем через K и M прямую KM ; KM пересекает A_1B_1 , следовательно, она пересечет и AB в точке L . Итак KM — искомая прямая, пересекающая обе скрещивающиеся прямые AB и CD .

4. Угол между двумя скрещивающимися прямыми. Если две прямые в пространстве пересекаются, то углом между ними называется угол, лежащий на плоскости, проходящей через обе пересекающиеся прямые.

Если же две прямые скрещиваются, то под углом между ними подразумевают угол, образованный двумя прямыми, проведенными через какую-нибудь произвольную точку пространства параллельно каждой из скрещивающихся прямых. Так, за угол между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 41) можно принять $\angle DNL_1$, или $\angle DO_1L_2$, или $\angle A_1B_1D_1$ между прямыми B_1A_1 и B_1D_1 , параллельными BA и CD и

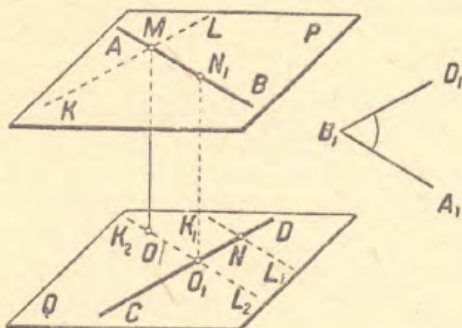


Рис. 41.

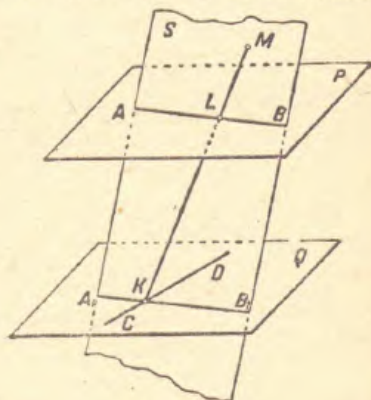


Рис. 42.

проведенными через произвольную точку B_1 в пространстве. Обычно имеют в виду острый угол, хотя его дополнительный угол тоже является углом между скрещивающимися прямыми. Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90° , то они называются ортогональными.

§ 5. Проекция прямой на плоскость.

1. Теорема. Проекция прямой на плоскость есть прямая.

Дано: Плоскость P и прямая MN вне ее (рис. 43).

Требуется доказать: Проекция прямой на P — прямая.

Доказательство. Пусть A, B, C и D — произвольные точки прямой MN и A_1, B_1, C_1 и D_1 — их проекции на плоскость P , т. е. $AA_1 \perp P$, $BB_1 \perp P$, $CC_1 \perp P$ и $DD_1 \perp P$. Проведем плоскости через AA_1 и BB_1 и через BB_1 и CC_1 . Обе плоскости имеют общую прямую AC и общую прямую BB_1 , а потому они совпадают; пусть это будет плоскость Q ; значит, AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат в одной плоскости Q , и потому точки A_1 , B_1 и C_1 , принадлежащие и плоскости Q и плоскости P , лежат на линии их пересечения, т. е. на прямой; то же самое относится и к точкам B_1 , C_1 и D_1 и т. д. Итак, проекция прямой на плоскость есть прямая.

2. Плоскость Q , в которой лежат перпендикуляры, проведенные из точек прямой MN к плоскости P , называется проектирующей плоскостью.

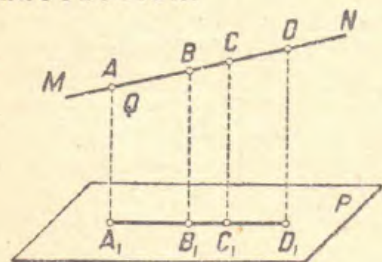


Рис. 43.

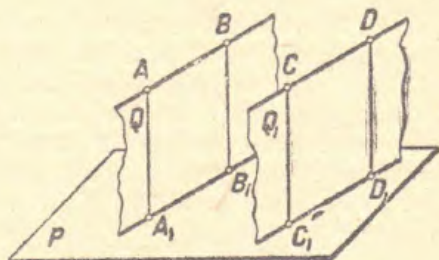


Рис. 44.

3. Теорема. Проекции параллельных прямых на плоскость параллельны.

Дано: Плоскость P ; $AB \parallel CD$; A_1B_1 и C_1D_1 — проекции AB и CD на плоскость P (рис. 44).

Требуется доказать: $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

Доказательство. $AA_1 \perp P$ и $CC_1 \perp P$ и потому $AA_1 \parallel CC_1$, но $AB \parallel CD$, значит, проектирующие плоскости Q и Q_1 на основании второго признака параллельности плоскостей параллельны: $Q \parallel Q_1$. Следовательно, прямые A_1B_1 и C_1D_1 , получаемые при пересечении параллельных плоскостей Q и Q_1 плоскостью P , параллельны: $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

4. Если две прямые пересекаются, то пересекаются и их проекции на плоскость.

Проекция прямых — прямые; проекция общей точки прямых есть общая точка их проекций; следовательно, и проекции прямых пересекаются. В частном случае проекции двух пересекающихся прямых могут совпадать.

5. Теорема. Если отрезок AB точкой M делится в отношении $m:n$, то и проекция M_1 точки M делит проекцию A_1B_1 отрезка AB в отношении $m:n$ (рис. 45).

Дано: Отрезок AB и точка M на отрезке AB ; $AM:MB=m:n$,

Требуется доказать: $A_1M_1:M_1B_1=m:n$.

Доказательство. Проводим в проектирующей плоскости Q $AB_2 \parallel A_1B_1$. Тогда $AM:MB=AM_2:M_2B_2=A_1M_1:M_1B_1=m:n$.

Теорема эта остается верной и для косоугольной проекции (рис. 45а); стрелка на рисунке показывает направление проектирующих лучей.

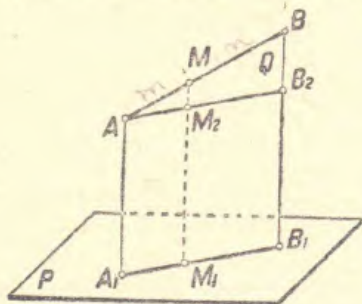


Рис. 45.

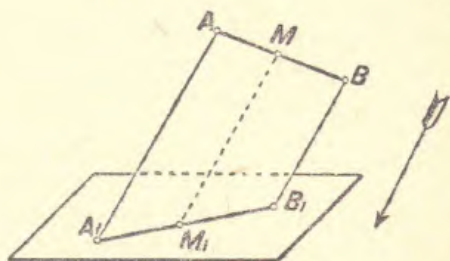


Рис. 45а.

6. Изложенные теоремы позволяют в значительной степени упростить построение сечений тел. Например, проводя сечение в кубе через точки K , L и M , лежащие на ребрах куба (рис. 46), можно поступить так: проводим сначала прямые KL и LM , а затем $MN \parallel LK$, так как плоскость сечения пересекает две параллельные плоскости, переднюю и заднюю грань куба, по прямым параллельным, и тогда сразу выявляется сечение $KLMN$ и его форма: $KLMN$ — трапеция.

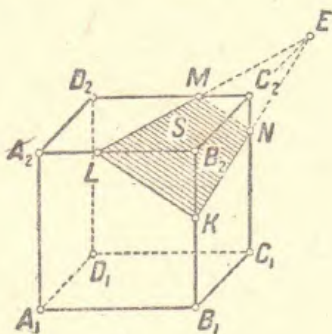


Рис. 46.

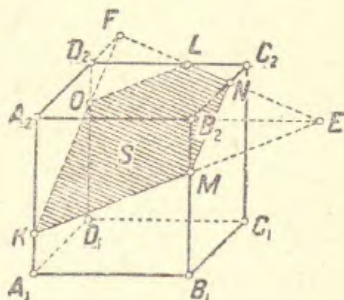


Рис. 47.

Точно так же поступаем при построении сечения куба плоскостью, проходящей через точки K , L и M на рисунке 47. Сначала проводим прямую KM , затем через точку L задней грани куба проводим $LO \parallel KM$; этим построением определяется точка O на ребре D_1D_2 и прямая OK на левой боковой грани. Проводим далее на правой боковой грани

$MN \parallel KO$; получаем точку N , а следовательно, и последний замыкающий отрезок NL ломаной линии на поверхности тела, по которой сечение пересекает поверхность куба.

7. Задача 1. В кубе, ребро которого $a = 4$ см, через диагональ A_1D_2 (рис. 48) левой боковой грани и середину M ребра C_1C_2 провести сечение. Определить форму и площадь сечения.

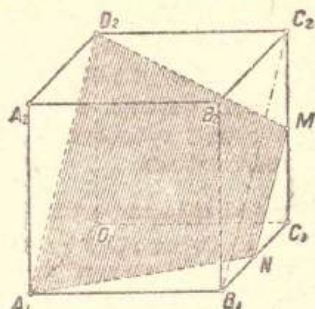


Рис. 48.

Решение. 1) Проводим сначала D_2M и затем $MN \parallel D_2A_1$; соединив N с A_1 , получаем сечение A_1NMD_2 . Это — трапеция, так как $MN \parallel A_1D_2$; кроме того, $MN \parallel B_1C_2$, и потому $MN = \frac{1}{2} C_2B_1 = \frac{1}{2} D_2A_1$. Боковые стороны трапеции D_2M и A_1N равны, так как $\triangle MC_2D_2 = \triangle NB_1A_1$ по двум катетам, а потому сечение — равнобедренная трапеция.

2) Диагональ A_1D_2 грани $A_1D_1D_2A_2$ равна $a\sqrt{2}$; $MN = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$;

$$D_2M = A_1N = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Высота трапеции:

$$h = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{3a}{4}\sqrt{2}.$$

Площадь трапеции:

$$S = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a}{4}\sqrt{2} = \frac{9a^2}{8} \text{ кв. ед.} = 18 \text{ см}^2.$$

Задача 2. Дан куб (рис. 49). Провести в нем сечение, проходящее через точки K , L и M , данные на ребрах куба.

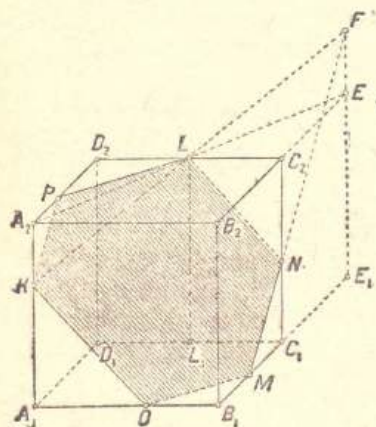


Рис. 49.

Решение. Если провести прямые через точки K , L и M , то они не лежат на поверхности куба, хотя и принадлежат искомому сечению. Поэтому в данном случае приходится выполнять построение иначе, чем раньше. Проведем через ребро A_1A_2 и точку L плоскость; она пересечет плоскость задней грани куба по прямой $LL_1 \parallel A_2A_1$. Кроме того, эта плоскость пересечет плоскость правой боковой грани по прямой $EE_1 \parallel LL_1 \parallel A_1A_2$. Прямые KL и EE_1 , лежащие в одной плоскости, пересекутся в некоторой точке F , так как прямая KL , пересекающая одну из параллельных LL_1 , пересекает и другую EE_1 . Точка F принадлежит искомому сечению, ибо она лежит на прямой KL , принадлежащей сечению; значит, и прямая FM лежит в плоскости сечения; она же лежит и в плоскости правой боковой грани и пересекает ребро C_1C_2 в точке N . Итак, точка N принадлежит искомому сечению. Проведем через K прямую $KP \parallel MN$ и

соединим P и L , L и N прямыми; получим прямые KP , PL и LN , принадлежащие сечению и лежащие на поверхности куба. Наконец, проведем $KO \parallel LN$ и, соединив O и M , получим искомое сечение.

$KOMNLP$ — шестиугольник, его стороны лежат на поверхности куба. Понятно, что и $OM \parallel PL$, так как они являются прямыми, по которым плоскость сечения пересекает параллельные грани куба. Шестиугольник, полученный в сечении, характерен тем, что он имеет три пары параллельных сторон.

Вопросы и упражнения.

1. а) Отрезок AB расположен по одну сторону от плоскости P . Концы его отстоят от плоскости на расстоянии a и b ($a > b$). Расстояние середины M отрезка AB от плоскости P равно полусумме расстояний концов. Доказать.

б) Чему равно расстояние середины отрезка AB от плоскости P , если он пересекает плоскость?

2. Вершины равностороннего треугольника отстоят от плоскости Q на расстояниях 10 см, 15 см и 15 см. Найти расстояние от плоскости Q центра вписанной в треугольник окружности.

3. Найти геометрическое место точек, расстояние которых от данной плоскости равно a .

4. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей.

5. Две плоскости, параллельные порою одной и той же третьей, параллельны между собою. Доказать.

6. Расстояние между данными параллельными плоскостями P и Q равно a . На плоскости P дана точка A , на плоскости Q — точка B ; отрезок $AB = m$ ($m > a$). Найти проекции AB на P и на Q .

7. Одна из сторон ромба лежит в плоскости P , другая, параллельная ей, отстоит от плоскости на расстоянии $a = 4$ см. Проекция диагоналей ромба на плоскость равны 2 см и 8 см. Найти проекции сторон ромба на плоскость P .

8. Вершина A равностороннего треугольника ABC со стороной b лежит в одной из двух параллельных плоскостей, вершина B — в другой, а вершина C одинаково удалена от обеих плоскостей. Расстояние между плоскостями равно a . Какой вид имеет проекция треугольника на одну из плоскостей, и чему равен периметр проекции треугольника?

9. В двух смежных гранях куба проведены диагонали так, что они не пересекаются в вершине куба. Ребро куба $a = \sqrt{2}$ см. Найти построением кратчайшее расстояние между диагоналями и вычислить это расстояние.

IV. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ.

§ 1. Двугранный угол.

1. Плоскость P_1 (рис. 50) при вращении ее вокруг прямой AB , лежащей на ней, переходит в новое положение P_2 , которое образует с первоначальным положением плоскости P_1 угол; этот угол называется двугранным углом.

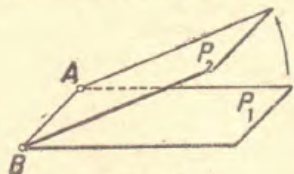


Рис. 50.

Плоскости P_1 и P_2 называются гранями двугранного угла, а прямая AB — ребром двугранного угла.

Двугранный угол обозначается обычно четырьмя буквами: две из них A и B , обозначающие его ребро, пишутся посередине между двумя другими P_1 и P_2 , обозначающими его грани. На рисунке 50 дан двугранный угол P_1ABP_2 .

2. Два диагональных сечения куба пересекаются по прямой O_1O_2 , оси симметрии куба, и образуют 4 двугранных угла с общим ребром O_1O_2 (рис. 51).

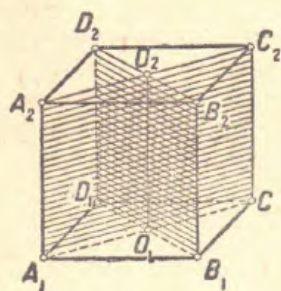


Рис. 51.

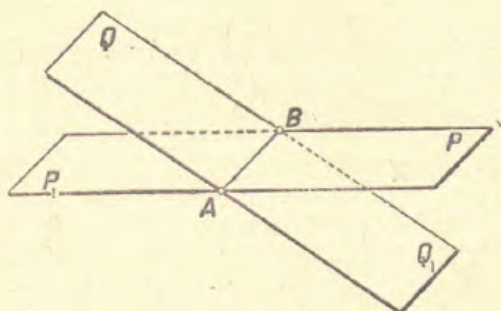


Рис. 52.

Две пересекающиеся плоскости P и Q (рис. 52) наклонены друг к другу и образуют четыре двугранных угла, общим ребром которых является линия AB пересечения плоскостей. Углы эти следующие: $PABQ$, $QABP$, P_1ABQ_1 и Q_1ABP .

Каждые две смежные грани куба образуют двугранный угол; у куба 12 двугранных углов, соответственно числу его ребер.

§ 2. Линейный угол двугрannого угла.

1. Если пересечь двугранный угол $PABQ$ плоскостью S (рис. 53), то линии пересечения этой плоскости с гранями двугрannого угла образуют некоторый угол KLM ; величина этого угла зависит от того, под каким углом секущая плоскость пересекает ребро двугрannого угла. Несомненно, вершина угла принадлежит обеим граням двугрannого угла, а потому лежит на ребре его; стороны же угла лежат одна на одной грани, другая — на другой грани двугрannого угла.

Если плоскость S пересекает двугранный угол и перпендикулярна к его ребру, то угол KLM называется линейным углом двугрannого угла.

Линейным углом двугрannого угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, проведенными одинаково в одной грани, другой — в другой грани через одну и ту же точку ребра двугрannого угла.

2. Возьмем двугранный угол $PABQ$ (рис. 53) и проведем через какую-нибудь точку L его ребра AB два перпендикуляра: один — LK на грани P , другой LM — на грани Q , получим линейный угол KLM двугрannого угла.

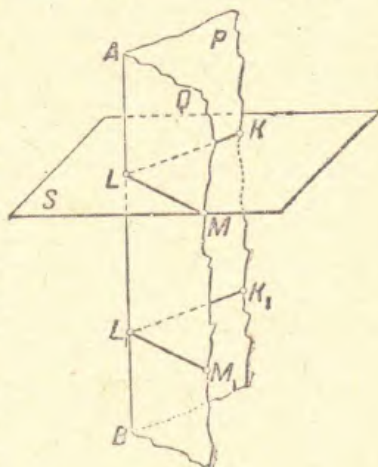


Рис. 53.

Проводим затем через LK и LM плоскость S ; эта плоскость перпендикулярна к ребру AB , так как $AB \perp LK$ и $AB \perp LM$. Итак,

ребро двугранного угла перпендикулярно к плоскости его линейного угла.

Чтобы построить линейный угол двугранного угла, достаточно провести через какую-нибудь точку его ребра плоскость, перпендикулярную к ребру; прямые, по которым эта плоскость пересекает грани угла, образуют линейный угол.

Если построить линейный угол $K_1L_1M_1$ при какой-нибудь точке L_1 ребра AB , то стороны его L_1K_1 и L_1M_1 параллельны сторонам LK и LM угла KLM , а потому $\angle K_1L_1M_1 = \angle KLM$; отсюда следует, что

величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре двугранного угла.

§ 3. Соотношение между двугранными углами и их линейными углами.

1. Даны два двугранных угла $P_1A_1B_1Q_1$ и $P_2A_2B_2Q_2$ (рис. 54). Наложим угол $P_1A_1B_1Q_1$ на угол $P_2A_2B_2Q_2$ так, чтобы их ребра A_1B_1 и A_2B_2

совпали и чтобы грань P_1 совпала с гранью P_2 . Если грань Q_1 совпадает с гранью Q_2 , то двугранные углы равны. Если же грань Q_1 пойдет внутри угла $P_2A_2B_2Q_2$ или вне его, то угол $P_1A_1B_1Q_1$ будет меньше угла $P_2A_2B_2Q_2$ или больше его.

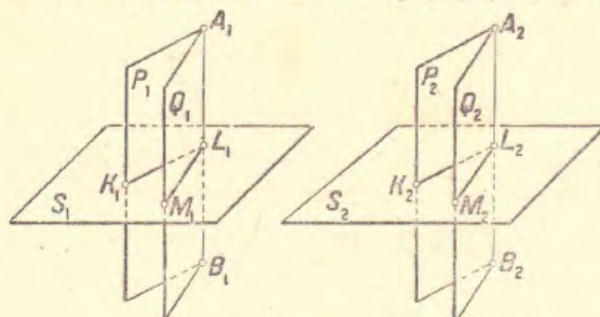


Рис. 54.

2. Теорема. Если

два двугранных угла равны, то равны также их линейные углы.

Дано: Двугранные углы $P_1A_1B_1Q_1 = P_2A_2B_2Q_2$ (рис. 54).

Требуется доказать: $\angle K_1L_1M_1 = \angle K_2L_2M_2$.

Доказательство. Наложим двугранный угол $P_1A_1B_1Q_1$ на равный ему двугранный угол $P_2A_2B_2Q_2$ так, чтобы совпали ребра A_1B_1 и A_2B_2 , и вершины L_1 и L_2 их линейных углов. Тогда L_1K_1 совпадет с L_2K_2 и L_1M_1 с L_2M_2 , как перпендикуляры к A_2B_2 в плоскостях P_1 и P_2 и Q_1 и Q_2 , а потому

$$\angle K_1L_1M_1 = \angle K_2L_2M_2.$$

3. Теорема (обратная). Если линейные углы двух двугранных углов равны, то двугранные углы также равны.

Дано: Линейные углы: $\angle K_1L_1M_1 = \angle K_2L_2M_2$ (рис. 54).

Требуется доказать: Двугранный угол $P_1A_1B_1Q_1 = P_2A_2B_2Q_2$.

Доказательство. Ребро A_1B_1 перпендикулярно к плоскости угла $K_1L_1M_1$ и ребро A_2B_2 перпендикулярно к плоскости угла $K_2L_2M_2$.

Наложим плоскость угла $K_1L_1M_1$ на плоскость угла $K_2L_2M_2$ так, чтобы угол $K_1L_1M_1$ совпал с углом $K_2L_2M_2$; тогда A_1B_1 совпадет с A_2B_2 , ибо в точке L_2 к плоскости S_2 можно провести только один перпендикуляр; совпадут также грани P_2 и P_1 и грани Q_2 и Q_1 , положение которых определяется двумя пересекающимися прямыми A_2L_2 и L_2K_2 , A_2L_2 и L_2M_2 , а потому двугранный угол $P_1A_1B_1Q_1 = P_2A_2B_2Q_2$.

Линейный угол служит мерою двугранного угла. Двугранный угол измеряется соответствующим ему линейным углом. Если линейный угол равен, например, 40° , то и двугранный угол равен 40° .

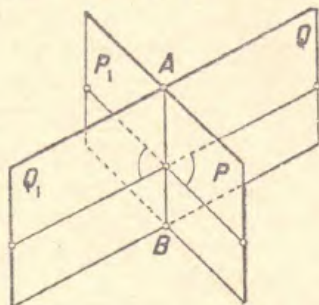


Рис. 55.

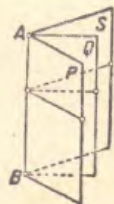


Рис. 56.

4. Два двугранных угла называются *противоположными*, если грани одного составляют продолжения граней другого (рис. 55). Их линейные углы также углы противоположные.

Следствие. Противоположные двугранные углы равны, так как равны их линейные углы: $PABQ = P_1ABQ_1$.

5. Два двугранных угла называются *прилежащими*, если они имеют общее ребро и общую грань, лежащую между ними. Их линейные углы тоже углы прилежащие (рис. 56).

Если необщие грани двух прилежащих двугранных углов составляют продолжение одна другой, т. е. составляют одну плоскость, то такие углы называются *смежными* (рис. 57); их линейные углы также углы смежные.

Следствие. Сумма двух смежных двугранных углов равна $2d$.

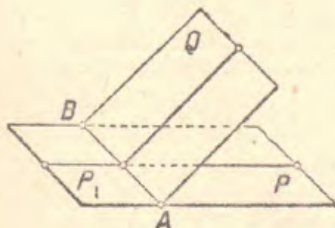


Рис. 57.

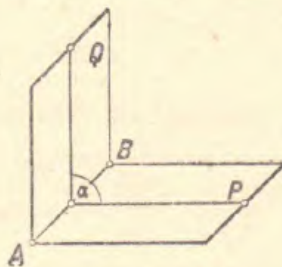


Рис. 58.

6. Двугранный угол называется *прямым*, *острым* или *тупым*, если его линейный угол прямой, острый или тупой. Угол $PABQ$ на рисунке 58 прямой; на рисунке 57 угол $PABQ$ — острый, а угол P_1ABQ — тупой.

Двугранные углы между двумя смежными гранями куба прямые; прямыми будут также углы между двумя диагональными сечениями куба на рисунке 51, а угол между диагональной плоскостью и плоскостью боковой грани — острый; он равен 45° , так как его линейный угол равен 45° .

§ 4. Перпендикулярные плоскости.

1. Две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если они при своем пересечении образуют прямые двугранные углы.

2. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. Плоскость, проходящая через перпендикуляр к данной плоскости, перпендикулярна к последней.

Дано: Плоскость P ; прямая $AB \perp P$; плоскость Q ,
проходящая через прямую AB (рис. 59).

Требуется доказать: Плоскость $Q \perp P$.

Доказательство. Плоскость Q , проходящая через прямую AB , пересекает плоскость P по прямой MN . Проведем на плоскости P прямую $AC \perp MN$; имеем: $BA \perp MN$ по условию и $AC \perp MN$ по построению; BA и AC образуют $\angle BAC$ — линейный угол двугранного угла $QMPN$, но $BA \perp AC$, значит $\angle BAC$ — прямой; поэтому и двугранный угол $PMNQ$ — прямой, откуда следует, что плоскость $Q \perp P$.

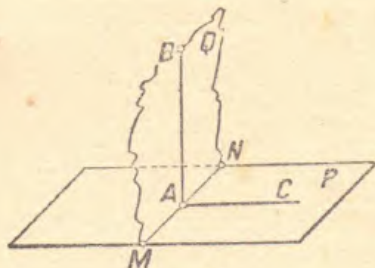


Рис. 59.

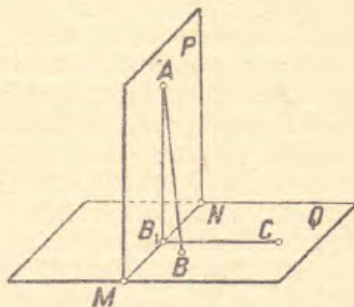


Рис. 60.

3. **Теорема (обратная).** Если две плоскости P и Q взаимно перпендикулярны, то перпендикуляр, проведенный к плоскости Q из какой-либо точки на плоскости P , лежит в плоскости P всеми своими точками.

Дано: Плоскость $P \perp Q$; точка A на плоскости P ;
прямая $AB \perp Q$ (рис. 60).

Требуется доказать: Перпендикуляр AB лежит в плоскости P .

Доказательство (от противного). Допустим, что перпендикуляр AB не лежит в плоскости P . Проведем из точки A в плоскости P прямую $AB_1 \perp MN$ и в плоскости Q прямую $B_1C \perp MN$. $\angle AB_1C = d$ как линейный угол прямого двугранного угла и $AB_1 \perp Q$. Получим, что из точки A проведены два перпендикуляра к плоскости Q : один, AB — по условию, другой, AB_1 — согласно допущению, но это невозможно; следовательно, сделанное допущение, что AB не лежит в плоскости P , неверно, а потому перпендикуляр AB лежит в плоскости P и совпадает с AB_1 .

Следствие. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны к одной и той же третьей плоскости, то и линия их пересечения перпендикулярна к третьей плоскости.

В самом деле, если из любой точки M , линии пересечения двух пересекающихся плоскостей P и Q (рис. 61), провести перпендикуляр

к плоскости S , перпендикулярной к P и Q , то он лежит и в плоскости P и в плоскости Q и сливается с линией их пересечения; следовательно, линия пересечения AB плоскостей P и Q перпендикулярна к плоскости S : $AB \perp S$.

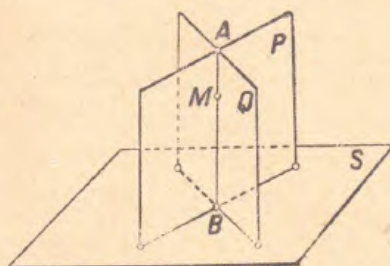


Рис. 61.

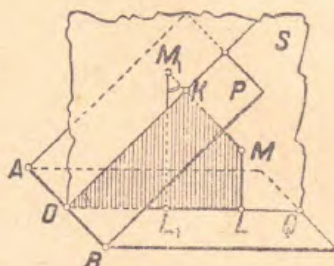


Рис. 62.

4. Задача. Найти угол между двумя непараллельными плоскостями.

Решение. Плоскости P и Q , пересекаясь, образуют двугранный угол $PABQ$ (рис. 62). Проведем из какой-нибудь точки M , лежащей внутри двугранного угла, прямые $MK \perp P$ и $ML \perp Q$ и через них плоскость S . Плоскость $S \perp P$ и $S \perp Q$, а потому $S \perp AB$ и $\angle KOL$ — линейный угол двугранного угла $PABQ$. В четырехугольнике $KOLM$ углы MKO и MLO — прямые, следовательно, сумма двух других углов $\angle KOL + \angle KML = 2d$. Если точка M лежит вне двугранного угла $PABQ$, то $\angle KM_1L_1 = \angle KOL$. Итак, *угол между двумя перпендикулярами, проведенными из произвольной точки к обеим граням двугранного угла, равен линейному углу двугранного угла или дополняет его до $2d$.*

Чтобы найти линейный угол двугранного угла, ребро которого находится вне пределов чертежа (рис. 63), проведем из произвольной точки M (или M_1) перпендикуляры MK и ML

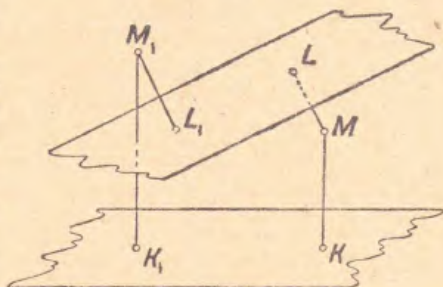


Рис. 63.

(или M_1K_1 и M_1L_1) к граням двугранного угла, тогда линейный угол двугранного угла равен $180^\circ - \angle KML$, или углу $K_1M_1L_1$.

§ 5. Зависимость между площадью фигуры и площадью ее проекции.

1. Задача. Основание AB треугольника ABC (рис. 64) лежит на плоскости P . Построить проекцию треугольника ABC на плоскость P и вычислить площадь проекции, если известно, что площадь треугольника ABC равна S и угол между плоскостями ABC и P равен α .

Решение. Проведем из вершины C треугольника ABC перпендикуляр CC_1 к плоскости P и соединим основание его C_1 с A и B . C_1A — проекция стороны CA и C_1B — проекция стороны CB и $\triangle ABC_1$ — проекция треугольника ABC на плоскость P . Построим линейный угол

двугранного угла между плоскостью треугольника ABC и плоскостью P ; для этого проведем в треугольнике ABC_1 высоту $C_1D \perp BA$ и соединим точки C и D ; на основании теоремы о трех перпендикулярах $CD \perp BA$, т. е. CD — высота треугольника ABC ; $\angle CDC_1$ — линейный угол и равен α . Площадь треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$; площадь треугольника ABC_1 равна $\frac{1}{2} AB \cdot C_1D$; из прямоугольного треугольника CC_1D имеем:

$$DC_1 = CD \cdot \cos \alpha,$$

а потому

$$S_{\text{проекции} \Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \cos \alpha,$$

$$S_{\text{пр} \Delta} = S_{\Delta} \cos \alpha,$$

т. е. площадь проекции треугольника равна площади данного треугольника, умноженной на косинус угла между плоскостями треугольника и его проекции.

В том случае, когда плоскость треугольника и плоскость проекции параллельны, то $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ и $S_{\text{пр} \Delta} = S_{\Delta}$, т. е. площадь проекции и площадь треугольника равны.

Если основание проектируемого треугольника не лежит в плоскости проекции, но параллельно ей (рис. 65), то следует сначала провести через основание треугольника плоскость, параллельную плоскости проекций. Проекция ABC_2 треугольника на эту вспомогательную плоскость будет искомой проекцией треугольника. Легко доказать, что $\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

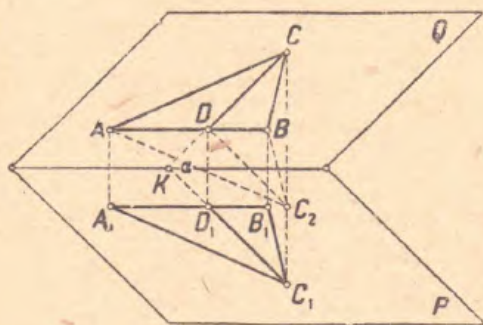


Рис. 65.

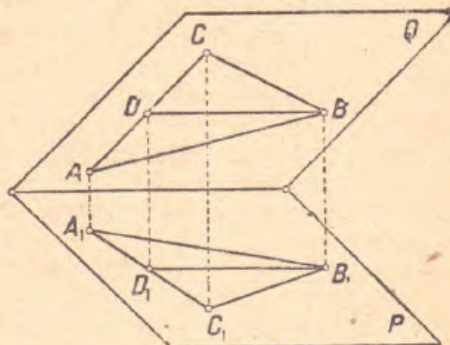


Рис. 66.

Если, наконец, ни одна из сторон проектируемого треугольника не параллельна плоскости проекций (рис. 66), то из одной вершины треугольника проводят прямую, пересекающую данный треугольник на два треугольника, общая сторона которых — секущая прямая — параллельна плоскости проекций; для каждого из полученных треугольников справедлива выведенная выше формула, определяющая зависимость между площадью треугольника и площадью его проекции, а следовательно, она справедлива и для их суммы.

2. Эта зависимость справедлива и для многоугольника, который диагоналями разбивается на треугольники, и для всякой криволинейной фигуры. Всякую плоскую фигуру можно представить состоящей из треугольников или многоугольников и потому:

площадь проекции плоской фигуры равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью ее проекции.

§ 6. Основные задачи на построение.

Задача 1. Через данную точку M пространства провести прямую, параллельную данной прямой AB (рис. 67).

Решение. Через данную прямую AB и точку M вне ее проводим плоскость P и через точку M на плоскости P прямую $A_1B_1 \parallel AB$.

Задача 2. Даны плоскость P и точка M . Провести через эту точку M перпендикуляр к плоскости P (рис. 68 и 69).

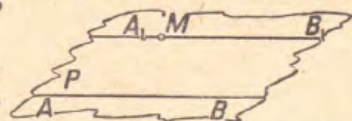


Рис. 67.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) точка M лежит на плоскости P ; 2) точка M лежит вне плоскости P .

1) Проведем через точку M на плоскости P (рис. 68) произвольную прямую MN и через точку M плоскость Q , перпендикулярную к MN . Плоскость Q пересечет плоскость P по прямой $AB \perp MN$; если затем провести $MK \perp AB$, то MK — искомый перпендикуляр. В самом деле, по построению: $MK \perp AB$ и плоскость $Q \perp MN$, а потому $MK \perp MN$ и $MK \perp P$.

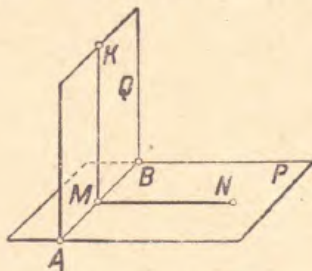


Рис. 68.

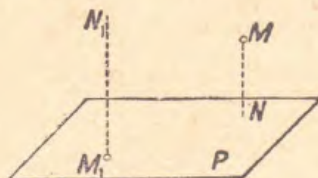


Рис. 69.

2) Проведем через произвольную точку M_1 (рис. 69) плоскости P перпендикуляр M_1N_1 к плоскости P . Если затем проведем через данную точку M прямую MN , параллельную M_1N_1 , то эта прямая MN — искомый перпендикуляр, так как плоскость P , перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой.

Задача 3. Через данную прямую AB провести плоскость, параллельную другой данной прямой.

Если данные прямые — параллельны, то задача допускает бесчисленное множество решений, и всякая плоскость, проведенная через одну из данных прямых, параллельна другой, кроме случая, когда плоскость проходит через обе данные прямые.

Если же прямые скрещиваются, то задача допускает только одно решение, так как — две скрещивающиеся прямые могут лежать в двух параллельных плоскостях (см. гл. III, § 4, стр. 23).

Задача 4. Через данную точку M провести плоскость, параллельную данной плоскости P (рис. 70).

Решение. Проведем $MN \perp P$ и через точку N на плоскости P две произвольные прямые NA и NB . Проведем затем через MN и NA плоскость Q_1 и через MN и NB плоскость Q_2 , в плоскости Q_1 прямую $MA_1 \parallel NA$, а в плоскости Q_2 прямую $MB_1 \parallel NB$; тогда $MA_1 \perp MN$ и $MB_1 \perp MN$ и плоскость P_1 , проведенная через MA_1 и MB_1 , перпендикулярна к MN , а потому плоскость $P \parallel P_1$.

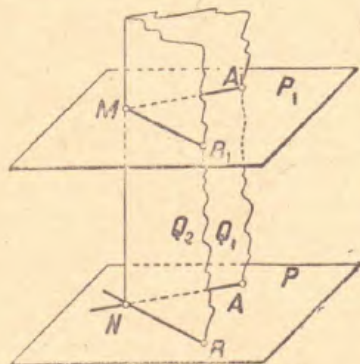


рис. 70.

Вопросы и упражнения.

1. Между гранями прямого двугранного угла взята точка M ; расстояния ее от граней угла соответственно равны a сантиметрам и b сантиметрам. Найти расстояние M от ребра.

Указание. Провести через M плоскость, перпендикулярную к ребру.

2. Найти геометрическое место точек, равноудаленных: 1) от граней данного двугранного угла, 2) от двух пересекающихся плоскостей.

3. Отрезок прямой AB опирается своими концами в грани прямого двугранного угла. Вычислить длину отрезка, если известно, что проекция его AB_1 на одну грань равна 15 см , а проекция A_1B на другую грань равна 16 см , проекция же A_1B_1 отрезка на ребро равна $9,0\text{ см}$ (рис. 71).

4. Внутри двугранного угла $\alpha = 60^\circ$ взята точка M на расстояниях a и b от граней двугранного угла. Найти расстояние точки M от ребра.

5. Через гипотенузу $AB = c = 1,0\text{ м}$ прямоугольного треугольника ACB проведена плоскость P , образующая с каждым катетом $\angle \alpha = 45^\circ$. Найти расстояние вершины C от плоскости P . Какой вид этого треугольника?

6. Из двух точек A и B на плоскости P проведены две параллельные наклонные AC и BD под углом α к плоскости P . Найти расстояние между параллельными, если известно, что расстояние между их проекциями равно b и $AB = a$.

7. В прямоугольном брусе с квадратным основанием через сторону $a = 10\text{ см}$ проведена плоскость (сечение) под углом $\alpha = 60^\circ$ к плоскости основания. Вычислить площадь сечения (рис. 72).

8. В одной грани двугранного угла проведена прямая под углом $\alpha = 30^\circ$ к другой грани и под углом $\beta = 45^\circ$ к ребру. Найти двугранный угол.

9. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной из них перпендикулярно к линии пересечения плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости. Доказать.

10. Даны: двугранный угол $\alpha = 50^\circ$ и отрезок AB , концы которого лежат на гранях данного угла; проекция AB на ребро равна $3,0\text{ см}$, проекции AB на грани равны, и каждая из них равна $7,0\text{ см}$. Вычислить AB .

11. Через данную прямую, не перпендикулярную к данной плоскости, можно провести к данной плоскости перпендикулярную плоскость, и притом только одну. Доказать.

12. На плоскости P дана прямая AB и вне плоскости P точка M . Найти построением кратчайшее расстояние точки M от AB .

13. Найти в кубе углы: 1) между его диагональю и плоскостью основания куба, 2) между диагональю и плоскостью боковой грани.

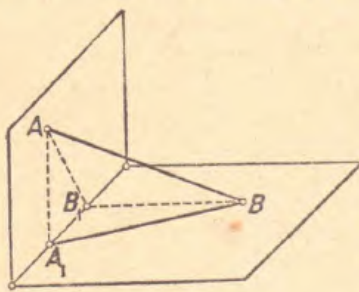


Рис. 71.

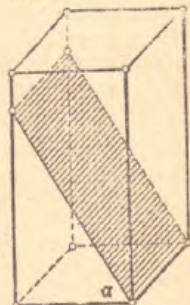


Рис. 72.

V. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ.

§ 1. Трехгранный угол.

1. Три плоскости в пространстве могут быть расположены следующим образом:

- а) все три плоскости параллельны (рис. 73): $P \parallel Q \parallel S$;
- б) две из них параллельны: $S \parallel Q$ и третья P пересекает их (рис. 74);

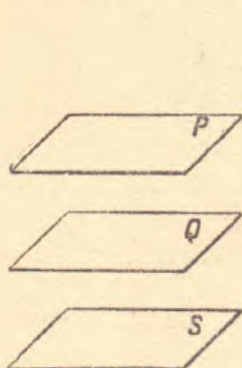


Рис. 73.

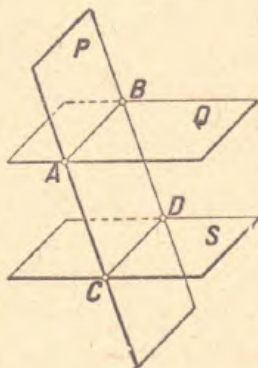


Рис. 74.

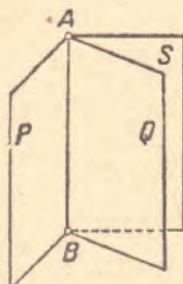


Рис. 75.

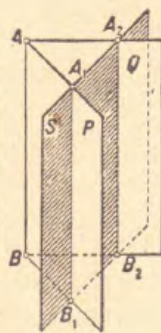


Рис. 76.

в) ни одна пара из них не параллельна; в этом случае они либо пересекаются по одной прямой, так P , Q и S пересекаются по прямой AB (рис. 75), либо они пересекаются попарно, и линии их пересечения параллельны (рис. 76), либо все три плоскости пересекаются попарно, и линии их пересечения пересекаются в одной точке. В последнем случае три плоскости, имеющие только одну общую точку, образуют трехгранный угол (рис. 77).

Точка M , в которой пересекаются все три плоскости, называется вершиной трехгранного угла. Прямые MA , MB , MC , по которым попарно пересекаются плоскости, называются ребрами трехгранного угла и сами плоскости — гранями трехгранного угла: AMC , AMB и CMB . Углы AMC , AMB и CMB , лежащие в плоскости каждой грани, называются плоскими углами при вершине трехгранного угла. Трехгранный угол обозначается четырьмя буквами: буквой, проставленной у его вершины, и буквами, проставленными на трех его ребрах. Буква, стоящая у его вершины, читается и пишется на первом месте, например: $MABC$.

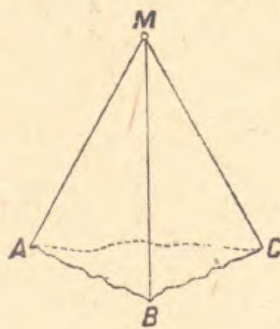


Рис. 77.

Угол между двумя гранями трехгранного угла называется двугранным углом трехгранного угла; в трехгранном угле 3 двугранных угла.

В кубе восемь трехгранных углов, соответственно числу его вершин; плоские углы при вершине каждого из трехгранных углов куба — прямые; двугранные углы каждого из них также прямые.

Трехгранный угол называется правильным, если равны: 1) плоские его углы и 2) двугранные его углы.

Трехгранные углы куба — правильные трехгранные углы.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла; три пересекающиеся плоскости, имеющие только одну общую точку, образуют восемь трехгранных углов (рис. 78).

В частном случае все три плоскости могут быть взаимно перпендикулярными (рис. 79).

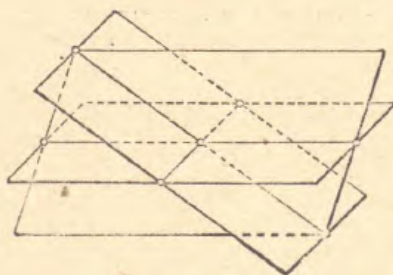


Рис. 78.

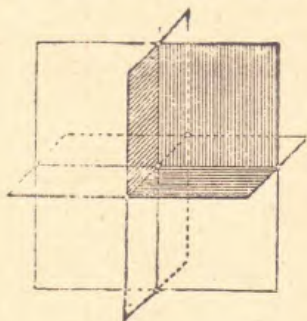


Рис. 79.

2. Теорема. Если плоские углы трехгранного угла равны, то равны и лежащие против них двугранные углы.

Дано: Трехгранный угол $SABC$; грани его P_1 , P_2 и P_3 ;
 $\angle ASB = \angle ASC$ (рис. 80).

Требуется доказать: Двугранный угол $P_2SCP_3 =$ двугранному углу P_1SBP_2

Доказательство. Из произвольной точки A на ребре SA проводим к плоскости грани P_2 перпендикуляр $AK \perp P_2$ и затем проводим $KL \perp SC$ и $KM \perp SB$; соединив A с M и L , имеем на основании теоремы о трех перпендикулярах: $AM \perp SB$ и $AL \perp SC$, а потому $\angle AMK$ и $\angle ALK$ — линейные углы двугранных углов P_1SBP_2 и P_2SCP_3 .

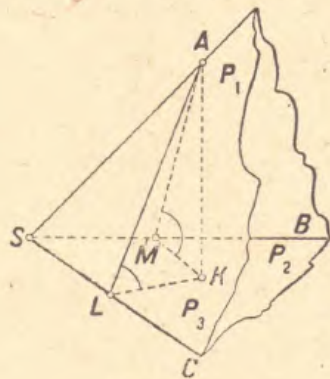


Рис. 80.

Прямоугольные треугольники AMS и ALS равны: у них общая гипотенуза и $\angle ASB = \angle ASC$ по условию, а потому $AM = AL$; отсюда следует, что и прямоугольные треугольники AKM и AKL равны, так как гипотенузы AM и AL равны по доказанному, катет же AK у них общий; из равенства этих треугольников имеем: $\angle AMK$ и $\angle ALK$ равны, а это — линейные углы двугранных углов P_1SBP_2 и P_2SCP_3 , следовательно равны и двугранные углы.

3. Теорема. В трехгранном угле каждый из плоских его углов меньше суммы двух других его плоских углов.

Дано: Трехгранный угол $SABC$ (рис. 81), его плоские углы:
 α, β, γ ; $\alpha > \beta$ и $\alpha > \gamma$.

Требуется доказать: $\alpha < \beta + \gamma$.

Доказательство. Справедливость теоремы можно проверить следующим опытом. Если разрезать ломаную поверхность трехгранного

угла $SABC$ по ребру SA и наложить грани ASB и ASC на грань BSC так, чтобы ребра SB и SC остались на месте, то плоский угол BSC с избытком покрывается плоскими углами BSA и CSA . Это означает, что наибольший плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Последнее может быть доказано так. Отложим (рис. 81a) на грани BSC угол BSK , равный углу BSA , тогда угол KSC равен $\alpha - \gamma$. Проводим затем прямую BC , пересекающую ребра SB и SC в точках B и C ; прямая BC пересечет и прямую SK в точке K .

Отложив на ребре SA отрезок $SA = SK$ и соединив прямою точки A и B , получим треугольник SBA , равный треугольнику SBK ; у них SB — общая сторона, $SA = SK$ и $\angle BSA = \angle BSK$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $BK = BA$.

Соединим еще точку A и точку C . Из треугольника BAC имеем:

$$BC < AB + AC,$$

или

$$BK + KC < AB + AC,$$

но $BK = BA$, а потому $KC < AC$.

Из треугольника KSC находим:

$$KC^2 = SK^2 + SC^2 - 2SK \cdot SC \cdot \cos(\alpha - \gamma).$$

Из треугольника ASC находим:

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \beta.$$

Но $KC < AC$, следовательно, и $KC^2 < AC^2$, а потому:

$$SK^2 + SC^2 - 2SK \cdot SC \cdot \cos(\alpha - \gamma) < SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cos \beta.$$

Вследствие равенства $SK^2 + SC^2$ и $SA^2 + SC^2$ имеем:

$$2SK \cdot SC \cdot \cos(\alpha - \gamma) > 2SA \cdot SC \cdot \cos \beta, \text{ или } \cos(\alpha - \gamma) > \cos \beta;$$

из полученного неравенства следует, что $\alpha - \gamma < \beta$, или $\alpha < \beta + \gamma$. Теорема доказана.

§ 2. Многогранный угол.

1. Если три или большее число плоскостей пересекаются и имеют только одну общую точку, то они образуют многогранный угол.

По числу пересекающихся в одной точке плоскостей различают углы: трехгранные, четырехгранные и т. д.

Многогранный угол иногда называют телесным углом.

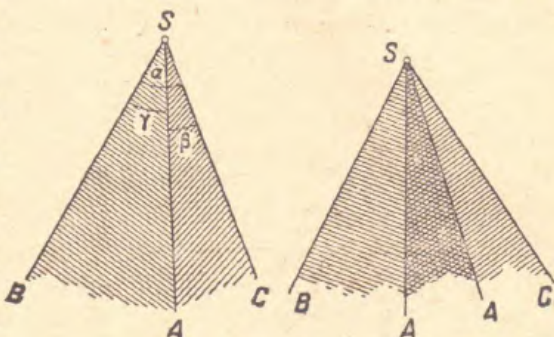


Рис. 81.

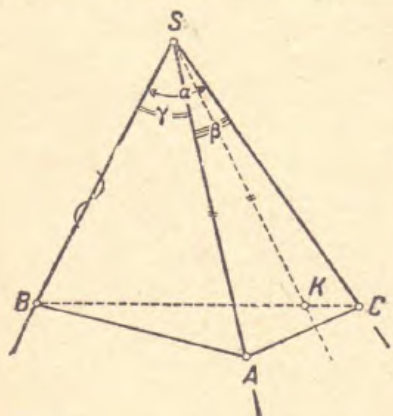


Рис. 81a.

На рисунке 82 даны четырехгранный, пятигранный и шестигранный углы; грани их пересечены плоскостью и в сечении дают четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник. Многогранный угол, сечение которого плоскостью есть выпуклый многоугольник, называется **выпуклым**. На рисунке 82 первые два многогранных угла выпуклые, а третий — невыпуклый.

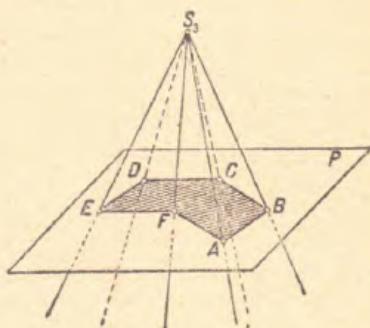
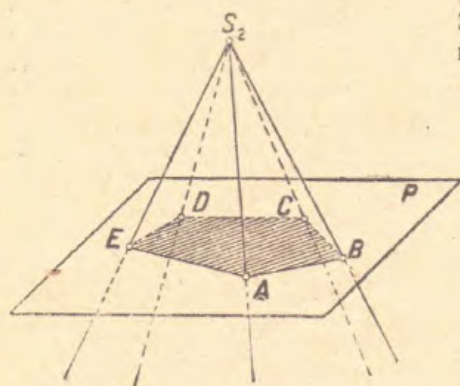
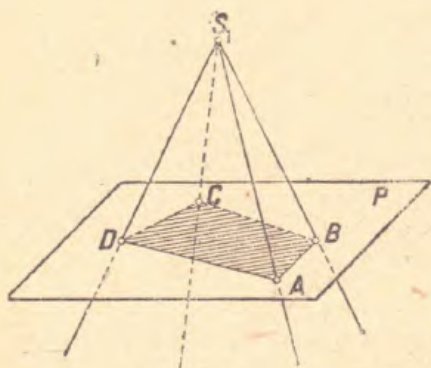


Рис. 82.

3. Теорема. Сумма плоских углов при вершине выпуклого многогранного угла меньше $4d$.

Дано: Многогранный угол $SABCD$, плоские его углы при вершине ASB, BSC, CSD и DSA (рис. 83).

Требуется доказать: $\angle ASB + \angle BSC + \angle CSD + \angle DSA < 4d$.

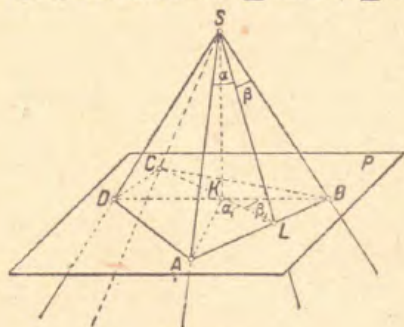


Рис. 83.

Доказательство. Проведем внутри многогранного угла из его вершины луч SK и через произвольную точку K луча SK плоскость P , к нему перпендикулярную. Эта плоскость пересечет ребра многогранного угла в точках A, B, C и D . Точка K — проекция вершины S на плоскость сечения P . Соединив точку K с точками A, B, C и D , получим в плоскости сечения P проекции всех граней многогранного угла. Рассмотрим проекцию AKB

грани ASB . Проведем $KL \perp AB$ и соединим S с L ; тогда $SL \perp AB$ на основании теоремы о трех перпендикулярах.

Из прямоугольных треугольников ALS и BLS имеем:

$$\sin \alpha = \frac{AL}{AS} \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{BL}{BS}.$$

Из прямоугольных треугольников ALK и BLK имеем:

$$\sin \alpha_1 = \frac{AL}{AK} \quad \text{и} \quad \sin \beta_1 = \frac{BL}{BK}.$$

Сопоставляя полученные равенства, получаем:

$$\sin \alpha < \sin \alpha_1, \quad \text{так как} \quad AS > AK$$

и

$$\sin \beta < \sin \beta_1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad BS > BK,$$

а потому и $\alpha < \alpha_1$ и $\beta < \beta_1$.

Следовательно: $\alpha + \beta < \alpha_1 + \beta_1$, т. е. каждый плоский угол при вершине многогранного угла меньше соответствующего ему угла при проекции K вершины многогранного угла на плоскость сечения.

Сумма углов с общей вершиной в точке K равна 360° , а потому сумма плоских углов при вершине многогранного угла меньше 360° , или $4d$.

Вопросы и упражнения.

1. Плоские углы трехгранного угла $\alpha = \beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$. Найти двугранный угол, заключенный между двумя плоскими углами α и β .

2. Возможен ли такой многогранный угол, плоские углы которого: 1) 170° , 150° , 75° и 30° ; 2) 90° , 50° и 20° ; 3) 90° , 50° и 50° ; 4) 170° , 80° , 50° и 40° ;
5) 170° , 80° , 50° и 50° ?

3. Плоские углы трехгранного угла $\alpha = \beta = 60^\circ$ и $\gamma = 90^\circ$. От вершины угла на ребрах отложены равные отрезки, и через концы их проведена плоскость. Доказать, что последняя перпендикулярна к плоскости прямого угла.

4. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60° . На одном из его ребер от вершины отложен отрезок, равный a , и из конца его проведен перпендикуляр к противоположащей грани. Найти длину этого перпендикуляра.

5. В трехгранном угле плоские углы $\alpha = \beta = 60^\circ$ и $\gamma = 90^\circ$. Найти угол между плоскостью прямого угла и противоположащим ребром.

6. В трехгранном угле все плоские углы — прямые. Из вершины его внутри угла проведен отрезок, проекции которого на ребра угла соответственно равны: $a = 2$, $b = 3$ и $c = 6$. Найти длину этого отрезка.

7. Плоские углы трехгранного угла — прямые. От вершины угла на ребрах отложены отрезки $a = 1,0$ см, $b = 2,0$ см и $c = 3,0$ см; через концы их проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

8. Плоские углы трехгранного угла прямые. Проведена плоскость, отсекающая от граней треугольники, площади которых равны $6,0$ см², $9,0$ см² и 18 см². Найти площадь сечения.

9. Плоские углы трехгранного угла — прямые. От вершины его на ребрах отложены отрезки a , b и c и через концы их проведена плоскость. Доказать, что квадрат площади полученного сечения равен сумме квадратов площадей треугольников, отсекаемых на гранях трехгранного угла.

10. Плоскости, проведенные через ребра трехгранного угла перпендикулярно к противоположащим граням, пересекаются по одной прямой. Доказать.

VI. НАЧАТКИ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРЧЕНИЯ.

§ 1. Ортогональная проекция на одну плоскость.

1. 1) Проекция точки на плоскость есть точка.

2) Проекция прямой на плоскость — прямая, за исключением того случая, когда прямая перпендикулярна к плоскости проекций; в этом случае проекция прямой обращается в точку.

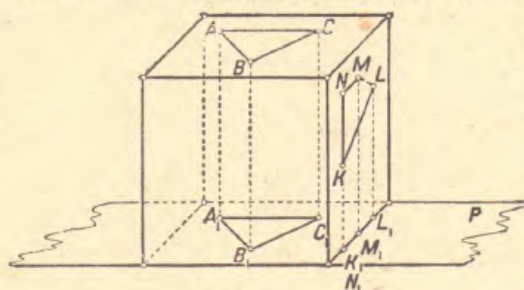


Рис. 84.

3) Проекция прямолинейной фигуры на плоскость есть прямолинейная фигура, за исключением того случая, когда плоскость фигуры перпендикулярна к плоскости проекций; в этом случае проекция фигуры обращается в отрезок прямой.

4) Проекция отрезка или прямолинейной фигуры, параллельных плоскости проекций, является точной копией отрезка или фигуры.

Так, например, проекция отрезка NM (рис. 84) на плоскость P есть отрезок N_1M_1 , и проекция отрезка NK , перпендикулярного к плоскости проекций P , есть точка K_1 , совпадающая с точкой N_1 ; проекция четырехугольника $KLMN$, лежащего в плоскости правой грани куба, перпендикулярной к плоскости проекций P , есть отрезок K_1L_1 .

Проекция отрезка AC , лежащего в плоскости верхней грани куба, параллельной плоскости P , есть отрезок $A_1C_1 = AC$, и проекция треугольника ABC , лежащего в плоскости верхней грани куба, параллельной плоскости P , есть $\triangle A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC .

2. Пусть на плоскости проекций P поставлен куб (рис. 85). Проектируем его на плоскость P ; проекции нижнего и верхнего оснований куба $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ совпадают; проекции боковых граней на плоскость P — отрезки A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 и D_1A_1 . Проекция куба на плоскость P — квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 85а).

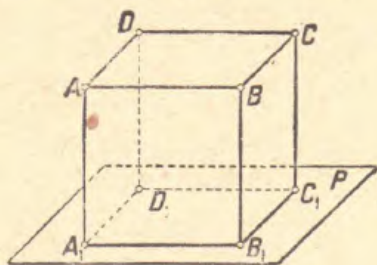


Рис. 85.

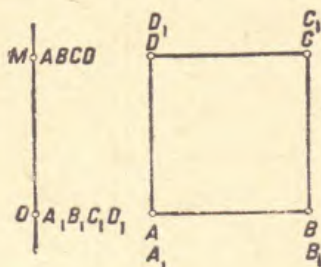


Рис. 85а.

Проекция прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, поставленного на плоскость проекций своим основанием, дает, как и куб, квадрат. Значит, по проекции тела только на одну плоскость нельзя еще судить о форме и размерах спроектированного тела.

Чтобы иметь возможность судить о форме и размерах тела по его проекции на одну плоскость, рядом с проекцией тела проводится прямая; на ней откладываются от одной определенной точки, например точки O , отрезки, длины которых соответствуют расстояниям вершин фигуры или тела от плоскости проекций. Для куба на рисунке 85а взят отрезок OM . Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 , поставленные рядом с точкой O , показывают, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 отстоят от плоскости проекций на нулевом расстоянии, т. е. лежат на плоскости проекций; точки же A, B, C и D , поставленные рядом с точкой M , отстоят от плоскости проекций на расстоянии, равном ребру куба.

3. Задача. Восстановить по данному на рисунке 86 чертежу, изображающему проекцию некоторого тела, форму и размеры тела.

Решение. Основанием тела служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами в 3 см и 6 см; прямоугольник лежит в плоскости проекций, ибо точки A, B, C и D поставлены у точки O и потому должны отстоять от плоскости проекций на нулевом расстоянии. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 отстоят от плоскости проекций на расстоянии, равном 9 см. Итак, данная на рисунке 86 проекция есть проекция бруса, размеры которого $3 \times 6 \times 9$ см³.

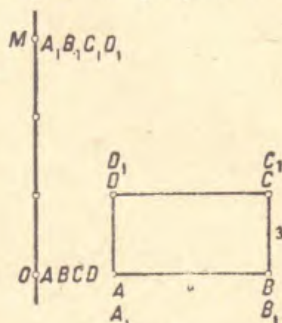


Рис. 86

§ 2. Проекция на две плоскости.

1. Запись отдельных расстояний точек от плоскости оказывается излишней при проектировании на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Обычно одну из них берут в горизонтальном положении (рис. 87) — горизонтальная плоскость проекций, которую обозначают буквами ГП, другая — в вертикальном положении, вертикальная плоскость проекций; она обозначается буквами ВП.

Проекция на горизонтальную плоскость обозначим через $гп$, а проекции на вертикальную плоскость — через $вп$. Линия AB пересечения обеих плоскостей проекций называется осью проекций.

Двумя плоскостями ГП и ВП все пространство делится на четыре четверти, или квадранта.

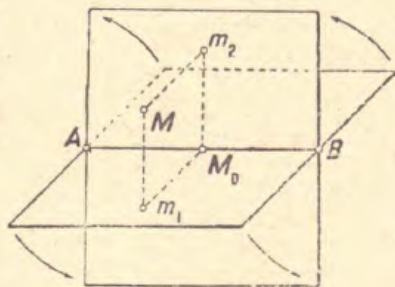


Рис. 87.

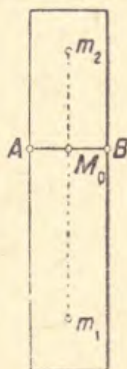


Рис. 87а.

2. Возьмем какую-нибудь

точку M в первой четверти и построим ее проекции m_1 и m_2 на ГП и ВП.

Плоскость, проходящая через обе проектирующие линии Mm_1 и Mm_2 , перпендикулярна к оси AB ; она пересекает ось AB в точке M_0 ; $Mm_1M_0m_2$ — прямоугольник, $Mm_1 = m_2M_0$ и $Mm_2 = m_1M_0$.

По предложению математика Монжа (1746—1818) обе проекции вычерчивают в одной плоскости, которую получают, поворачивая ГП

на 90° по направлению, показанному стрелкой, т. е. в ВП. В таком случае мы будем иметь чертеж, изображенный на рисунке 87а. Этот чертеж называется э п ю р о м.

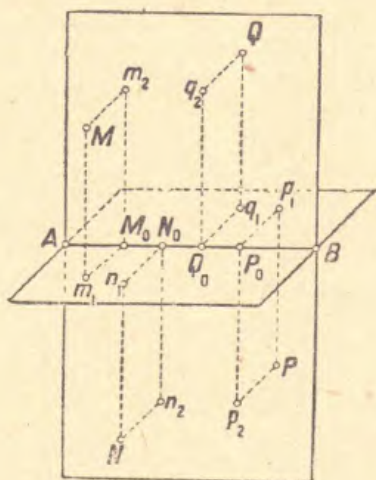


Рис. 88.

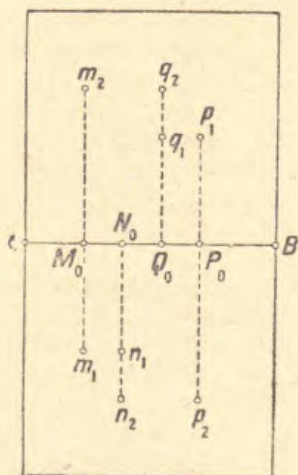


Рис. 88а.

Вертикальная и горизонтальная проекции точки лежат на эпюре на одной прямой, перпендикулярной к оси.

3. Пусть даны точки M, N, P и Q , расположенные в разных четвертях, образуемых ГП и ВП (рис. 88); построим их проекции и затем эпюр. Тогда получим положение проекций на эпюре, указанное на рисунке 88а.

Точка M	I	четверти:	гп под осью,	вп — над осью;
" Q	II	"	гп над "	вп — " "
" P	III	"	гп " "	вп — под "
" N	IV	"	гп под "	вп — " "

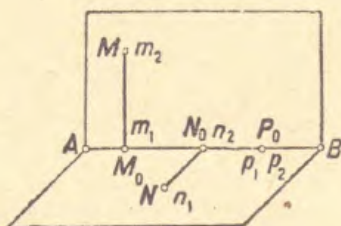


Рис. 89.

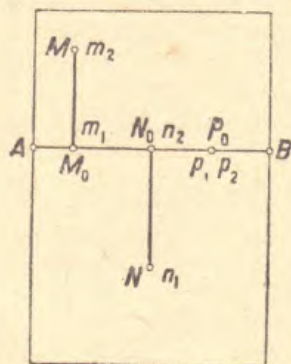


Рис. 89а.

Если точка M лежит в ВП, то вп совпадает с точкой (рис. 89 и 89а), а гп лежит на оси. Для точки N , лежащей в ГП, гп совпадает с точкой N , а вп лежит на оси; гп и вп точки P , лежащей на оси, совпадают с осью.

4. Проекции прямой на две плоскости ГП и ВП даны на следующих рисунках:

1) Отрезок MN параллелен $ВП$; тогда $гп \parallel AB$ и $вп \parallel MN$ (рис. 90 и 90а).

1а) Если же отрезок MN параллелен $ГП$, то $гп \parallel MN$ и $вп \parallel AB$.

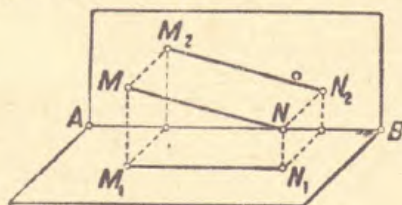


Рис. 90.

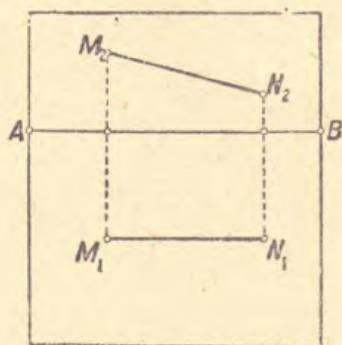


Рис. 90а.

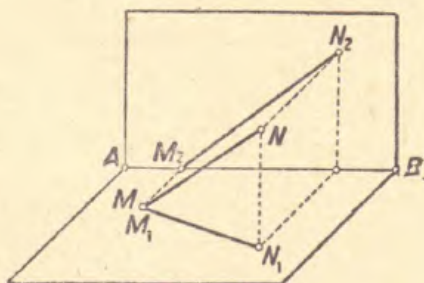


Рис. 91.

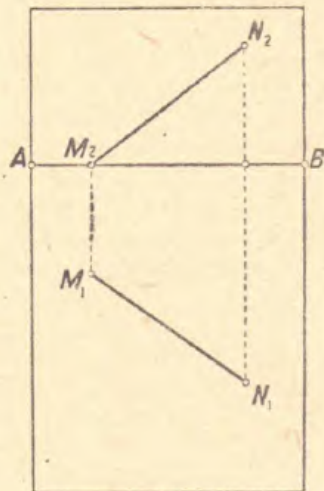


Рис. 91а.

2) Отрезок MN упирается одним концом в одну из плоскостей, например $ГП$. Тогда $вп$ имеет с осью AB общую точку (рис. 91 и 91а).

2а) То же самое будет в том случае, когда отрезок упирается в $ВП$.

3) Отрезок MN упирается одним концом в $ГП$ и параллелен $ВП$. Тогда $гп \parallel AB$, а $вп \parallel MN$ и имеет с осью AB общую точку (рис. 92 и 92а).

3а) Если MN упирается в $ВП$ и параллелен $ГП$, то $гп \parallel MN$ и имеет с осью AB общую точку, а $вп \parallel AB$.

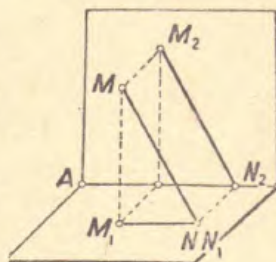


Рис. 92.

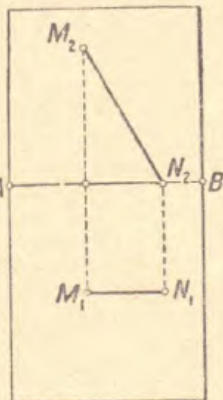


Рис. 92а.

4) Отрезок MN лежит в одной из плоскостей, например ГП; тогда вп лежит на оси AB (рис. 93 и 93а).

4а) То же самое будет в том случае, когда отрезок лежит в вертикальной плоскости проекций; в этом случае гп лежит на оси AB .

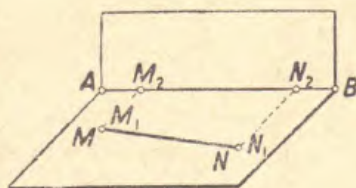


Рис. 93.

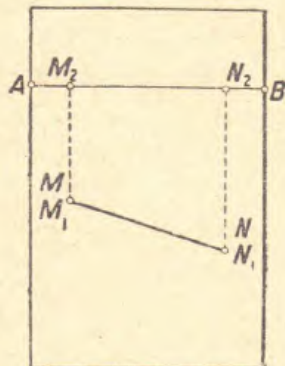


Рис. 93а.

5) Отрезок MN перпендикулярен к ГП; тогда гп обращается в точку N_1 , а вп $\parallel MN$ и равна отрезку MN (рис. 94 и 94а).

5а) Если MN перпендикулярен к ВП, то вп обращается в точку, а гп $\parallel MN$ и равна MN .

6) Отрезок MN упирается в обе плоскости; в этом случае гп и вп имеют с осью общую точку (рис. 95 и 95а).

7) Отрезок MN лежит в плоскости $Q \perp AB$; гп и вп лежат на одном перпендикуляре к AB (рис. 96 и 96а).

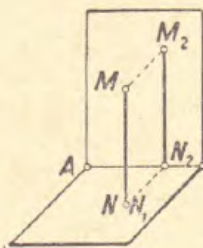


Рис. 94.

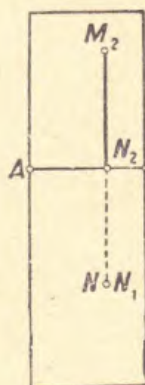


Рис. 94а.

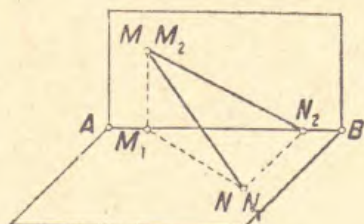


Рис. 95.

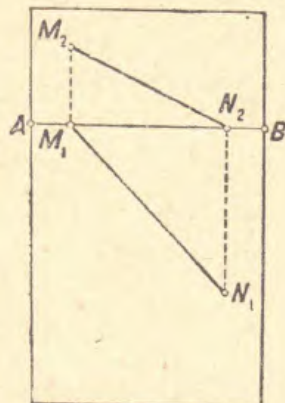


Рис. 95а.

8) Отрезок $MN \parallel AB$; в этом случае гп и вп параллельны AB (рис. 97 и 97а).

Разобранные эпюры дают проекции на две плоскости отрезков, различным образом расположенных в пространстве.

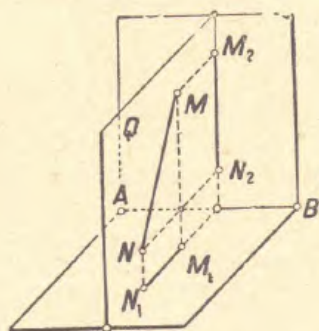


Рис. 96.

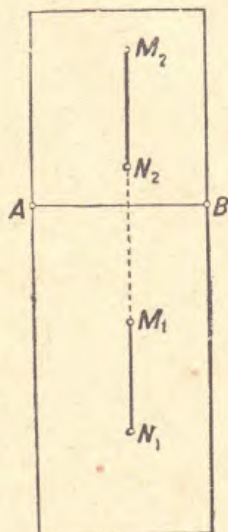


Рис. 96а.

Следует указать, что помимо навыка в построении эпюра надо уметь решать и обратную задачу, т. е. по данному эпюру определять положение отрезка в пространстве; это необходимо для чтения рабочего чертежа.

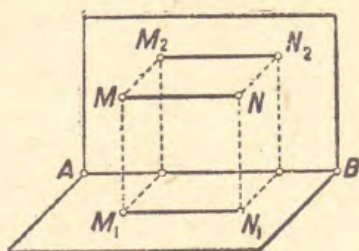


Рис. 97.

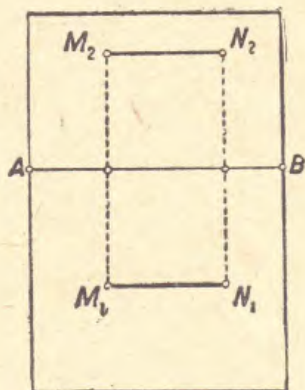


Рис. 97а.

§ 3. Проекция на три плоскости.

1. Три взаимно перпендикулярные пересекающиеся плоскости (рис. 98) образуют восемь трехгранных углов, которые называются октантами. Вертикальная плоскость ВП, совпадающая с плоскостью чертежа,

называется фасадом; горизонтальная плоскость ГП — планом, а плоскость, перпендикулярная к ним — боковая вертикальная плоскость БП, — профильной плоскостью.

Прямые AB , CD и EF , по которым пересекаются плоскости проекций, называются осями.

2. Возьмем какую-нибудь точку H_1 в первом октанте (рис. 98)

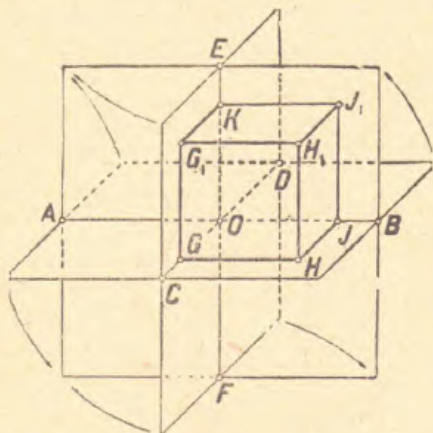


Рис. 98.

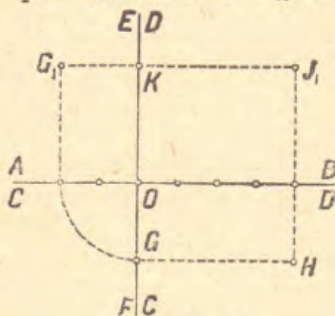


Рис. 99.

и построим ее проекции. Положение точки H_1 определяется расстояниями ее от всех трех плоскостей проекций. Расстояние H_1G_1 точки H_1 от плоскости БП обозначается через x ; H_1G_1 равно отрезку OJ на оси AB ; расстояние H_1J_1 точки H_1 от плоскости ВП обозначается через y и равно отрезку OG на оси CD ; наконец, расстояние H_1H точки H_1 от ГП обозначается через z и равно отрезку OK на оси EF . Эти три отрезка

x , y и z , измеренные в одном и том же масштабе и данные по величине и направлению, называются координатами точки в пространстве. Направления отрезков, определяющих расстояние точки от плоскостей в первом октанте, принимаются за положительные.

3. Три проекции точки, линии, фигуры и тела даются обычно на эюре, который получается при повороте ГП и БП на 90° по направлениям, указанным стрелками до

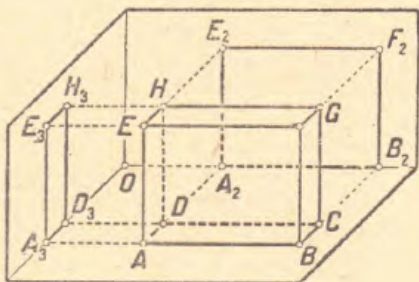


Рис. 100.

совпадения их с ВП. На рисунке 99 дан эюр проекций точки H_1 на три плоскости проекций.

4. На рисунке 100 даны проекции на три плоскости параллелепипеда, поставленного на ГП, а на рисунке 100а — эюр этого параллелепипеда.

Вопросы и упражнения.

1. Отрезок MN лежит в ВП и параллелен оси. Начертить эюр.
2. Отрезок MN лежит в ГП и параллелен оси. Начертить эюр.
3. Отрезок MN лежит на оси AB . Начертить эюр.

4. Отрезок MN перпендикулярен к оси и лежит в ВП. Начертить эюр.

5. Основание AB треугольника ABC параллельно ГП и отстоит от нее на расстоянии, равном 1 см. Проекция $A_1B_1C_1$ треугольника на ГП — прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, катеты которого A_1C_1 и C_1B_1 параллельны БП и ВП. Дать проекцию на три плоскости и начертить эюр.

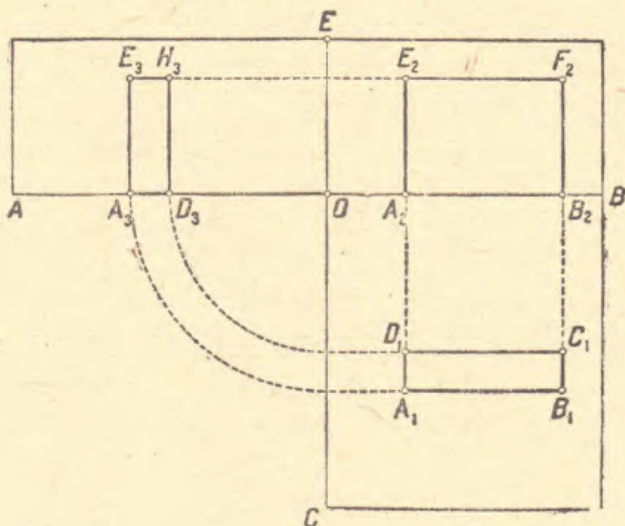


Рис. 100а.

VII. МНОГОГРАННИКИ.

§ 1. Многогранник;

1. Многогранником называется геометрическое тело, ограниченное плоскостями.

Многоугольники, ограничивающие многогранники, называются гранями многогранника. Стороны многоугольников называются ребрами многогранника. Вершины многоугольников называются вершинами многогранника; вершины многогранника являются в то же время и вершинами его граней.

2. Многогранники по числу граней, ограничивающих их, делятся на четырехгранники, пятигранники и т. д.

Наименьшее число граней многогранника — четыре. В самом деле, три пересекающиеся плоскости, имеющие только одну общую точку, образуют трехгранный угол. Для того чтобы получить геометрическое тело — ограниченную часть пространства, надо пересечь грани трехгранного угла еще одной, четвертой, плоскостью (рис. 101).

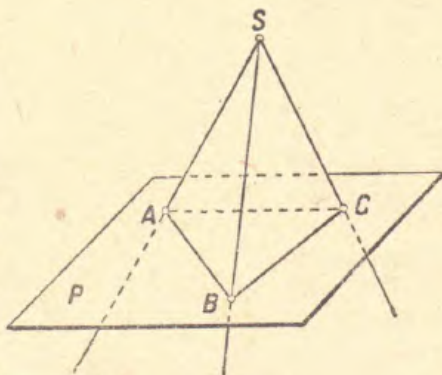


Рис. 101.

На рисунке 102 даны четырехгранник, пятигранник, шестигранник, семигранник и восьмигранник.

3. Многогранник называется выпуклым, если любое его сечение плоскостью — выпуклый многоугольник.

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые многогранники.

4. В каждом многограннике различают: 1) плоские углы его граней, 2) двугранные углы при его ребрах, число которых соответствует числу ребер многогранника, и 3) трехгранные, четырехгранные и т. д. углы при его вершинах; общее число многогранных углов соответствует числу вершин многогранника.

5. Отрезок прямой, концами которого служат две вершины многогранника, не лежащие на одной его грани, называется диагональю многогранника.

В четырехграннике, или тетраэдре (рис. 102, I), нельзя провести ни одной диагонали; в кубе — шестиграннике — можно провести 4 диагонали; в семиграннике (IV), данном на рисунке, нельзя провести ни одной диагонали, а в восьмиграннике, данном на том же рисунке 102, V, число диагоналей равно трем.

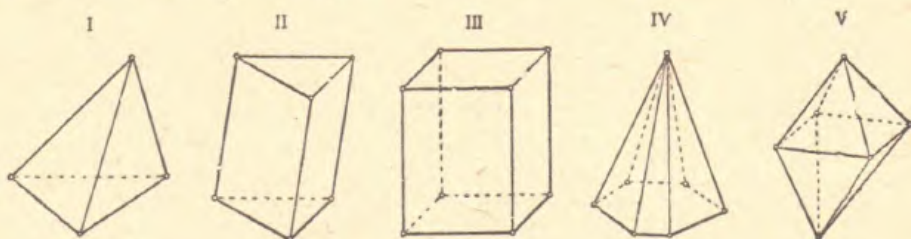


Рис. 102.

§ 2. Призма.

1. Прямая AB , которая скользит по замкнутой ломаной $KLMNK$ (рис. 103), оставаясь параллельна самой себе, образует призматическую поверхность. Прямая AB — образующая, ломаная $KLMNK$ — направляющая.

2. Проведем две параллельные плоскости P и Q , пересекающие призматическую поверхность (рис. 104).

Тело, ограниченное призматической поверхностью и двумя пересекающими ее параллельными плоскостями, называется призмой.

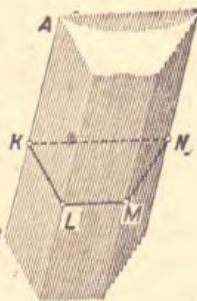


Рис. 103.

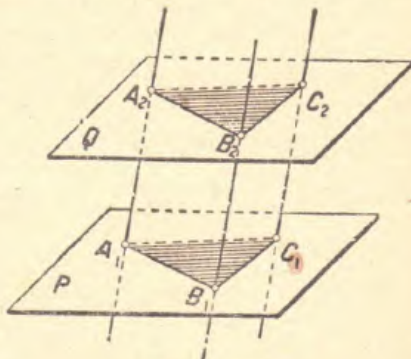


Рис. 104.

Плоскости, составляющие призматическую поверхность, пересекаются параллельными плоскостями P и Q по прямым, которые параллельны:

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2, \quad B_1C_1 \parallel B_2C_2 \quad \text{и} \quad A_1C_1 \parallel A_2C_2.$$

Параллельные сечения называются основаниями призмы.

Соответственные углы оснований равны как углы с параллельными сторонами:

$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle B_1 = \angle B_2 \quad \text{и} \quad \angle C_1 = \angle C_2.$$

Часть призматической поверхности, заключенная между плоскостями оснований, образует боковую поверхность призмы.

Боковая поверхность призмы состоит из четырехугольников — параллелограмов, так как в каждом четырехугольнике противолежащие стороны попарно параллельны.

В параллелограме противолежащие стороны равны, а потому:

$$A_1B_1 = A_2B_2, \quad B_1C_1 = B_2C_2 \quad \text{и} \quad A_1C_1 = A_2C_2.$$

Основания призмы равны, так как они — одноименные многоугольники с соответственно равными сторонами и углами.

Отрезки ребер призматической поверхности между основаниями призмы называются боковыми ребрами призмы. Боковые ребра призмы равны.

Боковая поверхность призмы и площади обоих оснований ее составляют полную поверхность призмы.

3. Призмы в зависимости от основания делятся на призмы: треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д.

4. Если боковые грани призмы перпендикулярны к основанию, то призма называется прямой.

В этом случае боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскостям оснований, а ее боковые грани — прямоугольники.

5. Если боковые ребра призмы не перпендикулярны к основаниям, то призма называется наклонной.

6. Прямая призма называется правильной, если основаниями ее служат правильные многоугольники.

Боковые ребра правильной призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований.

7. Расстояние между плоскостями оснований призмы называется высотой призмы.

В прямой призме, а следовательно и в правильной, высота равна боковому ребру призмы.

8. При изображении правильной многоугольной призмы достаточно вычертить только основной определяющий треугольник основания и затем провести ребра призмы параллельно боковому краю листа или доски. На рисунке 105 дано изображение $OABO_1A_1B_1$ шестой части правильной шестиугольной призмы; пунктиром обозначена на нем и вся призма.

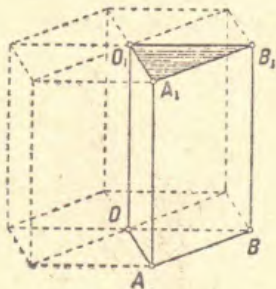


Рис. 105.

§ 3. Сечения призмы плоскостью.

1. Сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру призмы, называется поперечным, или перпендикулярным, сечением призмы.

На рисунке 106 дано сечение $ABCD$ четырехугольной призмы. Это сечение перпендикулярно к каждому ребру призмы.

В прямой призме, а следовательно и в правильной, каждое из оснований является одновременно и перпендикулярным сечением.

2. Сечение призмы плоскостью, проходящей через соответствующие диагонали оснований, называется диагональным сечением призмы.

На рисунке 107 даны диагональные сечения S_1 и S_2 призмы, проходящие через соответствующие диагонали: 1) B_1E_1 и B_2E_2 и 2) C_1E_1 и C_2E_2 оснований призмы.

Диагональные сечения наклонной призмы — параллелограммы; диагональные сечения прямой призмы — прямоугольники.

Диагонали диагональных сечений одновременно являются и диагоналями призмы.

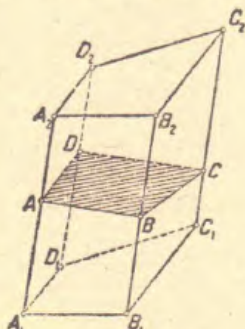


Рис. 106.

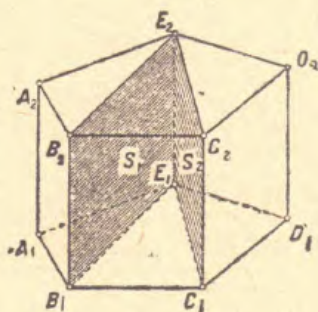


Рис. 107.

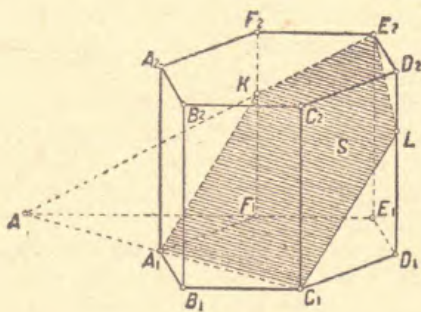


Рис. 108.

3. Задача. Дана правильная шестиугольная призма (рис. 108). Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ A_1C_1 основания и вершину E_2 параллельного основания.

Решение. Точки A_1 , C_1 и E_2 принадлежат по условию искомому сечению; следовательно, A_1C_1 — линия пересечения плоскости искомого сечения S и плоскости основания. Точка пересечения A прямых C_1A_1 и E_1F_1 , лежащих в основании $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, принадлежит: 1) плоскости сечения S , 2) плоскости нижнего основания и 3) плоскости грани $F_1E_1E_2F_2$, а потому прямая E_2A принадлежит: 1) плоскости сечения S и 2) плоскости грани $E_1E_2F_2F_1$ и E_2K — линия пересечения этих плоскостей. Значит, A_1K — линия пересечения грани $A_1F_1F_2A_2$ и плоскости сечения S . Грань $C_1D_1D_2C_2 \parallel A_1F_1F_2A_2$ на основании второго признака параллельности плоскостей: $D_2D_1 \parallel F_2F_1$ и $D_2C_2 \parallel F_2A_2$. Эти параллельные грани пересекаются плоскостью сечения S по прямым параллельным. Проводим $C_1L \parallel A_1K$; тогда C_1L — линия пересечения грани $C_1D_1D_2C_2$ и плоскости

сечения S ; соединив L и E_2 , получим сечение $A_1C_1LE_2K$. Пятиугольник $A_1C_1LE_2K$ — искомое сечение S , стороны его лежат на поверхности призмы.

4. Задача. В данной треугольной прямой призме провести сечение, проходящее через боковое ребро и высоту основания, проведенную из конца ребра (рис. 109).

Решение. Проводим плоскость S через ребро C_1C_2 и высоту C_2D_2 основания $A_2B_2C_2$; плоскость эта пересечет другое основание $A_1B_1C_1$ по $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ и переднюю грань призмы по $D_1D_2 \parallel C_1C_2$. Сечение — прямоугольник $C_1C_2D_2D_1$. Оно делит данную треугольную призму на две треугольные призмы, высоты которых равны высоте призмы, основаниями же их служат прямоугольные треугольники $A_1D_1C_1$ и $B_1D_1C_1$ с прямым углом при их общей вершине D_1 .

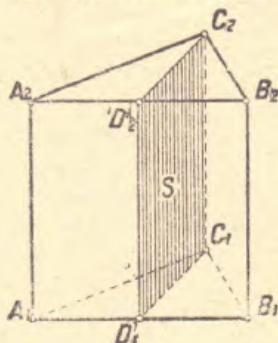


Рис. 109.

§ 4. Параллелепипеды.

1. Параллелепипедом называется призма, основания которой — параллелограммы.

Все грани параллелепипеда — параллелограммы.

2. Параллелепипед называется **прямым**, если его боковые грани — прямоугольники.

Боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны к плоскостям оснований.

3. Прямой параллелепипед называется **прямоугольным**, если основания его — прямоугольники.

Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

4. Куб — частный случай прямоугольного параллелепипеда. Все грани куба — равные квадраты.

5. Теорема. Противлежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

Дано: Параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ (рис. 110)

Требуется доказать: Грань $A_1D_1D_2A_2 \parallel B_1C_1C_2B_2$. *

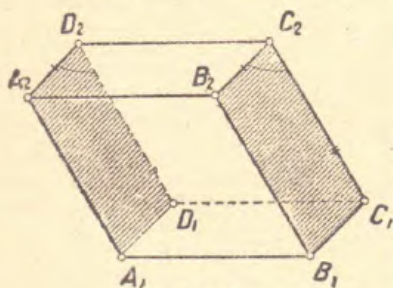


Рис. 110.

Доказательство. $C_2B_2 \parallel D_2A_2$ и $C_2B_2 = D_2A_2$ как стороны параллелограмма $A_2B_2C_2D_2$; $C_2C_1 \parallel D_2D_1$ и $C_2C_1 = D_2D_1$ как стороны параллелограмма $D_1C_1C_2D_2$, а потому: 1) грани параллельны по второму признаку параллельности плоскостей, 2) $\angle D_1D_2A_2 = \angle C_1C_2B_2$, и, следовательно, грани равны как параллелограммы по двум смежным сторонам и углу между ними.

Следствие. Любая грань параллелепипеда может служить его основанием.

В самом деле, в призме основания параллельны, а потому любая грань параллелепипеда может служить его основанием.

6. Теорема. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и ею делятся взаимно пополам.

Дано: Параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$; его диагонали $A_1C_2, B_1D_2, C_1A_2, D_1B_2$ (рис. 111).

Требуется доказать: Диагонали пересекаются в одной точке; в этой точке они взаимно делятся пополам.

Доказательство. Диагональное сечение $A_1C_1C_2A_2$ — параллелограм, а потому диагонали его A_1C_2 и C_1A_2 пересекаются в точке O и делятся ею пополам;

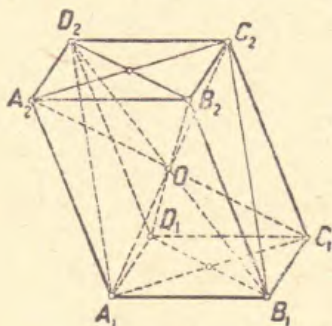


Рис. 111.

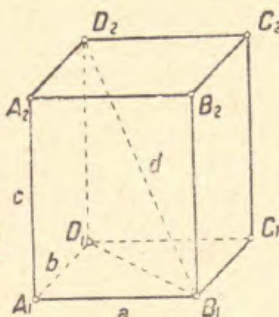


Рис. 112.

диагональное сечение $A_1B_1C_2D_2$ — параллелограм, а потому диагональ B_1D_2 пересекает диагональ A_1C_2 в той же точке O и делится ею пополам, так как диагональ A_1C_2 может иметь только одну середину. Значит, три диагонали — A_1C_2, C_1A_2 и B_1D_2 — пересекаются в точке O и ею делятся

пополам. Точно так же находим из рассмотрения диагонального сечения $B_1D_1D_2B_2$, что и диагональ B_2D_1 проходит через точку O и ею делится пополам.

7. Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его ребер, выходящих из одной вершины; другими словами, квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Дано: Прямоугольный параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$; его ребра $A_1B_1 = a, A_1D_1 = b$ и $A_1A_2 = c$; диагональ $B_1D_2 = d$ (рис. 112).

Требуется доказать: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Доказательство. Проводим диагональ основания B_1D_1 ; она служит проекцией диагонали B_1D_2 . Из прямоугольного треугольника $D_2D_1B_1$ имеем $d^2 = D_1B_1^2 + D_1D_2^2$, но $D_1B_1^2 = A_1B_1^2 + A_1D_1^2$, а потому $d^2 = A_1B_1^2 + A_1D_1^2 + D_1D_2^2$, или $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Следствия. 1) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны. 2) Диагонали куба равны, и каждая из них равна $a\sqrt{3}$, где a — ребро куба.

§ 5. Пирамида.

1. Прямая AB , перемещаясь в пространстве так, что проходит через одну неподвижную точку и одновременно скользит по некоторой замкнутой ломаной $BCDE$, образует поверхность многогранного угла, или пирамидальную поверхность (рис. 113). AB — образующая, $BCDE$ — направляющая.

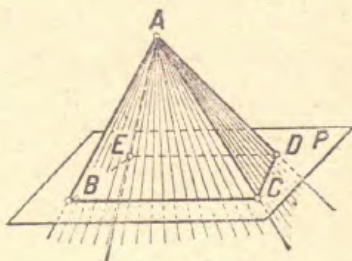


Рис. 113.

2. Если провести плоскость P , пересекающую все грани многогранного угла, то получим тело, ограниченное гранями многогранного угла и плоскостью сечения P ; такое тело называется пирамидой.

Сечение плоскости P с гранями многогранного угла — многоугольник; он называется основанием пирамиды; отрезки прямой от неподвижной точки A , вершины многогранного угла, до вершин основания называются боковыми ребрами пирамиды; треугольники, отсекаемые плоскостью сечения от граней многогранного угла, называются боковыми гранями пирамиды; вершина многогранного угла называется вершиной пирамиды.

3. Все боковые грани пирамиды образуют боковую поверхность пирамиды; они представляют собою треугольники, сходящиеся своими вершинами в одной точке, вершине пирамиды; основаниями этих треугольников служат стороны основания пирамиды. Боковая поверхность и площадь основания пирамиды составляют полную поверхность пирамиды.

4. Пирамиды в зависимости от основания делятся на пирамиды: треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д.

5. Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого — многоугольник — основание, а другие грани — боковые грани — треугольники, имеющие основаниями стороны многоугольника и одну общую вершину вне плоскости многоугольника.

6. Пирамида называется правильной, если: 1) основание ее — правильный многоугольник и 2) вершина ее проектируется в центр основания пирамиды (рис. 114).

Боковые ребра правильной пирамиды равны как наклонные, имеющие равные проекции; эти проекции служат радиусами окружности, проходящей через все вершины основания. Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники; они наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. В самом деле, проведя высоту боковой грани SK (рис. 114) и соединив K с центром O , заключаем на основании обратной теоремы о трех перпендикулярах, что $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания. Угол наклона боковой грани к плоскости основания один и тот же для всех граней данной правильной пирамиды.

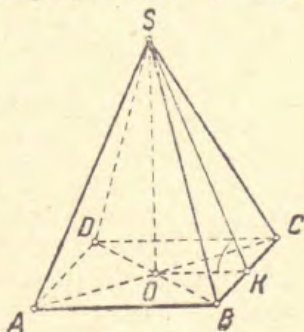


Рис. 114.

7. Перпендикуляр SO , проведенный из вершины S пирамиды к ее основанию, называется высотой пирамиды, высота же SK боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины S пирамиды, называется апофемой правильной пирамиды.

8. Углы боковых граней пирамиды при вершине S называются плоскими углами при вершине пирамиды. Углы при каждой из вершин основания пирамиды — трехгранные, угол при вершине пирамиды — многогранный; каждое ребро пирамиды служит ребром двугранного угла.

9. Для построения линейного угла двугранного угла между двумя смежными боковыми гранями, например гранями SBC и SDC правильной пирамиды, поступают так: проводят на плоскости грани SBC из вершины B прямую BK , перпендикулярную SC , и на плоскости грани SDC — прямую DK , перпендикулярную SC (рис. 115); основания этих перпендикуляров совпадают, так как $\triangle BKC = \triangle DKC$: у них равные гипотенузы $BC = DC$

и равные катеты $BK = DK$ как боковые высоты равных равнобедренных треугольников. Плоскость треугольника DBK перпендикулярна к ребру SC .

10. При изображении правильной пирамиды следует сначала вычертить ее основание и отметить его центр, провести затем через центр

высоту параллельно боковому краю листа или доски и конец высоты соединить с вершинами основания. При изображении правильной n -угольной пирамиды ограничиваются изображением основного определяющего треугольника основания и вычерчивают $\frac{1}{n}$ пирамиды (рис. 116);

на рисунке обозначена пунктиром и вся пирамида.

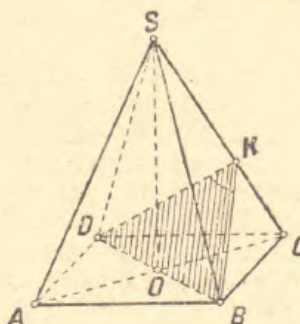


Рис. 115.

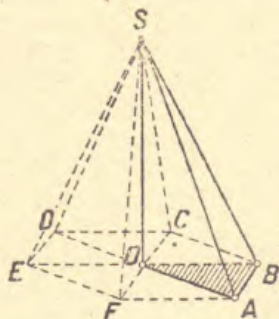


Рис. 116.

§ 6. Сечения пирамиды.

1. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и диагональ ее основания, называется диагональным сечением пирамиды (рис. 117).

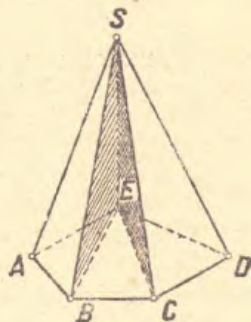


Рис. 117.

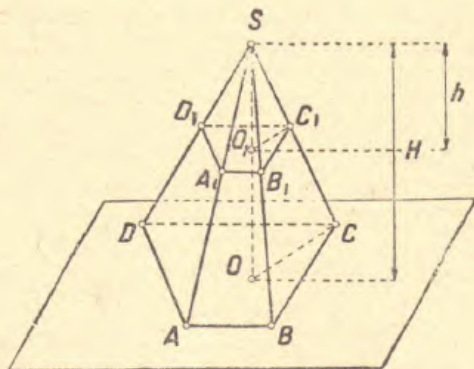


Рис. 118.

Если из одной вершины основания проведены все возможные диагонали, то диагональные сечения, проходящие через них, делят всю пирамиду на треугольные пирамиды, имеющие одну и ту же высоту; основаниями этих пирамид служат треугольники, на которые основание пирамиды разделено диагоналями.

2. Теорема. Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то: 1) ребра и высота пирамиды делятся сечением на пропорциональные части, 2) сечение — многоугольник, подобный основанию, и 3) площадь основания относится к площади сечения как квадраты их расстояний от вершины.

Дано: Пирамида $SABCD$; сечение $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$. H — высота пирамиды и h — расстояние параллельного сечения от вершины (рис. 118).

Требуется доказать: 1) $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1} = \frac{SD}{SD_1} = \frac{H}{h}$;

2) $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$ и $\frac{\text{площадь } ABCD}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1} = \frac{H^2}{h^2}$.

Доказательство. Плоскости боковых граней пересекают параллельные плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по прямым параллельным: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$ и $D_1A_1 \parallel DA$; кроме того, $O_1C_1 \parallel OC$, а поэтому $\triangle OSC \sim \triangle O_1SC_1$, $\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1$, $\triangle BSC \sim \triangle B_1SC_1$ и т. д.

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{SC}{SC_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{SD}{SD_1} = \frac{DA}{D_1A_1} = \frac{OC}{O_1C_1} = \frac{H}{h}.$$

Многоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны, так как стороны их пропорциональны и углы их равны как углы с параллельными сторонами:

$$\frac{\text{площадь } ABCD}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{H^2}{h^2}.$$

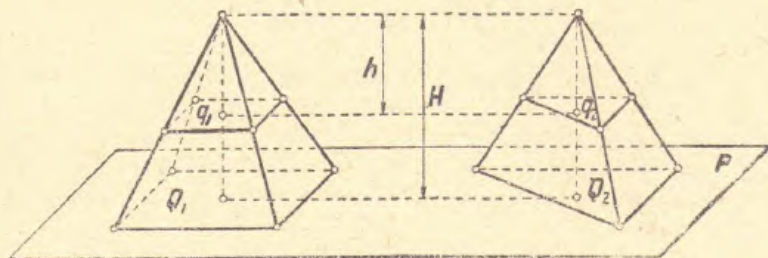


Рис. 119.

Следствие 1. Если две пирамиды имеют равные высоты и пересечены плоскостями, параллельными основаниям, на равных расстояниях от их вершин, то площади сечений пропорциональны соответствующим площадям оснований (рис. 119):

$$\frac{Q_1}{q_1} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{Q_2}{q_2}.$$

Следствие 2. Если две пирамиды имеют равные высоты и равновеликие основания, то сечения пирамид, равноудаленные от вершины равновелики:

$$\frac{Q_1}{q_1} = \frac{Q_2}{q_2}.$$

Если $Q_1 = Q_2$, то и $q_1 = q_2$.

3. Часть пирамиды, заключенная между основанием и параллельным ему сечением (рис. 118), называется **усеченной пирамидой**.

Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции. Они образуют боковую поверхность усеченной пирамиды; боковая поверхность пирамиды вместе с двумя параллельными ее основаниями составляют полную поверхность усеченной пирамиды. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

Если усеченная пирамида получена из полной правильной пирамиды, то боковые грани ее — равные равнобедренные трапеции; такая усеченная пирамида называется **правильной**. Все боковые ребра правильной

усеченной пирамиды: 1) равны и 2) одинаково наклонены к плоскостям оснований. Боковые грани образуют с плоскостями оснований равные двугранные углы.

В усеченной пирамиде сечения, проходящие через соответствующие диагонали оснований, называются диагональными сечениями; в них лежат диагонали усеченных пирамид.

Отрезок OO_1 (рис. 118), высоты полной пирамиды, заключенный между параллельными основаниями усеченной пирамиды, называется высотой усеченной пирамиды.

4. При изображении усеченной пирамиды следует всегда предварительно дать изображение полной пирамиды, а затем уже пересечь ее плоскостью, параллельною основанию. Следует помнить, что основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

5. Задача. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (рис. 120) и точки K , L и M на ее ребрах. Провести плоскость S , проходящую через данные три точки, и построить изображение сечения.

Решение. Пусть через три точки K , L и M проведена плоскость сечения.

Точки K , L и M определяют две линии KL и LM пересечения плоскости сечения с гранями SBC и SDC .

Точка пересечения E прямых LK , и CB принадлежит: 1) плоскости правой боковой грани, 2) плоскости основания пирамиды, 3) плоскости сечения S .

Точка пересечения F прямых LM и CD принадлежит: 1) плоскости

задней грани, 2) плоскости основания и 3) плоскости сечения S .

Следовательно, прямая EF есть линия пересечения плоскости сечения S и плоскости основания, а потому ON есть отрезок, по которому плоскость сечения S пересекает основание пирамиды.

Соединив N с M и O с K , получаем искомое сечение $KLMNO$, стороны которого лежат на поверхности пирамиды.

§ 7. Правильные многогранники.

1. Многогранник называется правильным, если: 1) все его грани — равные правильные многоугольники, 2) все его двугранные углы равны и 3) все его многогранные углы равны.

2. Рассмотрим, какие правильные многоугольники могут служить гранями правильных многогранников.

Наименьшее число граней многогранного угла три.

В правильном треугольнике каждый угол равен 60° , в четырехугольнике — 90° , в пятиугольнике — 108° , в шестиугольнике — 120° .

Но $60^\circ \cdot 3 = 180^\circ$; $90^\circ \cdot 3 = 270^\circ$; $108^\circ \cdot 3 = 324^\circ$; $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$ и т. д. Сумма плоских углов при вершине многогранного угла меньше 360° , поэтому из всех правильных многоугольников гранями правильного трехгранного угла могут быть только правильный треугольник или правильный

четыреугольник, т. е. квадрат, или правильный пятиугольник. Соответствующие им правильные многогранники будут: правильный четырехгранник, или правильный тетраэдр, правильный шестигранник, или правильный гексаэдр, т. е. куб, и правильный двенадцатигранник, или правильный додекаэдр. Их изображения даны на рисунке 121.

Правильный четырехгранный угол, и притом только один, можно составить только из треугольников, так как $60^\circ \cdot 4 = 240^\circ$, а $90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$, $108^\circ \cdot 4 = 432^\circ \dots$ Соответствующий ему правильный многогранник — правильный восьмигранник, или правильный октаэдр (рис. 121).

Правильный пятигранный угол можно составить только из треугольников, так как $60^\circ \cdot 5 = 300^\circ$, а $90^\circ \cdot 5 = 450^\circ$.

Соответствующий ему правильный многогранник — правильный двадцатигранник, или правильный икосаэдр (рис. 121). Этими пятью правильными многогранниками исчерпывается число правильных многогранников. Можно доказать, что других правильных многогранников образовать нельзя.

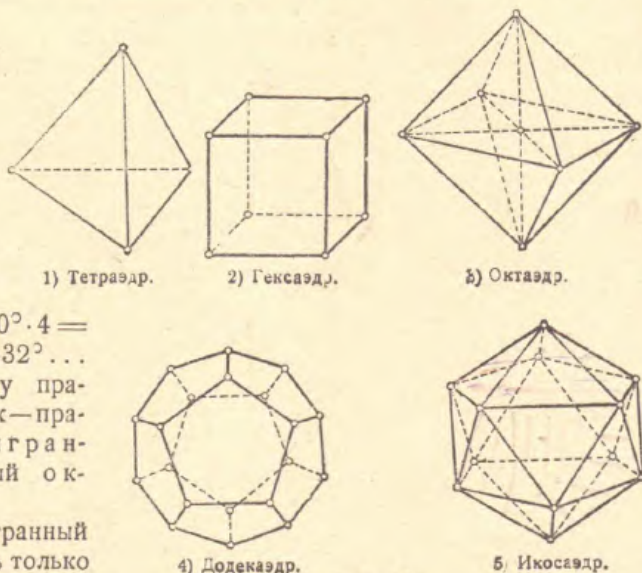


Рис. 121.

§ 8. Развертки многогранников.

1. Если представить себе, что боковая поверхность прямой призмы (рис. 122) разрезана по какому-нибудь боковому ребру и выпрямлена на плоскости без складок, то полученная фигура — прямоугольник — называется разверткой боковой поверхности призмы.

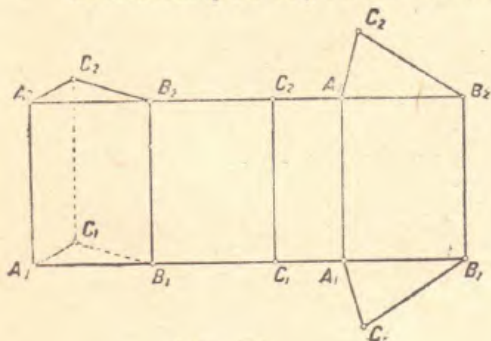


Рис. 122.

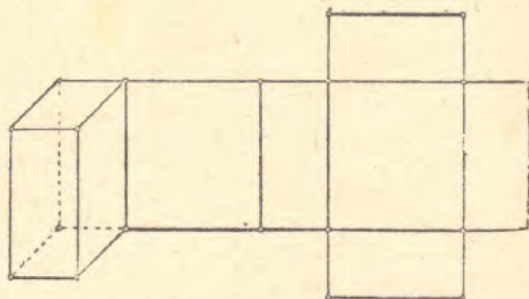


Рис. 123.

Если присоединить к ней еще оба основания призмы, то получится развертка полной поверхности прямой призмы.

2. На рисунке 123 даны прямой параллелепипед и его развертка.

3. На рисунке 124 дана развертка поверхности четырехугольной наклонной призмы; ее передняя и задняя грани — параллелограммы, они перпендикулярны к плоскости основания; две другие боковые грани — прямоугольники, они наклонены к плоскости основания.

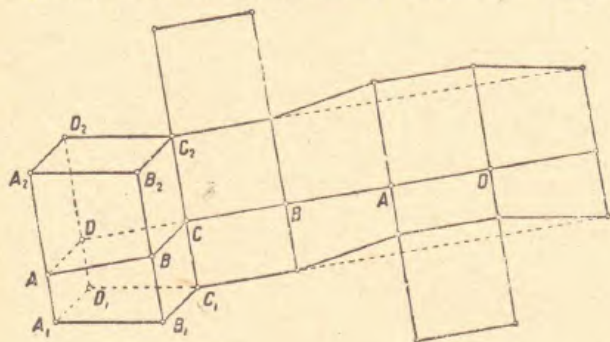


Рис. 124.

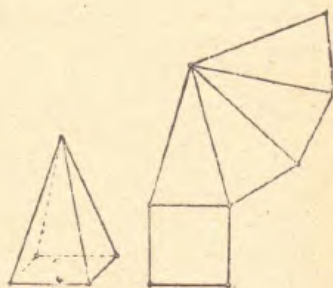


Рис. 125.

4. Если представить себе боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, разрезанной по боковому ребру, и выпрямить ее на плоскости, то полученная развертка в виде шестиугольника есть ее развертка в плоскости боковой грани (рис. 125). Присоединив к ней еще основание пирамиды, получим развертку полной поверхности пирамиды. Развертка пирамиды в плоскости основания дана на рисунке 126.

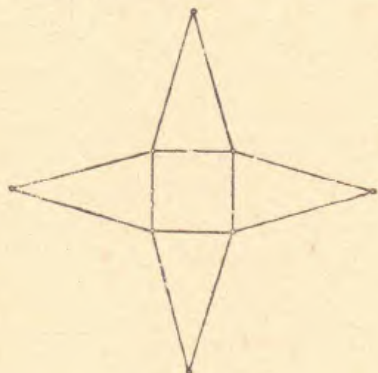


Рис. 126.

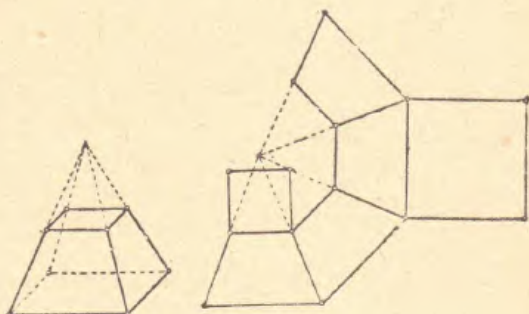


Рис. 127.

5. На рисунке 127 даны правильная усеченная четырехугольная пирамида и развертка ее полной поверхности.

6. На рисунке 128 даны развертки поверхностей: 1) правильного тетраэдра, 2) правильного гексаэдра, 3) правильного октаэдра, 4) правильного додекаэдра и 5) правильного икосаэдра.

Вопросы и упражнения.

1. В правильной треугольной призме все ребра равны. Диагональ боковой грани равна 10 см. Найти ребро призмы.

2. Основания прямой призмы — трапеции, стороны которых относятся как 1:1:1:2; высота призмы $H=6$ см и площадь диагонального сечения $Q=30$ см². Найти периметр основания.

3. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 3 см, 4 см и 5 см. Найти его диагональ.

4. Если углы между диагональю прямоугольного параллелепипеда и ребрами α, β, γ , то $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Доказать.

5. Если углы между диагональю прямоугольного параллелепипеда и его гранями α, β, γ , то $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$. Доказать.

6. Развертка боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды — пятиугольник. Чему равен плоский угол при ее вершине?

7. Может ли плоский угол при вершине правильной пирамиды быть прямым?

8. Если все ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, проведенной через вершины основания пирамиды. Доказать.

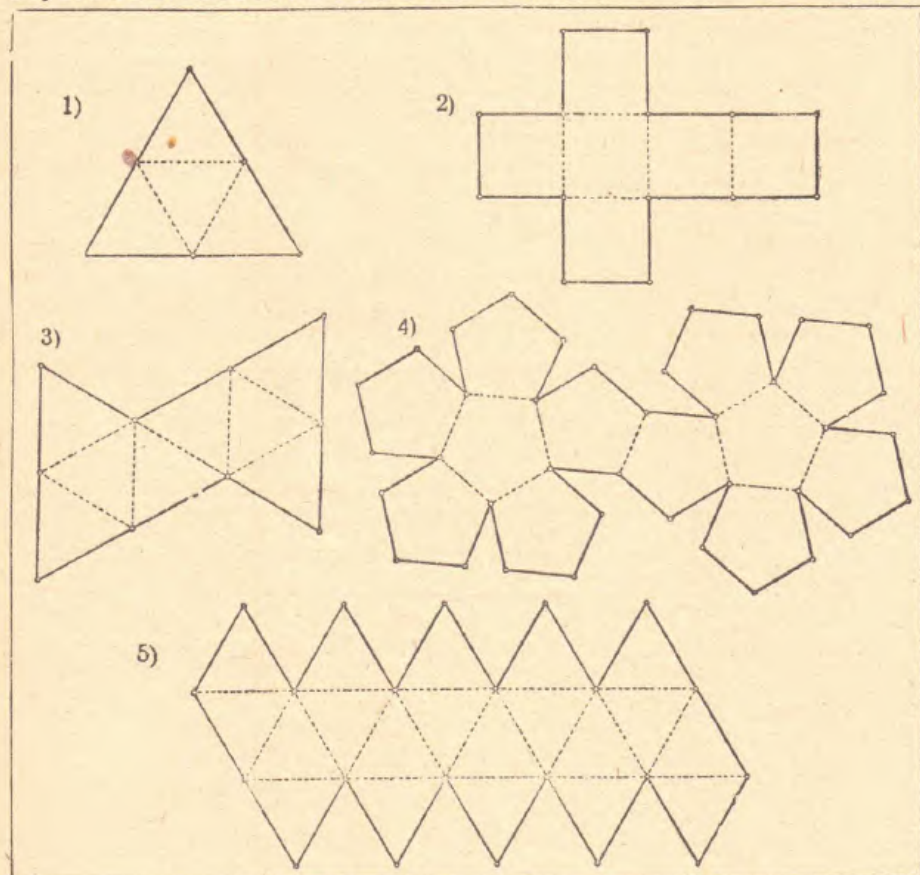


Рис. 128.

9. Если все грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание пирамиды окружности. Доказать.

10. Площадь основания пирамиды Q . Чему равна площадь сечения, проведенного в пирамиде параллельно основанию на расстоянии от вершины пирамиды, равном половине ее высоты? одной трети ее высоты?

11. На каком расстоянии от вершины пирамиды следует провести сечение, параллельное основанию, чтобы площадь сечения равнялась половине площади основания? Высота пирамиды h .

12. Дана правильная треугольная пирамида, высота ее $h = \sqrt{13}$ см и сторона основания $a = 60$ см. Найти построением кратчайшее расстояние от стороны ее основания до противоположного ей бокового ребра пирамиды и вычислить это расстояние.

13. В правильной треугольной пирамиде прямые, соединяющие середины двух непараллельных ребер, пересекаются в одной точке. Доказать.

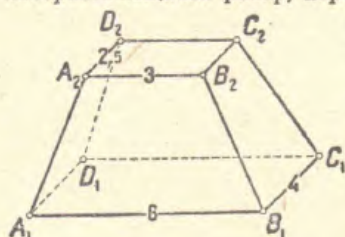


Рис. 129.

14. Площади оснований усеченной пирамиды Q и q , высота h . На каком расстоянии от меньшего основания следует провести параллельное ему сечение, чтобы площадь его равнялась: 1) среднему арифметическому площадей оснований и 2) среднему геометрическому площадей оснований?

15. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Будет ли пирамида правильным многогранником?

16. Из одной вершины куба проведены три диагонали боковых граней куба и концы их соединены. Получившийся четырехгранник — правильный. Доказать.

17. Центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра. Доказать.

18. Параллельные основания шестигранника (рис. 129) — прямоугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$; стороны прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равны 6 см и 4 см, а стороны прямоугольника $A_2B_2C_2D_2$ равны 3 см и 2,5 см. Можно ли назвать этот шестигранник усеченной пирамидой?

VIII. ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ.

§ 1. Поверхность призмы и параллелепипеда.

1. Боковая поверхность призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней.

2. Теорема. Боковая поверхность наклонной призмы равна периметру перпендикулярного сечения, умноженному на боковое ребро.

Дано: Наклонная призма; периметр перпендикулярного или поперечного сечения ее $P_{\perp}$ и боковое ребро l (рис. 130).

Требуется доказать: $S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$.

Доказательство. Проведем плоскость $KLMNO$, перпендикулярную к ребру призмы; она перпендикулярна ко всем ребрам. Площадь грани $A_1B_1B_2A_2$ равна $KL \cdot l$, площадь грани $B_1C_1C_2B_2$ равна $LM \cdot l$ и т. д. Следовательно: $S_{бок} = KL \cdot l + LM \cdot l + MN \cdot l + NO \cdot l + OK \cdot l = (KL + LM + MN + NO + OK) l = P_{\perp} \cdot l$, где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения.

Следствие. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту, так как плоскость основания ее есть одновременно и перпендикулярное сечение, а боковое ребро l равно высоте.

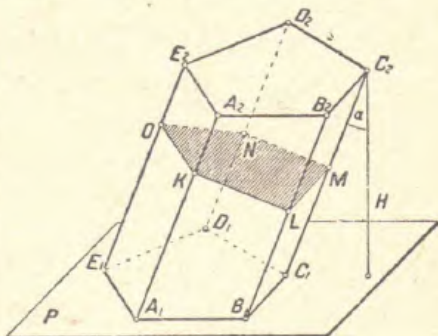


Рис. 130.

3. Задача. Вычислить площадь перпендикулярного сечения призмы, если даны: площадь основания Q и угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Угол α между плоскостью сечения и плоскостью основания наклонной призмы (рис. 130) равен углу между высотой пирамиды H и боковым ребром l , так как $l \perp KLMNO$ и $H \perp A_1B_1C_1D_1E_1$. Обозначив площадь основания через Q , а площадь перпендикулярного сечения через $Q_{\perp}$, имеем: $Q_{\perp} = Q \cdot \cos \alpha$, так как сечение $Q_{\perp}$ есть проекция основания Q на плоскость сечения.

4. Полная поверхность призмы равна боковой поверхности, увеличенной на сумму площадей ее оснований:

$$S_n = S_{\text{б}} + 2Q = P_{\perp} l + 2Q.$$

5. Параллелепипед есть четырехугольная призма, а потому поверхность его вычисляется так же, как и поверхность призмы. Если обозначить измерения прямоугольного параллелепипеда через a , b и c , то полная его поверхность:

$$S_n = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac).$$

6. Куб — правильная призма, а потому:

$S_{\text{б}} = 4a \cdot a = 4a^2$ и $S_n = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$, где a — ребро куба.

§ 2. Поверхность пирамиды.

1. Боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей всех ее боковых граней.

2. Теорема. Боковая поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания пирамиды на ее апофему.

Дано: Правильная n -угольная пирамида, периметр ее основания P и апофема b (рис. 131).

Требуется доказать: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot b$.

Доказательство. Пусть $SOAB$ — $\frac{1}{n}$ -ая часть n -угольной правильной пирамиды. Площадь боковой грани — треугольника SAB — равна $\frac{ab}{2}$, где $a = AB$ — сторона основания, а b — высота треугольника SAB , т. е. апофема пирамиды. Боковая поверхность пирамиды состоит из n треугольников, а потому

$S_{\text{бок}} = \frac{ab}{2} \cdot n$, но $a \cdot n = P$, а потому $S_{\text{бок}} = \frac{P \cdot b}{2}$.

3. Другая формула для боковой поверхности правильной пирамиды.

Обозначим угол наклона боковой грани SAB пирамиды к плоскости основания через α ; тогда площадь треугольника AOB , т. е. $S_{AOB} = \text{пл. } \triangle SAB \cdot \cos \alpha$ и

$$\text{пл. } \triangle SAB = \frac{\text{пл. } \triangle AOB}{\cos \alpha}.$$

Обозначим площадь основания пирамиды через Q , тогда $Q = \text{пл. } \triangle AOB \cdot n$ и

$$S_{\text{бок}} = \frac{\text{пл. } \triangle AOB}{\cos \alpha} \cdot n = \frac{Q}{\cos \alpha}, \text{ т. е.}$$



Рис. 131.

боковая поверхность правильной пирамиды равна площади ее основания, деленной на косинус угла наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания пирамиды.

Вообще, если все грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под одним и тем же углом α , то боковая поверхность пирамиды $S_{бок} = \frac{Q}{\cos \alpha}$.

4. Полная поверхность пирамиды $S_n = S_{бок} + Q = \frac{1}{2} Pb + Q$; пользуясь второй формулой для боковой поверхности пирамиды, имеем:

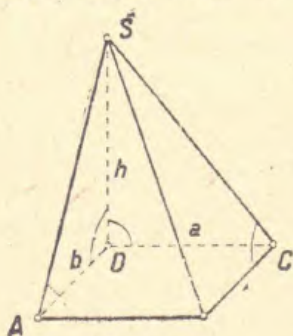


Рис. 132.

$$S_n = \frac{Q}{\cos \alpha} + Q = \frac{Q}{\cos \alpha} (1 + \cos \alpha) = \frac{2Q \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

5. Если пирамида неправильная, то для определения ее боковой поверхности нужно в отдельности вычислить площадь каждой грани, а затем найти сумму площадей всех ее боковых граней.

Задача. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами a и b ; высота пирамиды проходит через вершину прямоугольника основания и равна h . Найти поверхность пирамиды (рис. 132).

Решение. Пл. $\triangle SDC = \frac{1}{2} ah$; пл. $\triangle SDA = \frac{1}{2} bh$; пл. $\triangle SAB = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 + h^2}$ и пл. $\triangle SCB = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 + h^2}$, так как треугольники SAB и SCB — прямоугольные; $BC \perp SC$ и $AB \perp SA$ на основании теоремы о трех перпендикулярах. Значит:

$$\begin{aligned} S_{бок} &= \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh + \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 + h^2} + \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 + h^2} = \\ &= \frac{1}{2} [a(h + \sqrt{b^2 + h^2}) + b(h + \sqrt{a^2 + h^2})]; \\ S_n &= S_{бок} + ab. \end{aligned}$$

6. Боковая грань правильной усеченной пирамиды — равнобедренная трапеция. Обозначив стороны оснований пирамиды через a и b , периметры их через P и p , высоту боковой грани, или апофему, через h , имеем: площадь трапеции $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Если число граней правильной усеченной пирамиды n , то $S_{бок} = \frac{(a+b)}{2} h \cdot n = \frac{an+bn}{2} \cdot h = \frac{P+p}{2} \cdot h$, т. е.

боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна полусумме периметров оснований, умноженной на апофему.

Обозначив площади оснований через Q и q , находим:

$$S_n = S_{бок} + Q + q = \frac{P+p}{2} \cdot h + Q + q.$$

Если усеченная пирамида неправильная, то поверхность ее надо вычислить по частям, т. е. отдельно вычислить площадь каждой грани и найти сумму их площадей.

§ 3. Поверхности правильных многогранников.

1. Ребро правильного многогранника равно a . Поверхности правильных четырехгранника, восьмигранника и двадцатигранника образованы правильными треугольниками, площадь каждого из которых равна $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, а потому: 1) поверхность правильного тетраэдра:

$$S_4 = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3};$$

2) поверхность правильного октаэдра:

$$S_8 = 8 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2a^2 \sqrt{3};$$

3) поверхность правильного икосаэдра:

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 5a^2 \sqrt{3}.$$

2. Поверхность правильного гексаэдра, или куба, равна $6a^2$.

3. Чтобы вычислить поверхность правильного додекаэдра, надо сперва вычислить площадь его грани — правильного пятиугольника со стороной a . Площадь определяющего его треугольника равна $\frac{ah}{2}$, где h — апофема правильного пятиугольника. Но $h = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} 36^\circ$, а потому площадь треугольника равна $\frac{a^2 \operatorname{ctg} 36^\circ}{4}$, поверхность же двенадцатигранника:

$$S_{12} = 12 \cdot 5 \cdot \frac{a^2 \operatorname{ctg} 36^\circ}{4} = 15a^2 \operatorname{ctg} 36^\circ.$$

4. Поверхности всех неправильных многогранников, так же как по поверхности неправильных пирамид, вычисляются по частям.

Вопросы и упражнения.

1. Как изменится поверхность куба, если каждое его ребро увеличить в 2 раза? в 3 раза? в n раз?

2. Из всех прямоугольных параллелепипедов, сумма трех измерений которых равна 24, наименьшая поверхность у куба. Проверить, принимая, что ребра выражены в целых числах.

3. Как относятся поверхности двух кубов?

4. Диагональ куба равна d . Чему равна его поверхность?

5. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро призмы перпендикулярно к противоположной боковой грани, равна $Q = 5,2 \text{ м}^2$. Сторона основания призмы $a = 2,0 \text{ см}$. Найти полную поверхность призмы.

6. В наклонной треугольной призме две боковые грани образуют угол $\alpha = 60^\circ$; площади этих граней $q_1 = 5,0 \text{ м}^2$ и $q_2 = 8,0 \text{ м}^2$. Вычислить боковую поверхность призмы.

7. Площадь основания пирамиды $Q = 50 \text{ дм}^2$. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости ее основания под углом $\alpha = 60^\circ$. Найти боковую поверхность пирамиды.

8. Найти ребро правильного октаэдра, поверхность которого $S_8 = 57 \text{ см}^2$.

9. Площади оснований правильной усеченной пирамиды Q и q . Грани наклонены к плоскости основания под углом α . $S_{\text{бок}} = (Q - q) : \cos \alpha$. Доказать.

10. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды делится плоскостью, проведенной через вершину основания перпендикулярно к противоположному боковому ребру, пополам, если плоскость сечения делит ребро пополам. Доказать.

IX. ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ.

§ 1. Объем параллелепипеда.

1. За единицу измерения объема тела принимается куб, ребро которого равно какой-нибудь единице длины.

Куб, ребро которого $a=1$ см, называется кубическим сантиметром; при a , равном 1 м, имеем кубический метр и т. д. Сокращенные обозначения кубического сантиметра и кубического метра следующие: см^3 , м^3 .

Число, показывающее, сколько раз единица объема 1 см^3 , 1 м^3 и т. д. содержится в данном теле, называется объемом тела.

2. **Теорема.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Дано: Прямоугольный параллелепипед; его измерения a , b и c (рис. 133).

Требуется доказать: Объем параллелепипеда $V=abc$ куб. единиц.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) a , b и c — целые числа и 2) a , b и c — дробные числа.

1) Разделим ребро $A_1A_2=c$ на c равных частей, каждая из которых равна единице длины, и проведем через точки деления ребра A_1A_2 плоскости, параллельные основанию прямоугольного параллелепипеда. Эти плоскости разобьют параллелепипед A_1C_2 на c слоев; каждый слой — параллелепипед, размеры его $a \times b \times 1$. Разделив затем ребро $A_1B_1=a$ на a равных частей, проводим через точки деления A_1B_1 плоскости, параллельные боковой грани параллелепипеда; эти плоскости разобьют каждый слой на a параллелепипедов; размеры каждого $b \times 1 \times 1$. Разделив, наконец, ребро $B_1C_1=b$ на b равных частей, проводим через точки деления плоскости, параллельные передней грани параллелепипеда. Эти плоскости разделят каждый из параллелепипедов размером $b \times 1 \times 1$ на b равных кубов, каждое ребро которого равно единице длины. Таким образом, получим $a \cdot b \cdot c$ кубов, размеры которых $1 \times 1 \times 1$, а потому объем параллелепипеда содержит $a \cdot b \cdot c$ куб. единиц. Итак, объем параллелепипеда

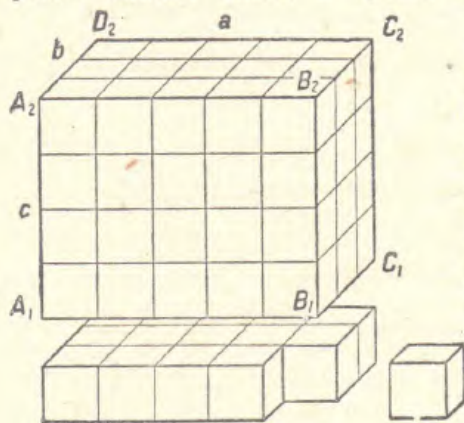


Рис. 133.

$$V=abc \text{ куб. единиц.}$$

2) Пусть a , b и c — дробные числа. Приведем их к общему знаменателю и пусть $a=\frac{a_1}{n}$, $b=\frac{b_1}{n}$ и $c=\frac{c_1}{n}$.

Приняв $\frac{1}{n}$ единицы длины за единицу измерения, разделим ребра прямоугольного параллелепипеда соответственно на a_1 , b_1 , c_1 , равных частей, тогда

$$V=a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = an \cdot bn \cdot cn = abc n^3.$$

Если каждое ребро куба, принятого за единицу измерения объема, разделить на n равных частей, то объем куба разделится на n^3 малых кубов, а потому n^3 малых кубов равны одной кубической единице; отсюда следует, что объем параллелепипеда $V = abc$ куб. единиц. Итак, и в этом случае объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

3. Поясним числовым примером случай, когда измерения a , b и c параллелепипеда — дробные числа.

Пусть $a = 2,25$ м, $b = 2,64$ м и $c = 3,25$ м. Ребра параллелепипеда выражены дробными числами. Чтобы найти объем данного параллелепипеда, выразим его измерения a , b и c в целых числах — в сантиметрах: тогда $a = 225$ см, $b = 264$ см и $c = 325$ см, и объем параллелепипеда равен $225 \cdot 264 \cdot 325$ см³, или $\frac{225}{100} \cdot \frac{264}{100} \cdot \frac{325}{100}$ м³, так как $1 \text{ см}^3 = \frac{1}{100^3} \text{ м}^3$,

$$V = 2,25 \cdot 2,64 \cdot 3,25 \text{ м}^3.$$

4. Если обозначить площадь основания прямоугольного параллелепипеда через $Q = ab$, а высоту его c через H , то имеем:

$$V = Q \cdot H \quad \text{куб. единиц.}$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Следствия. 1) Отношение объемов V_1 и V_2 двух прямоугольных параллелепипедов равно произведению отношения площадей Q_1 и Q_2 их оснований на отношение их высот H_1 и H_2 .

$$V_1 = Q_1 H_1 \text{ и } V_2 = Q_2 H_2, \text{ а потому } \frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 H_1}{Q_2 H_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{H_1}{H_2}.$$

2) Объемы двух параллелепипедов, площади оснований (высоты) которых равны, относятся как их высоты (площади оснований).

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{QH_1}{QH_2} = \frac{H_1}{H_2} \quad \text{и} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 H}{Q_2 H} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

3) Параллелепипеды с равновеликими основаниями и равными высотами имеют равные объемы.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{QH}{QH} = 1, \text{ откуда } V_1 = V_2.$$

5. Тела, объемы которых равны, называются равновеликими.

Два тела, которые при вложении друг в друга совпадают всеми своими частями, равны. Равные тела — равновелики.

§ 2. Объем прямой призмы.

1. Проведем в прямоугольном параллелепипеде (рис. 134) диагональное сечение $B_1 B_2 D_2 D_1$; оно разделит параллелепипед на две треугольные прямые призмы, высоты которых равны высоте параллелепипеда и основания которых — равные прямоугольные треугольники: $\triangle B_1 A_1 D_1 = \triangle B_1 C_1 D_1$. Вложим призму $B_1 C_1 D_1 B_2 C_2 D_2$ в призму $A_1 B_1 D_1 A_2 B_2 D_2$ так, чтобы совпали их основания $B_1 C_1 D_1$ и $B_1 A_1 D_1$, тогда ребра первой призмы пойдут по ребрам второй, так как они перпендикулярны к основанию; вследствие же равенства ребер ребро $C_1 C_2$ совпадет с ребром $A_1 A_2$, ребро

B_1B_2 — с ребром D_1D_2 и ребро D_1D_2 — с ребром B_1B_2 , а потому совпадут и вершины оснований $B_2A_2D_2$ и $B_2C_2D_2$, следовательно, и сами основания. Итак, призмы совпали — значит, они равны.

Прямоугольный параллелепипед делится диагональным сечением на две равные треугольные призмы.

2. Теорема. Объем прямой треугольной призмы, основание которой — прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания призмы на ее высоту.

Дано: В прямой треугольной призме $A_1B_1D_1A_2B_2D_2$ основание — прямоугольный треугольник, площадь которого Q ; высота призмы H (рис. 134).

Требуется доказать: Объем призмы $V = Q \cdot H$.

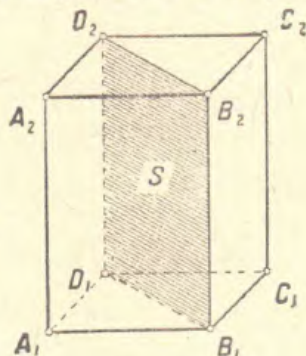


Рис. 134.

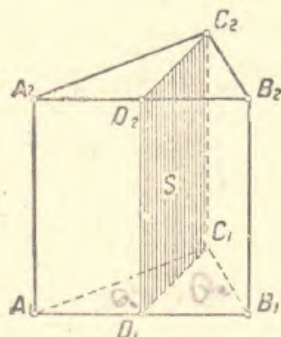


Рис. 135.

Доказательство. Проведем через ребро D_1D_2 треугольной призмы $A_1B_1D_1A_2B_2D_2$ плоскость, параллельную плоскости ее грани $A_1B_1B_2A_2$, и через ребро B_1B_2 — плоскость, параллельную грани $A_1D_1D_2A_2$. Эти плоскости пересекут плоскость одного основания по прямым D_2C_2 и B_2C_2 , а плоскость другого основания по прямым D_1C_1 и B_1C_1 ; получится прямоугольный параллелепипед, площадь основания которого $2Q$ и высота H . Объем параллелепипеда равен $2Q \cdot H$, следовательно, объем призмы, составляющей половину параллелепипеда,

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2QH = Q \cdot H.$$

3. Теорема. Объем прямой треугольной призмы равен произведению площади основания призмы на ее высоту.

Дано: В прямой треугольной призме площадь основания Q и высота H (рис. 135).

Требуется доказать: Объем призмы: $V = Q \cdot H$.

Доказательство. Проведем в призме через ребро C_1C_2 перпендикулярно к противоположащей ему грани сечение $D_1C_1C_2D_2$; оно разделит данную призму на две треугольные призмы, основания которых — прямоугольные треугольники. Обозначив площади их оснований через Q_1 и Q_2 и объемы их через V_1 и V_2 , получим:

$$V_1 = Q_1 \cdot H \quad \text{и} \quad V_2 = Q_2 \cdot H,$$

а потому

$$V = V_1 + V_2 = Q_1H + Q_2H = (Q_1 + Q_2)H = QH,$$

где

$$Q_1 + Q_2 = Q.$$

Следствия. 1) Объем многоугольной прямой призмы равен произведению площади основания призмы на ее высоту.

Проведем в призме (рис. 136) диагональные сечения; они разобьют ее на ряд треугольных призм. Обозначив объемы их через $V_1, V_2, V_3, \dots$, площади их оснований через $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, объем многоугольной прямой призмы через V , площадь ее основания через Q , получим:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots = Q_1 H + Q_2 H + Q_3 H + \dots = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots) H = QH.$$

2) Отношение объемов прямых призм равно произведению отношения площадей их оснований на отношение их высот.

$$V_1 = Q_1 H_1 \quad \text{и} \quad V_2 = Q_2 H_2,$$

а потому

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 H_1}{Q_2 H_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{H_1}{H_2}.$$

3) Объемы двух прямых призм, имеющих равные высоты (или равновеликие основания), относятся как площади их оснований (или как их высоты).

$$V_1 = Q_1 H \left\{ \frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 H}{Q_2 H} = \frac{Q_1}{Q_2} \right. \quad \text{и} \quad V_1 = QH_1 \left\{ \frac{V_1}{V_2} = \frac{QH_1}{QH_2} = \frac{H_1}{H_2}.$$

4) Прямые призмы с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.

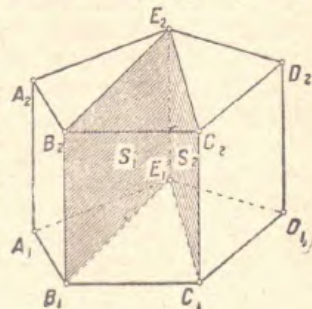


Рис. 136.

§ 3. Объем наклонной призмы.

1. Теорема. Наклонная призма равновелика прямой призме, основание которой — перпендикулярное сечение, а высота — ребро данной призмы.

Дано: В наклонной призме ребро $A_1 A_2 = l$, $GHJKLM$ — перпендикулярное сечение (рис. 137).

Требуется доказать: Наклонная призма равновелика прямой призме, основание которой — перпендикулярное сечение $GHJKLM$ и высота — ребро данной призмы.

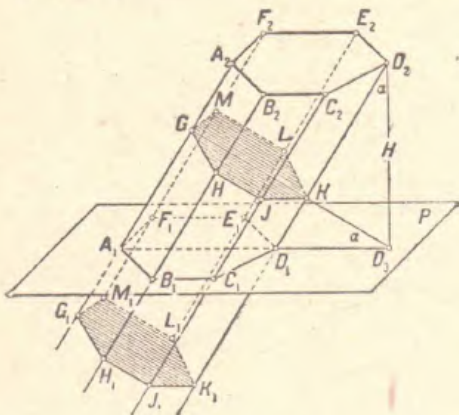


Рис. 137.

Доказательство. Дана наклонная шестиугольная призма (рис. 137); для упрощения рисунка взята призма, большее диагональное сечение которой перпендикулярно к горизонтальной плоскости основания. Продолжим ребра призмы: 1) $A_2 A_1$ на отрезок $A_1 G_1 = A_2 G$; 2) $B_2 B_1$ на отрезок $B_1 H_1 = B_2 H$; 3) $C_2 C_1$ на отрезок $C_1 J_1 = C_2 J$ и т. д. и соединим затем точки G_1, H_1, J_1, K_1, L_1 и M_1 прямыми. Шестиугольник $G_1 H_1 J_1 K_1 L_1 M_1 \parallel GHJKLM$, и оба

сечения равны: они являются основаниями прямой призмы, ребро которой $GG_1 = GA_1 + A_1 G_1 = GA_1 + GA_2 = A_2 A_1 = l$, ребру наклонной призмы.

Данная наклонная призма и полученная прямая призма имеют общую часть — восьмигранник, заключенный между плоскостями $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и $GHJKLM$. Часть GD_2 наклонной призмы равна части G_1D_1 прямой призмы. В самом деле, вложим многогранник GD_2 в многогранник G_1D_1 так, чтобы основание $GHJKLM$ совпало с основанием $G_1H_1J_1K_1L_1M_1$, тогда ребра обоих многогранников совпадут, так как они перпендикулярны к плоскостям оснований и равны; совпадут и сечения $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, следовательно, совпадут и многогранники GD_2 и G_1D_1 , а потому они равны.

Итак, обе призмы — наклонная и прямая, основания которой — перпендикулярные сечения, состоят из равных многогранников, а потому их объемы равны.

Следствие. Объем наклонной призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения $Q_{\perp}$ на боковое ребро l .

Объем прямой призмы, равновеликой данной наклонной, равен $Q_{\perp} \cdot l$; следовательно, и объем наклонной призмы

$$V = Q_{\perp} \cdot l \text{ куб. единиц.}$$

2. Теорема. Объем наклонной призмы равен произведению площади ее основания Q на высоту H призмы.

Дано: Q — площадь основания призмы и H — ее высота (рис. 137).

Требуется доказать: Объем призмы $V = Q \cdot H$.

Доказательство. Пусть угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы α , тогда и угол между высотой H и ребром l призмы равен α . Но сечение призмы есть проекция ее основания на плоскость сечения, а потому

$$Q_{\perp} = Q \cdot \cos \alpha.$$

С другой стороны, имеем из прямоугольного треугольника $D_1D_3D_2$ $H = l \cos \alpha$; следовательно,

$$V = Q_{\perp} \cdot l = Q \cdot \cos \alpha \cdot l = Q \cdot l \cos \alpha = Q \cdot H.$$

§ 4. Объем пирамиды.

1. Теорема. Объем треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Дано: Треугольная пирамида $SABC$; площадь ее основания Q , высота H (рис. 138).

Требуется доказать: Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} Q \cdot H$.

Доказательство. Проведем через середину высоты H пирамиды $SABC$ параллельно основанию ABC сечение KLM , а затем $LL_1 \parallel SA$ и $MM_1 \parallel SA$; соединив L_1 с M_1 , получим треугольную призму AM . Если провести еще $MN \parallel SB$ и соединить N с M_1 , то получим вторую треугольную призму BM .

Итак, данная треугольная пирамида $SABC$ состоит из двух треугольных призм AM и BM и двух пирамид $SKLM$ и MM_1NC , а потому объем данной пирамиды $SABC$ равен сумме объемов двух выделенных в ней призм и двух малых пирамид.

Вычислим объем призм.

Высота призмы AM равна $\frac{H}{2}$; основанием ее служит треугольник $AL_1M_1 = KLM$, площадь которого равна $\frac{Q}{4}$ как площадь параллельного сечения пирамиды, отстоящего на расстоянии $\frac{H}{2}$ от вершины пирамиды. Объем V_1 призмы AM равен $\frac{Q}{4} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{8} QH$. Вторая призма BM равна половине параллелепипеда с основанием BL_1M_1N , площадь которого $\frac{Q}{2}$, и высоту $\frac{H}{2}$, а потому ее объем равен $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{8} Q \cdot H = V_1$. Обе выделенные из данной пирамиды призмы равновелики; их сумма

$$S_1 = \frac{1}{8} QH \cdot 2 = \frac{1}{4} QH.$$

Итак, сумма объемов двух призм, выделенных из данной пирамиды указанным выше построением, равна одной четверти произведения площади основания данной пирамиды на ее высоту.

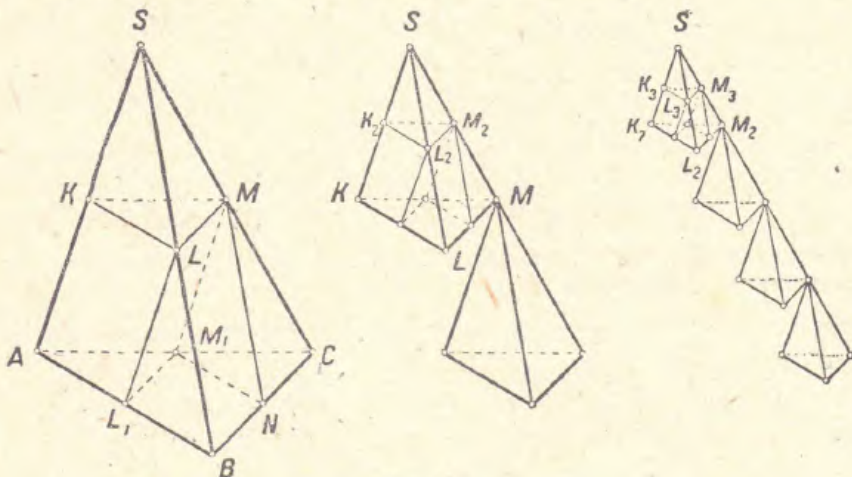


Рис. 138.

Рассмотрим оставшиеся две малые пирамиды: $SKLM$ и MM_1NC . Их основаниями служат равные треугольники KLM и M_1NC ; площадь каждого из них равна $\frac{Q}{4}$; высоты этих пирамид также равны и каждая из них равна $\frac{H}{2}$. Выделим, как и в пирамиде $SABC$, в каждой из них по две равновеликие призмы. Сумма объемов двух призм, выделенных в одной из пирамид ($SKLM$), равна одной четверти произведения площади основания этой пирамиды на ее высоту, т. е. $\frac{1}{4} \cdot \frac{Q}{4} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{32} QH$.

Сумма объемов двух призм, выделенных в другой пирамиде (MM_1NC), тоже равна $\frac{1}{32}QH$, а потому сумма S объемов четырех призм, выделенных из двух малых пирамид:

$$S_2 = \frac{1}{32} Q \cdot H \cdot 2 = \frac{1}{16} QH = \frac{1}{4^2} QH.$$

После выделения из двух малых пирамид четырех призм, сумма объемов которых равна $\frac{1}{4^2}QH$, остались еще четыре пирамиды; площадь основания каждой из этих пирамид равна $\frac{Q}{16}$, а высота каждой $\frac{1}{4}H$.

Применяя снова к каждой из этих четырех пирамид те же построения, какие были выполнены в пирамиде $SABC$, найдем, что сумма объемов двух призм, выделенных в каждой из четырех малых пирамид, равна одной четверти произведения площади основания пирамиды на ее высоту, т. е.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{Q}{16} \cdot \frac{H}{4} = \frac{1}{256} QH.$$

Сумма же объемов всех восьми призм, выделенных из четырех пирамид:

$$S_3 = 4 \cdot \frac{1}{256} QH = \frac{1}{64} QH = \frac{1}{4^3} QH.$$

Продолжая вычисления и дальше, найдем:

$$S_4 = \frac{1}{4^4} QH; \quad S_5 = \frac{1}{4^5} QH; \dots; \quad S_n = \frac{1}{4^n} QH.$$

Суммируя объемы призм, получаемых повторными построениями из данной пирамиды $SABC$, имеем:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n &= \frac{1}{4} QH + \frac{1}{4^2} QH + \dots + \frac{1}{4^n} QH = \\ &= \frac{1}{4} QH \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Получившийся в скобках ряд есть бесконечно убывающая кратная прогрессия; предел суммы n членов этого ряда при $n \rightarrow \infty$ вычисляется по формуле $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{u}{1-q}$, где S_n —сумма n членов прогрессии и u —первый ее член, q —постоянное прогрессии, или ее знаменатель.

В данном случае $u = 1$, $q = \frac{1}{4}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Объем пирамиды есть предел суммы объемов рассмотренных нами призм, а потому, переходя к пределу, имеем:

$$\begin{aligned} V_{nup} &= \lim \frac{1}{4} QH \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} QH \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{1}{4} QH \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} QH, \end{aligned}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3} QH} \quad \text{куб. ед.}$$

2. Метод доказательства, которым мы пользовались при выводе формулы объема пирамиды, называется методом исчерпывания, и в таком виде формулу впервые вывел один из величайших математиков древности Архимед.

Следствие 1. Объем многоугольной пирамиды равен произведению одной трети площади ее основания на высоту.

Многоугольную пирамиду диагональными сечениями разбиваем на треугольные пирамиды (рис. 139), основания которых лежат в плоскости основания данной пирамиды и высота которых — общая с высотой данной пирамиды. Обозначив площади оснований треугольных пирамид через $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ и площадь основания данной пирамиды через Q , имеем:

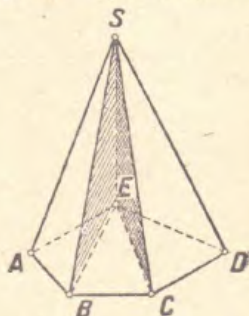


Рис. 139.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} Q_1 H + \frac{1}{3} Q_2 H + \frac{1}{3} Q_3 H + \dots = \\ = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots) H = \frac{1}{3} QH.$$

Следствие 2. 1) Отношение объемов двух пирамид равно произведению отношения их площадей оснований на отношение их высот.

2) Объемы двух пирамид с равновеликими основаниями (или равными высотами) относятся как их высоты (или как их площади оснований).

3) Пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} Q_1 H_1 \\ V_2 = \frac{1}{3} Q_2 H_2 \end{cases} \left\{ \begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{1}{3} Q_1 H_1}{\frac{1}{3} Q_2 H_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{H_1}{H_2}; \\ \frac{V_1}{V_2} &= \frac{QH_1}{QH_2} = \frac{H_1}{H_2}; \end{aligned} \right. \\ 2) \quad & \frac{V_1}{V_2} = \frac{QH_1}{QH_2} = \frac{H_1}{H_2}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 H}{Q_2 H} = \frac{Q_1}{Q_2}; \\ 3) \quad & \frac{V_1}{V_2} = \frac{QH}{QH} = 1; \quad V_1 = V_2. \end{aligned}$$

§ 5. Объем усеченной пирамиды.

Теорема. Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех полных пирамид, имеющих высоту, равную высоте усеченной пирамиды, а основаниями: одна — одно из оснований усеченной пирамиды, другая — другое основание усеченной пирамиды и третья — среднее пропорциональное обоих оснований усеченной пирамиды.

Дано: Усеченная пирамида; Q и q — площади оснований усеченной пирамиды; h — ее высота (рис. 140).

Требуется доказать: Объем усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} (Q + q + \sqrt{Qq}) h$.

Доказательство. Объем усеченной пирамиды V есть разность объемов двух полных пирамид $SA_1B_1C_1D_1$ и $SA_2B_2C_2D_2$, высоты которых H и x , причем $H = x + h$ и $x = H - h$.

$$V_{\text{ус. пир}} = \frac{1}{3} QH - \frac{1}{3} qx = \frac{1}{3} QH - \frac{1}{3} q(H - h).$$

Но

$$\frac{Q}{q} = \frac{H^2}{(H - h)^2},$$

или

$$\frac{H}{H-h} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{h\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}},$$

а потому

$$\begin{aligned} V_{\text{ус. пир}} &= \frac{1}{3}QH - \frac{1}{3}q(H-h) = \frac{1}{3}(Q-q)H + \frac{1}{3}qh = \\ &= \frac{1}{3}(Q-q) \cdot \frac{h\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}} + \frac{1}{3}qh = \frac{1}{3}(\sqrt{Q}+\sqrt{q})(\sqrt{Q}-\sqrt{q}) \cdot \frac{h\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}} + \\ &+ \frac{1}{3}qh = \frac{1}{3}(\sqrt{Q}+\sqrt{q})h\sqrt{Q} + \frac{1}{3}qh = \frac{1}{3}Qh + \frac{1}{3}h\sqrt{Qq} + \frac{1}{3}qh, \end{aligned}$$

или

$$V_{\text{ус. пир}} = \frac{1}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})h \quad \text{куб. ед.}$$

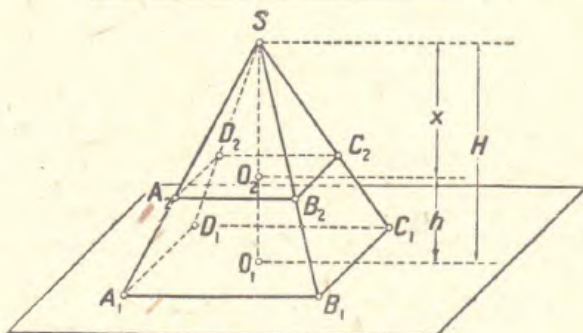


Рис. 140.

§ 6. Теорема Кавальери и ее применение к вычислению объемов многогранников.

1. Вырежем из плотного картона n прямоугольников одинакового размера и сложим их в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 141). Каждый из прямоугольников представляет собой малый параллелепипед, высота которого равна толщине картона; объем же прямоугольного параллелепипеда, сложенного из этих прямоугольников, есть сумма объемов n малых параллелепипедов.

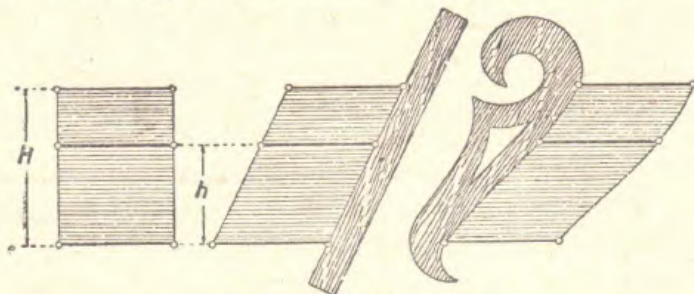


Рис. 141.

Если приложить линейку к одной из граней большого параллелепипеда и затем сдвинуть ею малые параллелепипеды, то получим тело, похожее на наклонный параллелепипед; оно состоит из того же числа n малых параллелепипедов, из которых составлен прямоугольный параллелепипед.

Объем этого наклонного параллелепипеда есть также сумма объемов n малых параллелепипедов.

Если переместить малые параллелепипеды так, как указано на рисунке 141 справа, то вновь полученное тело равновелико и прямоугольному и наклонному параллелепипедам.

Понятно, что ступенчатые грани у тел, полученных перемещением малых параллелепипедов, будут тем более сглаживаться, чем меньше высота каждого малого параллелепипеда.

Указанные выше тела имеют равные основания, равные высоты и, следовательно, заключены между параллельными плоскостями; всякие сечения тел, параллельные основанию и отстоящие от их оснований на одинаковом расстоянии, равны.

2. Подобного рода рассуждения привели итальянского математика Кавальери (1591—1647) к выводу, составляющему теорему его имени.

Теорема Кавальери. Два тела, основания которых лежат в одной плоскости и высоты которых равны, равновелики, т. е. имеют равные объемы, если равновелики их сечения, проведенные на одинаковой высоте параллельно плоскостям оснований.

Рассуждения, приведенные выше, подтверждают правильность теоремы Кавальери, но не доказывают ее. Строгое доказательство теоремы дается в курсе высшей математики, в разделе интегрального исчисления.

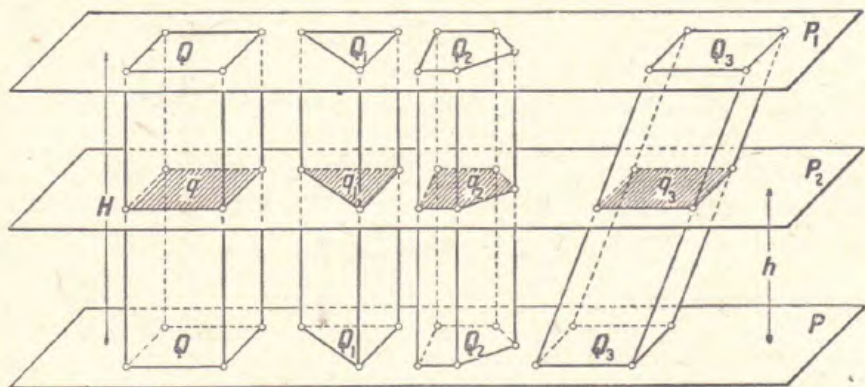


Рис. 142.

3. **Теорема.** Объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Дано: Площади оснований призм: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$;
высота призм H (рис. 142).

Требуется доказать: $V = Q \cdot H$.

Доказательство. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания Q на высоту H , т. е. $Q \cdot H$. Имеем (рис. 142) прямоугольный параллелепипед, прямую треугольную призму, многоугольную прямую призму и наклонную призму, основания которых лежат в параллельных плоскостях P и P_1 и площади оснований которых согласно условию равны, т. е. $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$; расстояние между параллельными плоскостями P и P_1 равно H — высоте каждой из призм.

Проведем плоскость P_2 , параллельную плоскости P , на расстоянии h от нее. Эта плоскость P_2 дает сечение призм, площади которых обозначим через q, q_1, q_2, q_3 . Сечения эти, как параллельные основаниям, соответственно равны основаниям призм; следовательно, $q = q_1 = q_2 = q_3$, так как $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$. Итак, условия теоремы Кавальери соблюдены, а потому $V_1 = V_2 = V_3 = V = Q \cdot H$.

4. **Теорема.** Объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади основания пирамиды на ее высоту.

Дано: Площади оснований пирамид $Q = Q_1 = Q_2$;
высота пирамид H (рис. 143).

Требуется доказать: $V = \frac{1}{3} Q \cdot H$.

Доказательство. Объем треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3} QH$. Имеем (рис. 143) треугольную и две многоугольные пирамиды, основания которых лежат на плоскости P , а вершины их в плоскости $P_1 \parallel P$; площади их оснований согласно условию равны: $Q = Q_1 = Q_2$, расстояние H между параллельными плоскостями равно высоте каждой из пирамид.

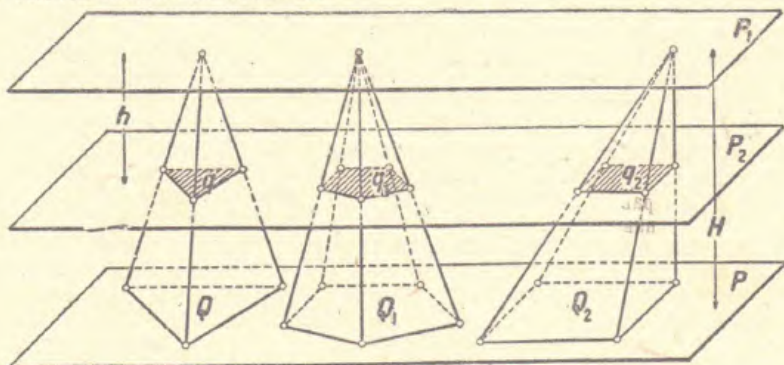


Рис. 143.

Проводим плоскость $P_2 \parallel P_1$ на расстоянии h от P_1 . Эта плоскость P_2 дает сечения пирамид, площади которых обозначим через q, q_1, q_2 . Площади этих сечений, как параллельных основанию и отстоящих от вершины на одинаковом расстоянии, равновелики, т. е. $q = q_1 = q_2$.

Условия теоремы Кавальери соблюдены, а потому пирамиды равновелики и

$$V_1 = V_2 = V = \frac{1}{3} QH.$$

Вопросы и упражнения.

1. Как изменится объем прямоугольного параллелепипеда, если все линейные размеры его увеличить или уменьшить в n раз?
2. Площадь боковых граней прямой треугольной призмы $S_1 = 2,0 \text{ м}^2$, $S_2 = 6,2 \text{ м}^2$ и $S_3 = 7,5 \text{ м}^2$, площадь основания $Q = 6 \text{ м}^2$. Найти объем призмы.
3. В наклонной треугольной призме стороны основания $a = 5 \text{ см}$, $b = 6 \text{ см}$ и $c = 9 \text{ см}$; боковое ребро $l = 10 \text{ см}$ составляет с плоскостью основания $\angle \alpha = 45^\circ$. Найти объем призмы.
4. Объем призмы, основаниями которой служат трапеции, равен произведению среднего арифметического из площадей параллельных граней на расстояние между ними. Доказать.
5. Чугунная колонна, поперечное сечение которой — квадрат, имеет ширину, равную 20 см , при толщине стенок $4,0 \text{ см}$. Найти вес 1 погонного метра колонны (удельный вес $7,3$).
6. Могут ли все ребра правильной шестиугольной пирамиды быть равными?
7. Каждое ребро правильной треугольной (четырёхугольной) пирамиды равно a . Найти объем пирамиды.
8. Объем правильной пирамиды $V = 12,3 \text{ м}^3$, сторона квадратного основания $a = 1,90 \text{ м}$. Вычислить высоту пирамиды (сначала в общем виде).
9. Мраморная колонна имеет форму правильной шестиугольной призмы, увенчанной правильной пирамидой. Найти вес P колонны, если известно, что сторона ее основания $a = 0,50 \text{ м}$, высота ее $2,3 \text{ м}$, высота пирамидальной части $0,30 \text{ м}$ (удельный вес мрамора $2,85$).
10. Как изменится объем пирамиды, если высоту ее увеличить вдвое? втрое? в n раз?
11. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 144) разрезана на 3 пирамиды (треугольные). Вычислить объем призмы, если известно, что $AB = 3 \text{ см}$, $BC = 4 \text{ см}$ и $AC = 5 \text{ см}$, а $H = 10 \text{ см}$. Вычислить объемы пирамид B_1ABC , $CA_1B_1C_1$ и B_1A_1AC , вычислив предварительно объем четырехугольной пирамиды $B_1ACC_1A_1$. Сравнить между собой эти объемы.

12. На каком расстоянии от основания пирамиды параллельно ему надо провести плоскость, чтобы она делила объем пирамиды пополам? Высота пирамиды h .

13. Боковая поверхность пирамиды делится плоскостью, параллельной основанию, пополам. В каком отношении той же плоскостью делится объем пирамиды?

14. Гранитная подставка в форме правильной четырехугольной усеченной пирамиды высотой $h = 3,6$ м имеет стороны оснований $a = 2,8$ м и $b = 2,0$ м. Найти вес подставки (удельный вес гранита 2,7).

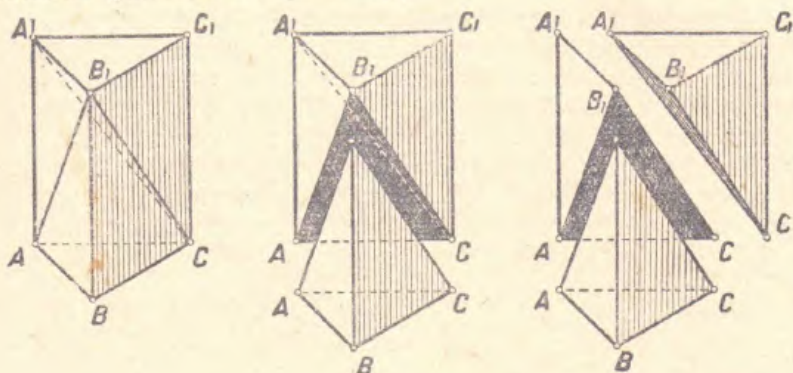


Рис. 144.

15. Массивная железная наковальня с квадратными основаниями, стороны которых $a = 60,0$ см и $b = 40,0$ см, представляет собою правильную усеченную пирамиду. Ребра ее наклонены к плоскости основания под углом $\alpha = 45^\circ$. Найти вес наковальни (удельный вес 7,80).

Х. ЦИЛИНДР.

§ 1. Цилиндрическая поверхность. Виды цилиндров.

1. В пространстве дана замкнутая кривая линия MN и пересекающая ее прямая линия AB (рис. 145). Если перемещать данную прямую AB так, чтобы она скользила по данной кривой MN , все время оставаясь параллельной своему первоначальному положению, то она опишет при непрерывном своем перемещении поверхность, называемую цилиндрической.

Прямая AB — образующая, кривая MN — направляющая цилиндрической поверхности. Прямые, проведенные параллельно данной образующей прямой и пересекающие направляющую линию MN , являются также образующими цилиндрической поверхности.

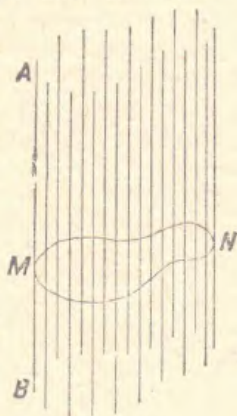


Рис. 145.

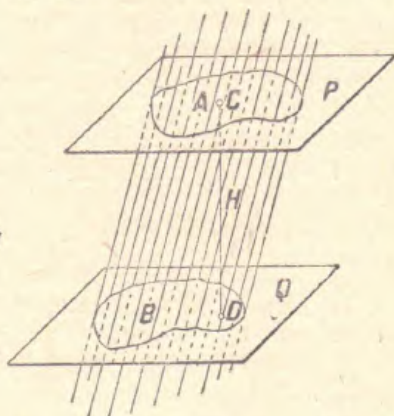


Рис. 146.

2. Пересечем цилиндрическую поверхность под некоторым углом к ее образующей двумя параллельными плоскостями P и Q (рис. 146).

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя пересекающими ее параллельными плоскостями, называется цилиндром.

Параллельные сечения A и B цилиндра называются его основаниями, а кривая поверхность — его боковой поверхностью. Расстояние CD между плоскостями оснований называется высотой цилиндра и обычно обозначается буквой H ; $CD = H$.

3. Цилиндр называется прямым (рис. 147), если его образующие перпендикулярны к плоскостям оснований; если же образующие не перпендикулярны к плоскостям оснований цилиндра, то цилиндр называется наклонным (рис. 148).

Цилиндр, основаниями которого служат круги, называется круговым цилиндром (рис. 147). Прямой круговой цилиндр обычно называется просто цилиндром. Прямая OO_1 , соединяющая центры оснований кругового цилиндра, называется его осью.

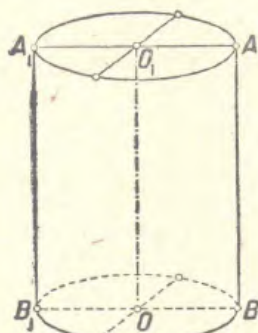


Рис. 147.

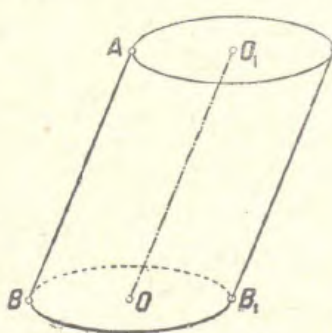


Рис. 148.

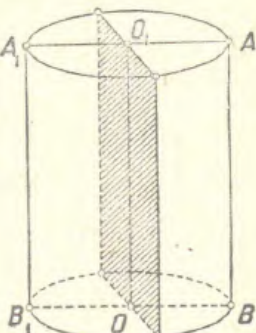


Рис. 149.

4. Прямой круговой цилиндр может быть получен вращением прямоугольника $ABOO_1$ (рис. 149) вокруг одной из его сторон, положим OO_1 , как вокруг оси. Сторона AB прямоугольника, параллельная оси вращения, описывает при вращении цилиндрическую поверхность, стороны O_1A и OB описывают равные между собою круги — основания цилиндра и служат радиусами этих кругов; основания цилиндра перпендикулярны к его оси.

Ось OO_1 цилиндра равна его образующей AB , $OO_1 = AB$, и одновременно является его высотой: $OO_1 = AB = H$.

Прямой круговой цилиндр есть тело вращения.

§ 2. Сечения цилиндра.

1. Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось OO_1 (рис. 149), представляет собою прямоугольник ABB_1A_1 и называется осевым сечением; две стороны AB и A_1B_1 сечения являются образующими цилиндра; они параллельны оси и равны ей, две другие — AA_1 и BB_1 — диаметры оснований цилиндра.

Осевое сечение ABB_1A_1 рассекает цилиндр на две равные части, симметричные относительно плоскости сечения и оси цилиндра.

Все осевые сечения цилиндра равны.

Если осевое сечение цилиндра — квадрат, то цилиндр называется равносторонним. В равностороннем цилиндре диаметр основания равен образующей цилиндра.

2. Всякое сечение цилиндра плоскостью, не проходящей через его ось, ей параллельной и отстоящей от оси на расстоянии, меньшем радиуса цилиндра, — также прямоугольник, две стороны которого — образующие, две другие — равные хорды оснований цилиндра (рис. 150).

3. Всякая плоскость, параллельная оси цилиндра и отстоящая от нее на расстоянии, равном радиусу цилиндра, имеет с поверхностью цилиндра только одну общую прямую — образующую цилиндра, например образующую AB (рис. 150). Такая плоскость называется касательной плоскостью и образующая AB — линией прикосновения касательной плоскости к поверхности цилиндра.

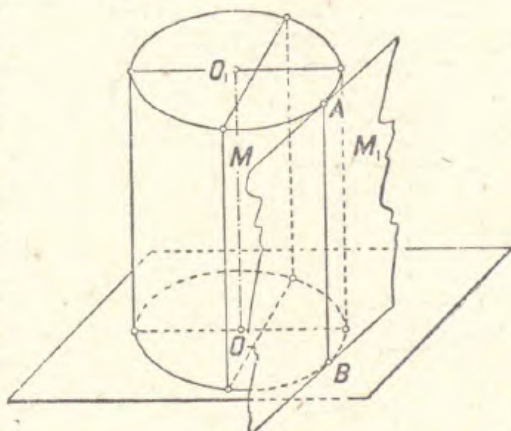


Рис. 150.

4. Всякое сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию и, следовательно, перпендикулярной к оси цилиндра и его образующим, есть круг, равный основанию цилиндра (рис. 151 и 151a¹). Сечение цилиндра плоскостью, проведенной под некоторым углом к плоскости его основания,

или, что то же самое, к его оси, представляет собою криволинейную фигуру $CEDF$ (рис. 151), называемую эллипсом. Проекция эллипса $CEDF$ на плоскость основания цилиндра дает круг, равный основанию $CMNA_1$: пр. $CEDF = CMA_1N$.

Полученное равенство используется для вычисления площади эллипса.

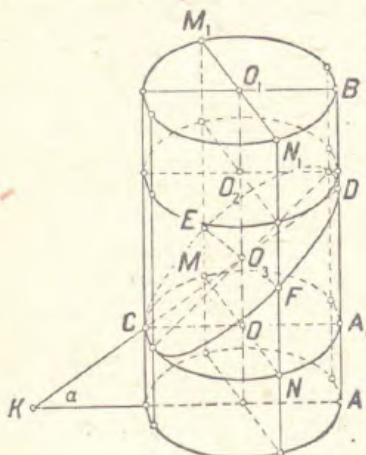


Рис. 151.

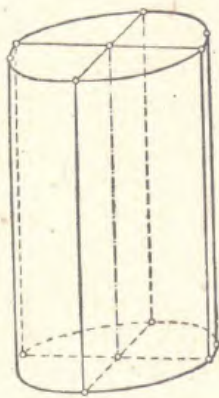


Рис. 151a.

§ 3. Развертка прямого кругового цилиндра.

Дан прямой круговой цилиндр ABB_1A_1 (рис. 152). Если разрежем вдоль по одной из образующих, например AB , его поверхность и развернем ее затем на плоскости, то получим прямоугольник $ABDC$,

¹) На рисунке 151a цилиндр изображен в так называемой кабинетной проекции с углом сокращения $\varphi = 45^\circ$ и коэффициентом сокращения $k = 0,5$ (см. гл. XIV). Для тел вращения обычно применяют изометрическую проекцию, в каковой изображены рисунок 151 и остальные тела вращения.

который представляет собою развертку боковой поверхности цилиндра. Одна из сторон прямоугольника — сторона BD — равна длине окружности основания цилиндра, другая его сторона равна образующей, или высоте цилиндра. Если присоединить к прямоугольнику $ABDC$ еще два круга — основания цилиндра, то получится развертка полной поверхности цилиндра.

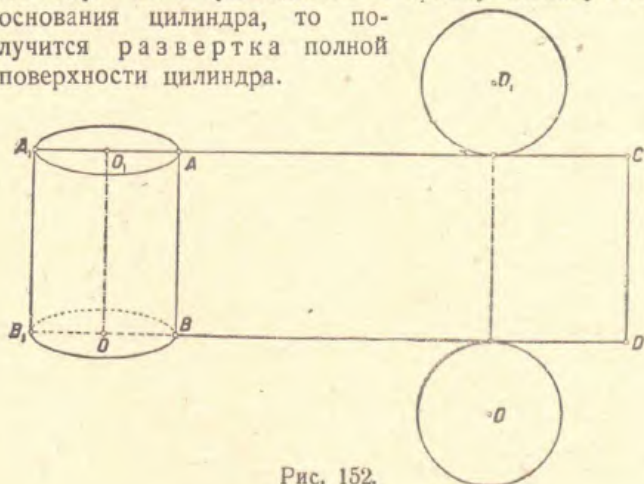


Рис. 152.

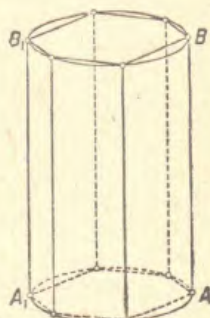


Рис. 153.

§ 4. Поверхность цилиндра.

1. Если вписать в основания цилиндра правильные одноименные и одинаково расположенные многоугольники и соединить соответствующие вершины многоугольников прямыми, то получится очертание правильной вписанной призмы; ребра этой призмы являются одновременно образующими цилиндра. Боковые грани правильной описанной призмы касаются поверхности цилиндра, и линии касания являются образующими цилиндра.

2. Боковая поверхность цилиндра равна пределу, к которому стремится боковая поверхность вписанной в цилиндр или описанной правильной призмы при неограниченном удвоении числа их граней (рис. 153).

3. Теорема. Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности его основания на высоту.

Доказательство. Пусть в цилиндр ABB_1A_1 (рис. 153) вписана правильная n -угольная призма, периметр основания которой P_n и высота H , равная высоте цилиндра; боковая поверхность призмы равна:

$$S_{\text{бок. пр}} = P_n \cdot H.$$

При неограниченном удвоении числа граней призмы периметр P_n ее основания стремится к пределу — длине C окружности основания цилиндра; боковая же поверхность призмы стремится к пределу — к боковой поверхности цилиндра. Таким образом, переходя к пределу, имеем:

$$\lim S_{\text{бок. пр}} = \lim (P_n \cdot H) = \lim P_n \cdot \lim H,$$

но $\lim S_{\text{бок. пр}} = S_{\text{цил}}$; $\lim P_n = C$ и $\lim H = H$ цилиндра, так как высота H призмы остается без изменения, а потому:

$$S_{\text{бок. цил}} = C \cdot H = 2\pi RH$$

или:

$$S_{\text{бок. цил}} = \pi DH$$

кв. единиц.

Следствие 1. Отношение боковых поверхностей цилиндров равно произведению отношения радиусов их оснований на отношение высот цилиндров. Имеем:

$$S_1 = 2\pi R_1 H_1 \quad \text{и} \quad S_2 = 2\pi R_2 H_2,$$

откуда:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R_1 H_1}{2\pi R_2 H_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{H_1}{H_2}.$$

4. Полная поверхность цилиндра получится, если к его боковой поверхности прибавить площади его оснований, каждая из которых равна πR^2 . Итак, имеем:

$$S_{\text{п. цил.}} = 2\pi R H + 2\pi R^2 = 2\pi R (H + R) \quad \text{кв. единиц.}$$

5. Два цилиндра называются подобными, если они получены вращением подобных прямоугольников вокруг соответствующих сторон (рис. 154).

В подобных цилиндрах сходственные линейные элементы пропорциональны, т. е.:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Следствие 2. Боковые или полные поверхности подобных цилиндров относятся как квадраты радиусов их оснований или как квадраты высот цилиндров.

1) Имеем:

$$S_1 = 2\pi R_1 H_1 \quad \text{и} \quad S_2 = 2\pi R_2 H_2,$$

откуда:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{H_1}{H_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{H_1^2}{H_2^2}.$$

2) Имеем:

$$S_1 = 2\pi R_1 (R_1 + H_1) \quad \text{и} \quad S_2 = 2\pi R_2 (R_2 + H_2),$$

откуда:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R_1 (R_1 + H_1)}{2\pi R_2 (R_2 + H_2)} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1 + H_1}{R_2 + H_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{H_1^2}{H_2^2}.$$

6. Полная поверхность равностороннего цилиндра в 1,5 раза больше его боковой поверхности. Доказать.
В равностороннем цилиндре $H = 2R$.

$$S_6 = 2\pi R H = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2;$$

$$S_n = 2\pi R H + 2\pi R^2 = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$

следовательно:

$$\frac{S_n}{S_6} = \frac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

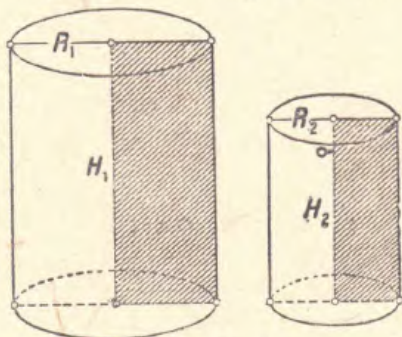


Рис. 154.

§ 5. Объем цилиндра.

1. Объемом цилиндра называется предел, к которому стремится объем вписанной в цилиндр или описанной правильной призмы при неограниченном удвоении числа их граней.

2. Теорема. Объем цилиндра равен произведению площади основания цилиндра на высоту цилиндра.

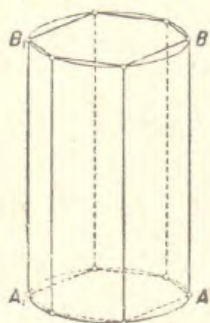


Рис. 154а.

Доказательство. Пусть в цилиндр вписана правильная n -угольная призма, площадь основания которой Q , а высота равна высоте H цилиндра, тогда $V_{np} = QH$.

При неограниченном удвоении числа граней призмы площадь основания призмы стремится к своему пределу, равному площади основания цилиндра, высота же H призмы остается без изменения.

Таким образом, переходя к пределу, имеем:

$$V_{\text{цил}} = \lim V_{np} = \lim (Q \cdot H) = \lim Q \cdot \lim H, \\ \lim Q = K = \pi R^2 \text{ и } \lim H = H,$$

следовательно:

$$V_{\text{цил}} = K \cdot H = \pi R^2 H \text{ куб. единиц.}$$

3. Теорема. Объем любого цилиндра равен произведению площади основания цилиндра на высоту цилиндра.

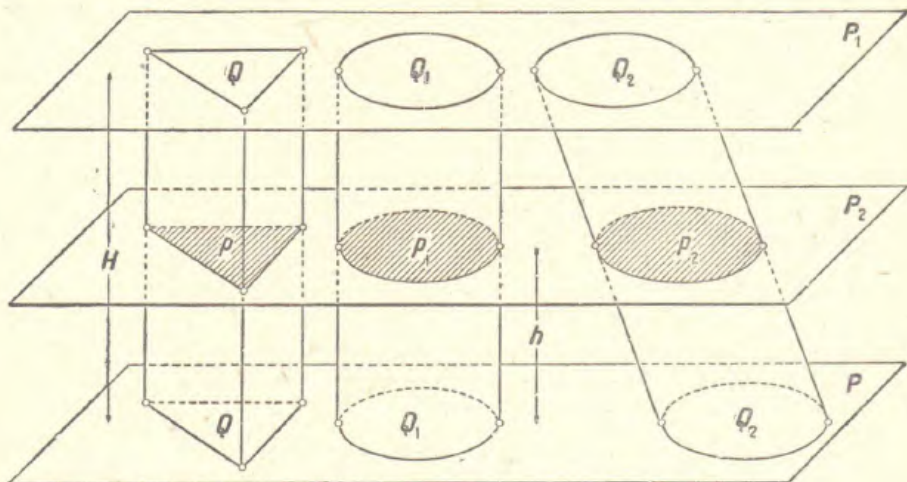


Рис. 155.

Доказательство на основании теоремы Кавальери.

Имеем: (рис. 155) прямую призму, прямой круговой цилиндр и наклонный цилиндр, основания которых лежат в параллельных плоскостях P и P_1 ; площади их оснований равны: $Q = Q_1 = Q_2$; расстояние H между параллельными основаниями P и P_1 равно высоте каждого из данных тел.

Плоскость P_2 , параллельная плоскости P , дает сечения, равные основаниям а потому площади сечений равны: $p = p_1 = p_2$. Итак, условия теоремы Кавальери соблюдены; данные тела равновелики и $V_1 = V_2 = V = QH$.

Следствия. 1) Отношение объемов двух цилиндров равно произведению отношения площадей их оснований на отношение высот цилиндров.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 H_1}{\pi R_2^2 H_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} \cdot \frac{H_1}{H_2}.$$

2) Отношение объемов двух цилиндров одинакового радиуса равно отношению высот цилиндров.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 H_1}{\pi R^2 H_2} = \frac{H_1}{H_2}.$$

3) Отношение объемов двух цилиндров, имеющих одинаковые высоты, равно отношению квадратов радиусов оснований цилиндров.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 H}{\pi R_2^2 H} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

4) Объемы подобных цилиндров относятся как кубы радиусов оснований или кубы высот цилиндров.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 H_1}{\pi R_2^2 H_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{H_1}{H_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{H_1^3}{H_2^3}.$$

4) **Задача.** Найти вес 1 погонного метра цилиндрической трубы, внешний диаметр которой равен $D=2R$, а внутренний диаметр $d=2r$ (рис. 156). Удельный вес δ .

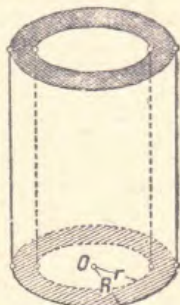


Рис. 156.

Решение. 1) $P = \delta \cdot V$; 2) $V_1 = \pi R^2 H$; $V_2 = \pi r^2 H$;
3) $V = V_1 - V_2 = \pi R^2 H - \pi r^2 H = \pi H (R^2 - r^2)$;
 $V = \pi H (R + r) (R - r)$;

или

$$4) P = \delta \cdot V = \pi \delta H (R + r) (R - r);$$

5) при $H=1$ находим вес 1 погонного метра трубы:
 $P_1 = \pi \delta (R + r) (R - r).$

Вопросы и упражнения.

1. Найти геометрическое место точек, удаленных от данной прямой в пространстве на данное расстояние a .
2. Изменится ли величина боковой поверхности цилиндра, образованного вращением прямоугольника со сторонами a и b , если в одном случае принять за ось вращения сторону a , а в другом случае сторону b ? Как изменится при этих условиях полная поверхность, если $a > b$?
3. При какой длине H боковая поверхность цилиндра равна сумме площадей обоих его оснований?
4. Во сколько раз увеличится поверхность цилиндра, если радиус его основания увеличить в n раз? если высоту увеличить в n раз? если одновременно увеличить в n раз и радиус основания и высоту?
5. Каковы должны быть размеры цилиндра, чтобы его боковая поверхность была численно равна его объему?
6. Диагональ развертки боковой поверхности прямого равносностороннего цилиндра $d=10$ см. Найти $S_{\text{бок}}$ и $S_{\text{полн}}$ цилиндра.
7. Сколько цилиндрических стаканчиков диаметром в 15 мм и высотой в 35 мм можно выштамповать из листа алюминия размером 100×150 см², полагая, что при штамповке площадь листа не меняется?
8. Две плоскости, касательные к цилиндру, или параллельны или пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра. Доказать.

9. Из двух сечений цилиндра, параллельных его оси, то больше, которое ближе к оси. Доказать.

10. Если расстояние между двумя параллельными осями двух цилиндров меньше $R_1 + R_2$ и больше $R_1 - R_2$, то цилиндры пересекаются. Доказать.

11. Два равных цилиндра пересекаются так, что оси их перпендикулярны. Вычислить площадь сечения, если диаметр каждого из цилиндров $D = 20,0$ см. Плоскость сечения пересекает оси обоих цилиндров под углом в 45° (коленчатая труба).

12. Полуцилиндрический свод длиной $l = 10$ м и диаметром $D = 4$ м нужно выбелить. Вычислить площадь побелки.

13. Метр стальной проволоки диаметром в 5,5 мм весит 187 г. Найти удельный вес стали.

14. Цилиндрическая труба имеет толщину стенок t и длину h ; внешний периметр основания равен $2P$, внутренний $2p$. Объем трубы $V = (P + p) \cdot t \cdot h$. Доказать.

15. Стороны прямоугольника относятся как 1:2. Найти отношение объемов и отношение поверхностей цилиндров, осевыми сечениями которых служит данный прямоугольник.

16. Жернов из песчаника имеет форму цилиндра с диаметром $d = 2,0$ м, толщина жернова 5,0 дм. В центре его для надевания на ось продольно отверстие в форме правильной усеченной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой 10 см и 5,0 см. Вычислить вес жернова (удельный вес 2,35).

XI. КОНУС.

§ 1. Коническая поверхность. Виды конусов.

1. В пространстве дана замкнутая кривая линия MN , вне плоскости кривой — неподвижная точка K и проходящая через нее прямая KA . Если перемещать прямую KA в пространстве так, чтобы она, проходя через неподвижную точку K , скользила по кривой MN , то прямая при непрерывном своем перемещении опишет поверхность, называемую конической (рис. 157).

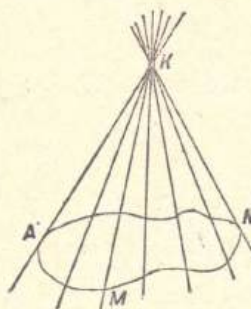


Рис. 157.

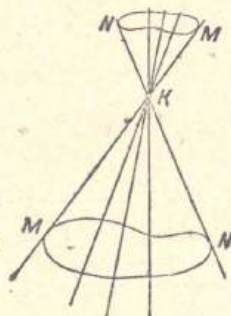


Рис. 157а.

Прямая KA — образующая, кривая MN — направляющая, неподвижная точка K , через которую проходит образующая KA , — вершина конической поверхности.

Продолжение KA за точку K при своем перемещении в пространстве образует также коническую поверхность. Обра-

зуемая прямою KA и ее продолжением поверхность состоит из двух полостей конической поверхности с общей вершиной K (рис. 157а).

2. Если пересечь коническую поверхность плоскостью S , то тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью S сечения, называется конусом (рис. 158).

Конус есть тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью. Сечение AC конической поверхности называется основанием конуса; вершина B конической поверхности есть вершина конуса, а расстояние BD от вершины конуса до плоскости его основания называется высотой конуса и обозначается буквой H . Высота $H \perp S$.

3. Конус, основание которого есть круг, называется **круговым конусом**. Если в круговом конусе высота проходит через центр основания, то такой конус называется **прямым круговым конусом** (рис. 159). Круговой конус, высота которого не проходит через центр основания, называется **наклонным конусом**.

4. Прямой круговой конус ABC может быть образован вращением прямоугольного треугольника AOB (рис. 160) вокруг одного из его катетов, например BO . При вращении треугольника его гипотенуза AB опишет боковую поверхность прямого конуса, катет OA — круг. Круг AC — основание конуса, гипотенуза BA — образующая, неподвижный катет BO , служащий осью вращения, — ось конуса и высота конуса, катет OA — радиус основания конуса.

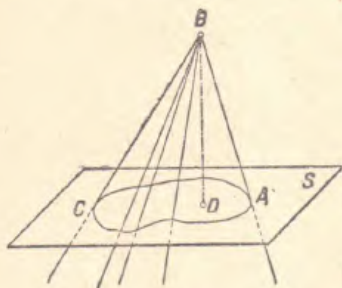


Рис. 158.

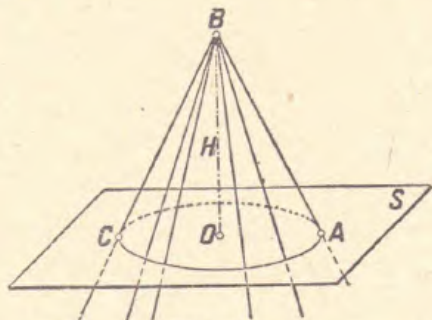


Рис. 159.

В дальнейшем прямой круговой конус будем называть просто конусом. *Конус есть тело вращения.*

Все образующие конуса равны, одинаково наклонены к плоскости основания и составляют с осью конуса равные углы.

5. Два конуса называются **подобными**, если они образованы вращением подобных прямоугольных треугольников вокруг сходственных катетов.

§ 2. Сечения конуса.

1. Сечение ABC конуса (рис. 160) плоскостью, проходящей через его ось BO , называется **осевым сечением** конуса; оно перпендикулярно к плоскости основания конуса и представляет собою равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр, а боковая сторона — образующая конуса. Осевое сечение делит конус на две равные части, симметричные относительно плоскости сечения и оси конуса. Все осевые сечения конуса равны.

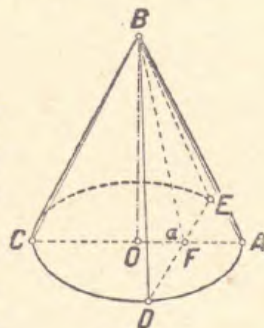


Рис. 160.

Если осевое сечение конуса — правильный треугольник, то конус называется **равносторонним**; образующая равностороннего конуса равна диаметру основания.

2. Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину и образующей с плоскостью основания угол α (рис. 160), есть также

равнобедренный треугольник, треугольник BDE ; его основанием служит хорда DE основания конуса, боковые же стороны BD и BE являются образующими конуса. Из всех сечений конуса, проходящих через его вершину и пересекающих плоскость его основания, осевое сечение наибольшее. Из всех углов при вершине B конуса, составленных двумя образующими, наибольший угол есть угол B осевого сечения ABC .

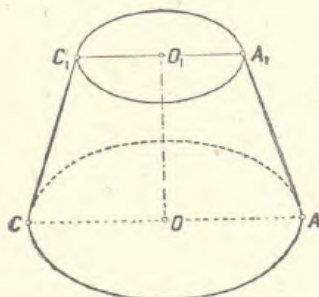


Рис. 161.

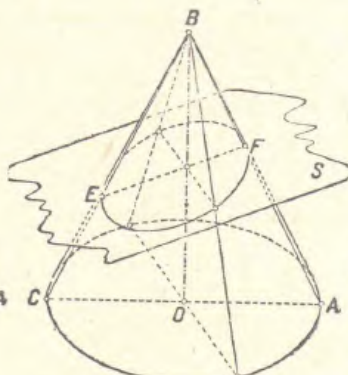


Рис. 162.

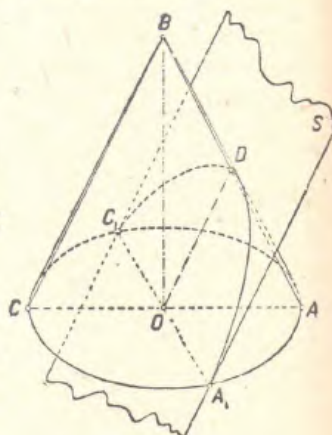


Рис. 163.

3. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг, центр которого лежит на оси конуса; сечение это перпендикулярно к оси конуса (рис. 161).

4. Часть полного конуса между основанием и параллельной плоскости основания сечением конуса называется *усеченным конусом*.

Усеченный конус имеет два основания: они — круги разных радиусов. Отрезок OO_1 (рис. 161), соединяющий центры обоих оснований усеченного конуса, называется его осью; ось усеченного конуса одновременно является и его высотой.

Осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция AA_1C_1C .

Усеченный конус — *тело вращения*; он образуется вращением прямоугольной трапеции AOO_1A_1 вокруг высоты трапеции OO_1 ; OA и O_1A_1 — радиусы оснований, AA_1 — образующая и OO_1 — высота усеченного конуса.

5. Если пересечь полный конус плоскостью S под углом α к его оси, то в сечении с поверхностью конуса получится криволинейная фигура EF — эллипс (рис. 162).

Если пересечь кривую поверхность конуса плоскостью, параллельной одной из образующих, то в сечении получится кривая A_1DC_1 , называемая параболой (рис. 163).

Если, наконец, пересечь кривую поверхность конуса плоскостью, параллельной оси, то в сечении получится кривая, называемая гиперболой (рис. 164). Гипербола имеет две ветви — ветвь LMN и ветвь $L_1M_1N_1$, соответствующие двум полостям конической поверхности.

Эллипс, парабола и гипербола называются коническими сечениями.

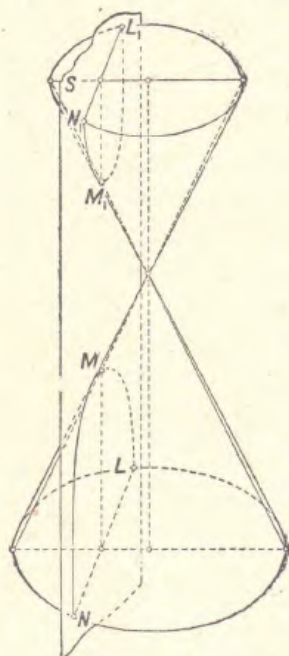


Рис. 164.

§ 3. Развертка конуса.

1. Дан конус. Если разрезать его поверхность по образующей и развернуть на плоскости, то получится развертка боковой поверхности конуса представляет собою круговой сектор, радиус которого — образующая l конуса; длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. $2\pi R$ (рис. 165).

Развертка полной поверхности конуса получается, если к развертке боковой поверхности присоединить основание конуса. Развертка усеченного конуса дана на том же рисунке 165.

2. Задача. По данному наибольшему углу β между образующими конуса определить угол φ развертки конуса (рис. 165).

Решение. Дуга AC развертки конуса равна $\frac{2\pi l \varphi}{360^\circ}$, где l — радиус сектора развертки; одновременно $\widehat{AC} = 2\pi R$:

$$\frac{2\pi l \varphi}{360^\circ} = 2\pi R,$$

откуда

$$\varphi = 360^\circ \cdot \frac{R}{l}.$$

Из прямоугольного треугольника BOA имеем:

$$\frac{R}{l} = \sin \frac{\beta}{2},$$

а потому

$$\varphi = 360^\circ \cdot \frac{R}{l} = 360^\circ \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Числовой пример. Найти $\angle \varphi$, если $\angle \beta = 60^\circ$.

$$\varphi = 360^\circ \cdot \sin 30^\circ = 180^\circ.$$

Полученный результат показывает, что развертка боковой поверхности равностороннего конуса есть полукруг.

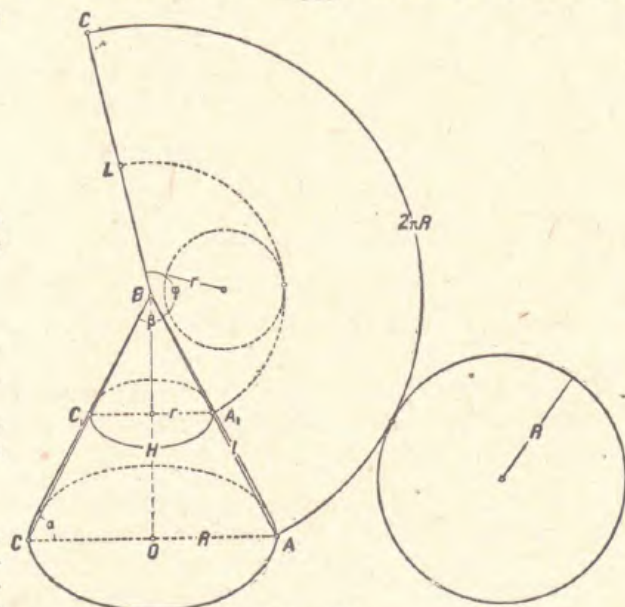


Рис. 165.

§ 4. Поверхность конуса.

1. Боковая поверхность конуса равна пределу, к которому стремится боковая поверхность правильной n -угольной вписанной в конус или описанной пирамиды при неограниченном удвоении числа их боковых граней.

2. Теорема. Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности его основания на половину образующей конуса.

Дано: Конус ABC ; радиус его основания R , образующая — l (рис. 166)
Треб. доказать: $S_{б. кон} = \pi R l$.

Доказательство. Пусть конус вписан в правильную n -угольную пирамиду. Обозначим периметр ее основания через P_n . Апофема BA боковой грани пирамиды есть образующая l конуса. Боковая поверхность описанной пирамиды $S_{б. пир} = \frac{1}{2} P_n l$.

При неограниченном увеличении числа граней пирамиды периметр P_n ее основания, представляющего собою правильный описанный n -угольник, стремится к пределу, равному длине C окружности. Переходя к пределу, получим:

$$\lim S_{б. \text{ пир}} = \lim \left(\frac{1}{2} P_n \cdot l \right) = \frac{1}{2} l \cdot \lim P_n.$$

Но

$$\lim S_{б. \text{ пир}} = S_{б. \text{ кон}}; \quad \lim P_n = C = 2\pi R;$$

следовательно:

$$S_{б. \text{ кон}} = C \cdot \frac{1}{2} l = 2\pi R \cdot \frac{1}{2} l = \pi R l \quad \text{кв. единиц.}$$

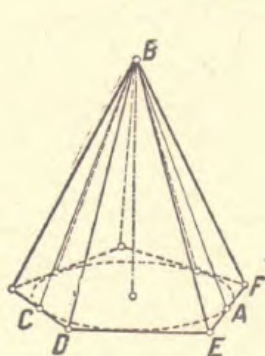


Рис. 166.

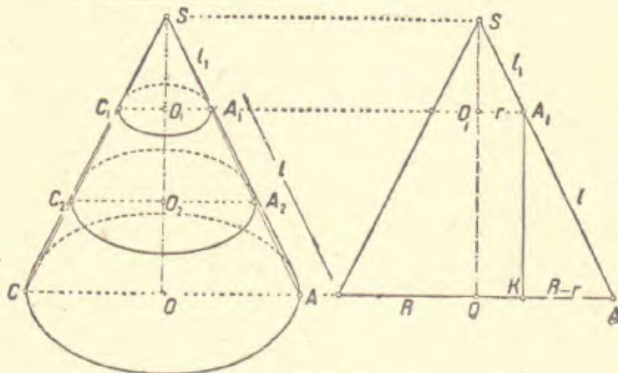


Рис. 167.

3. Полная поверхность конуса состоит из боковой его поверхности и площади его основания, а потому:

$$S_{п. \text{ кон}} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R (R + l) \quad \text{кв. единиц.}$$

Следствия. 1) Отношение боковых поверхностей двух конусов равно произведению отношения радиусов их оснований на отношение образующих.

2) Боковые или полные поверхности двух подобных конусов относятся как квадраты их образующих или квадраты их высот или квадраты радиусов их оснований.

Действительно:

$$1) \quad \frac{S}{S_1} = \frac{\pi R l}{\pi R_1 l_1} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{l}{l_1}; \quad 2a) \quad \frac{S}{S_1} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{l}{l_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{l^2}{l_1^2} = \frac{H^2}{H_1^2},$$

так как

$$\frac{R}{R_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{H}{H_1};$$

$$26) \quad \frac{S_n}{S'_n} = \frac{\pi R (R + l)}{\pi R_1 (R_1 + l_1)} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{R + l}{R_1 + l_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{l^2}{l_1^2} = \frac{H^2}{H_1^2}.$$

§ 5. Поверхность усеченного конуса.

1. **Теорема.** Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей его оснований на образующую конуса.

Дано: AA_1C_1C — усеченный конус; R и r — радиусы оснований; l — образующая (рис. 167).

Требуется доказать: $S_{б. \text{ ус. кон}} = \pi (R + r) \cdot l.$

Доказательство. Боковая поверхность усеченного конуса равна разности боковых поверхностей двух полных конусов SAC и SA_1C_1 :

$$S_{б. ус. кон} = S_R - S_r = \pi R(l + l_1) - \pi r l_1 = \pi [Rl + l_1(R - r)],$$

где l_1 — образующая конуса SA_1C_1 .

Из подобных прямоугольных треугольников A_1KA и SO_1A_1 имеем:

$$\frac{l}{l_1} = \frac{R - r}{r},$$

откуда:

$$l_1(R - r) = lr.$$

Заменяя в формуле боковой поверхности усеченного конуса произведение $l_1 \cdot (R - r)$ произведением lr , имеем:

$$S_{б. ус. кон} = \pi [Rl + l_1(R - r)] = \pi (Rl + lr) = \pi (R + r)l.$$

Итак:

$$S_{б. ус. кон} = \pi (R + r)l \quad \text{кв. единиц.}$$

2. Полная поверхность усеченного конуса равна сумме боковой его поверхности и площадей обоих его оснований.

Имеем:

$$S_{п. ус. кон} = \pi (R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

3. Если в усеченном конусе AA_1C_1C провести среднее сечение A_2C_2 перпендикулярно к оси OO_1 через ее середину O_2 , то радиус этого среднего сечения $m = O_2A_2 = \frac{R + r}{2}$ (рис. 167). В самом деле, половина осевого сечения усеченного конуса — трапеция AA_1O_1O , ее средняя линия $O_2A_2 = \frac{OA + O_1A_1}{2}$, или $m = \frac{R + r}{2}$.

Подставляя в формулу боковой поверхности $2m$ вместо $(R + r)$, имеем:

$$S_{б. ус. кон} = \pi (R + r) \cdot l = \pi \cdot 2m \cdot l = 2\pi ml \quad \text{кв. единиц.}$$

Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению длины окружности среднего сечения конуса на образующую конуса.

§ 6. Объем конуса.

1. Объем конуса равен пределу, к которому стремится объем вписанной в конус или описанной вокруг него правильной n -угольной пирамиды при неограниченном удвоении числа граней.

2. Теорема. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания конуса на высоту конуса.

Дано: ABC — конус; R — радиус его основания; H — высота (рис. 166).

Требуется доказать: $V_{кон} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Доказательство. Пусть вокруг конуса описана правильная n -угольная пирамида. Обозначив площадь ее основания через Q_n и высоту через H , имеем:

$$V_{пир} = \frac{1}{3} Q_n \cdot H.$$

При неограниченном удвоении числа граней пирамиды площадь ее основания стремится к пределу, равному площади K круга — основания конуса, высота же H остается без изменения. Переходя к пределу, имеем:

$$V_{\text{кон}} = \lim V_n = \lim \left(\frac{1}{3} Q_n H \right) = \frac{1}{3} H \cdot \lim Q_n = \frac{1}{3} KH,$$

где K — площадь круга.

Итак:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} K \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H \quad \text{куб. единиц.}$$

3. Теорема. Объем любого конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту конуса.

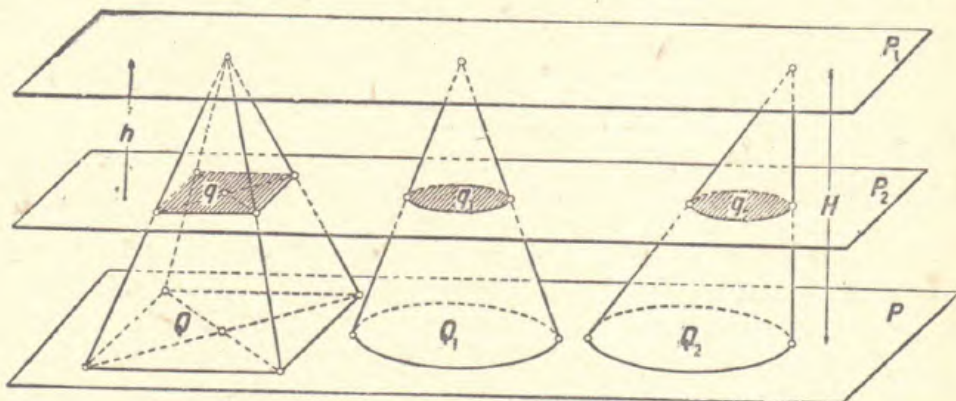


Рис. 168.

Доказательство на основании теоремы Кавальери.

Имеем (рис. 168) пирамиду, прямой круговой конус и наклонный конус, имеющие равновеликие основания и равные высоты.

Проведем сечения, параллельные основаниям, на расстоянии h от вершины, получим равновеликие сечения:

$$q = q_1 = q_2.$$

Условия теоремы Кавальери соблюдены, а потому:

$$V_1 = V_2 = V = \frac{1}{3} QH.$$

Следствия. 1) Отношение объемов двух конусов равно произведению отношения квадратов радиусов оснований на отношение высот конусов.

2) Объемы двух подобных конусов относятся как кубы радиусов оснований или кубы высот конусов.

$$1) \frac{V_k}{V_k'} = \frac{\pi R^2 H}{\pi R_1^2 H_1} = \frac{R^2}{R_1^2} \cdot \frac{H}{H_1}, \quad 2) \frac{V_k}{V_k'} = \frac{R^2}{R_1^2} \cdot \frac{H}{H_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{H^3}{H_1^3},$$

так как

$$\frac{R}{R_1} = \frac{H}{H_1}.$$

§ 7. Объем усеченного конуса.

Теорема. Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех полных конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом; основаниями их служат основания усеченного конуса и среднее пропорциональное между ними.

Дано: AA_1C_1C — усеченный конус (рис. 169);
 R и r — радиусы его оснований; H — высота.

Требуется доказать: $V_{\text{ус. кон}} = \frac{1}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) H$.

Доказательство. Объем V усеченного конуса есть разность объемов двух полных конусов: одного с высотой $H + h$ и другого с высотой h .

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 (H + h) - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi [R^2 H + (R^2 - r^2) h].$$

Из подобия треугольников BOA и BO_1A_1 находим:

$$\frac{R}{r} = \frac{H + h}{h}.$$

Из данного равенства получаем:

$$Rh = rH + rh \text{ или } (R - r)h = rH,$$

откуда:

$$h = \frac{rH}{R - r}.$$

Подставляя найденное значение h в формулу, определяющую V , получаем:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left[R^2 H + \frac{(R^2 - r^2) \cdot rH}{R - r} \right] = \frac{1}{3} \pi [R^2 H + (R + r) rH],$$

или

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi RrH + \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

В данной формуле πR^2 — площадь одного основания усеченного конуса, πr^2 — площадь другого основания и $\pi \cdot Rr = \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}$ — площадь, средняя пропорциональная между площадями обоих оснований усеченного конуса.

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) H$$

 куб. единиц.

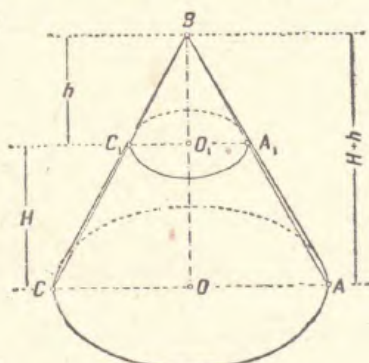


Рис. 169.

§ 8. Формула Ньютона-Симпсона.

1. Для вычисления объемов тел различной формы, имеющих параллельные основания, пользуются следующей формулой Ньютона-Симпсона:

$$V = \frac{1}{6} H (Q + q + 4Q_{cp}) \text{ куб. ед.}$$

где H — расстояние между параллельными основаниями; Q и q — площади оснований; Q_{cp} — площадь среднего сечения, проведенного параллельно плоскостям

оснований через середину высоты тела. Формула Ньютона-Симпсона может быть применена к вычислению объема тел только в том случае, если в выражении площади любого сечения тела расстояние x сечения тела от плоскости основания входит в степени не выше третьей. Формула Ньютона-Симпсона справедлива и тогда, когда одно из оснований тела обращается в прямую, параллельную основанию, или даже в точку.

2. Применим формулу Ньютона-Симпсона к вычислению объемов призмы, цилиндра, пирамиды и конуса как полных, так и усеченных, предварительно проверив, будет ли площадь среднего сечения тела функцией не выше третьей степени его расстояния x от основания.

а) *Призма или цилиндр.* Любое параллельное сечение равно основанию тела и, следовательно, не зависит от его расстояния от плоскости основания. Итак, в призме и цилиндре площадь любого сечения, параллельного плоскости основания, в том числе и среднего сечения, — функция нулевой степени этого расстояния, а потому формулу применить можно (рис. 170).

$$V_{пр(цил)} = \frac{1}{6} H(Q + Q + 4Q) = \frac{1}{6} H \cdot 6Q = QH$$

так как и

$$Q_{ср} = Q \text{ и } q = Q.$$

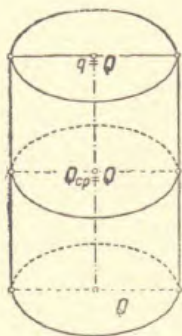


Рис. 170.

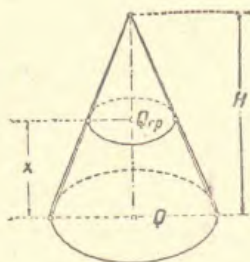


Рис. 171.

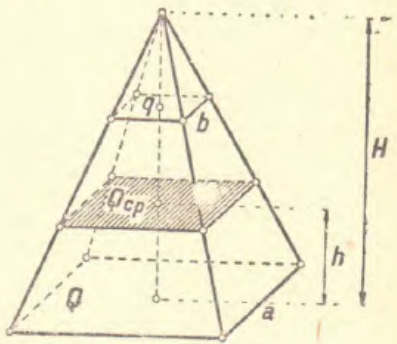


Рис. 172.

б) *Пирамида или конус.* Определим площадь среднего сечения пирамиды или конуса, обозначив его расстояние от плоскости основания через x (рис. 171).

$$\frac{Q_{ср}}{Q} = \frac{(H-x)^2}{H^2},$$

откуда

$$Q_{ср} = \frac{Q}{H^2} (H-x)^2.$$

Площадь среднего сечения представляет собою квадратную функцию его расстояния x от плоскости основания, поэтому формула Ньютона-Симпсона применима. Принимая во внимание, что $q = 0$ и $Q_{ср} = \frac{Q}{4}$, имеем:

$$V_{пир(кон)} = \frac{H}{6} (Q + q + 4Q_{ср}) = \frac{H}{6} \cdot \left(Q + 4 \cdot \frac{Q}{4} \right) = \frac{H}{6} \cdot 2Q = \frac{1}{3} QH.$$

в) *Усеченная пирамида и усеченный конус.* Определим площадь среднего сечения $Q_{ср}$.

1) $Q_{ср}$ для усеченной пирамиды, сходственные стороны оснований которой a и b (рис. 172), определяется так:

$$\frac{Q_{ср}}{q} = \frac{\left(\frac{a+b}{2} \right)^2}{b^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4b^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{a}{b} + 1 \right).$$

Но

$$\frac{Q}{q} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} = \frac{a}{b},$$

следовательно:

$$Q_{cp} = q \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{Q}{q} + 2 \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} + 1 \right) = \frac{1}{4} (Q + 2 \sqrt{Qq} + q).$$

Применяя формулу Ньютона-Симпсона, имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{ус. пир}} &= \frac{1}{6} H (Q + q + 4Q_{cp}) = \frac{1}{6} H \left[Q + q + 4 \cdot \frac{1}{4} (Q + 2 \sqrt{Qq} + q) \right] = \\ &= \frac{1}{6} H (2Q + 2q + 2 \sqrt{Qq}) = \frac{1}{3} H (Q + q + \sqrt{Qq}). \end{aligned}$$

2) Q_{cp} для усеченного конуса:

$$Q_{cp} = \pi \left(\frac{R+r}{2} \right)^2,$$

где R и r — радиусы оснований усеченного конуса. Применяя формулу Ньютона-Симпсона, получим:

$$\begin{aligned} V_{\text{ус. кон}} &= \frac{H}{6} (Q + q + 4Q_{cp}) = \frac{H}{6} \left[\pi R^2 + \pi r^2 + 4\pi \cdot \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\pi H}{6} (2R^2 + 2r^2 + 2Rr) = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr). \end{aligned}$$

3. Задача. Если через диаметр основания прямого кругового цилиндра провести под некоторым углом α к плоскости основания плоскость, то эта плоскость отсекает от цилиндра тело, называемое цилиндрическим копытом (рис. 173). Вычислить объем цилиндрического копыта по данному радиусу R основания цилиндра и высоте h тела.

Решение. Примем за верхнее основание тела точку A , за нижнее — точку B , тогда сечение ODC — среднее сечение. (Можно доказать, что площадь любого сечения, параллельного ODC , — функция второй степени расстояния сечения от точки B .) Для вычисления объема цилиндрического копыта применяем формулу Ньютона-Симпсона, принимая во внимание, что:

$$\begin{aligned} Q &= 0; \quad q = 0; \quad Q_{cp} = \text{пл. } \triangle ODC = \frac{Rh}{2}; \\ H &= AB = 2R. \end{aligned}$$

Итак:

$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{6} (Q + q + 4Q_{cp}) = \frac{2R}{6} \left(0 + 0 + 4 \cdot \frac{Rh}{2} \right) = \\ &= \frac{2R}{6} \cdot 2Rh = \frac{2}{3} R^2 h. \end{aligned}$$

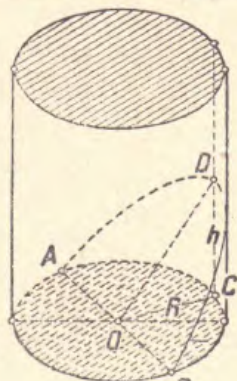


Рис. 173.

Полученный результат, выражающий объем цилиндрического копыта, характерен тем, что не содержит числа π .

Вопросы и упражнения.

1. Может ли угол развертки боковой поверхности конуса равняться 360° ?
2. Чему равен угол развертки боковой поверхности конуса, если известно, что наибольший угол между образующими конуса равен 90° ?
3. Во сколько раз увеличится объем конуса, если: 1) увеличить его высоту в n раз? 2) увеличить его диаметр в n раз? 3) и высоту и диаметр увеличить в n раз?
4. Как изменится объем конуса, если и высоту и диаметр уменьшить в n раз?

5. Площади оснований двух конусов одинаковы, объем одного в n раз больше другого. Как относятся их высоты?

6. Высоты двух конусов одинаковы. Объем одного из них в n раз больше объема другого. Как относятся диаметры их оснований?

7. Конус и цилиндр имеют одинаковые основание и высоту. Как относятся их объемы?

8. Боковая поверхность конуса равна $\frac{K}{\cos \alpha}$, где K — площадь основания конуса, а α — угол наклона образующей к плоскости основания. Доказать.

9. В конус вписана правильная шестиугольная пирамида. Найти отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

10. Площадь осевого сечения конуса $Q = 6,0 \text{ см}^2$, диаметр основания конуса $D = 6,0 \text{ см}$. Найти объем конуса.

11. Два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Объем их общей части составляет четверть объема каждого из них. Доказать.

12. О силе снаряда судят по величине воронки, образующейся в среднем грунте при взрыве. Воронку эту обыкновенно принимают за конус. 76-миллиметровая граната пушки при стрельбе на расстоянии, большем чем 4 км, образует воронку диаметром в 1,50 м и глубиной в 0,50 м. Какое количество земли по весу выбрасывает граната, если известно, что 1 м^3 земли весит приблизительно 1520 кг?

13. Конус и цилиндр имеют общую ось, и боковая поверхность цилиндра делится боковой поверхностью конуса пополам. В каком отношении делится поверхность конуса объемом цилиндра?

14. Полная поверхность конуса S , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Найти объем конуса.

15. Жестяной сосуд в форме усеченного конуса (ведро) глубиной в $h = 2,6 \text{ дм}$ имеет диаметры $D_1 = 3,0 \text{ дм}$ и $D_2 = 2,4 \text{ дм}$. Выразить емкость его в литрах.

ХII. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.

§ 1. Вращение отрезка вокруг оси.

Пусть отрезок AB вращается вокруг прямой MN , причем AB расположен в одной плоскости с осью MN и по одну сторону от этой оси (рис. 174).

Форма поверхности, образуемой вращением отрезка AB вокруг оси MN , зависит от ее положения относительно оси вращения.

I. Отрезок $AB \perp MN$; при вращении AB вокруг MN получается круг радиуса AB с центром B на оси MN .

II. Отрезок A_1B_1 образует с осью MN угол α , и конец B_1 отрезка лежит на оси MN . При своем вращении отрезок A_1B_1 опишет кривую поверхность прямого кругового конуса, высотой его является проекция отрезка A_1B_1 на ось MN .

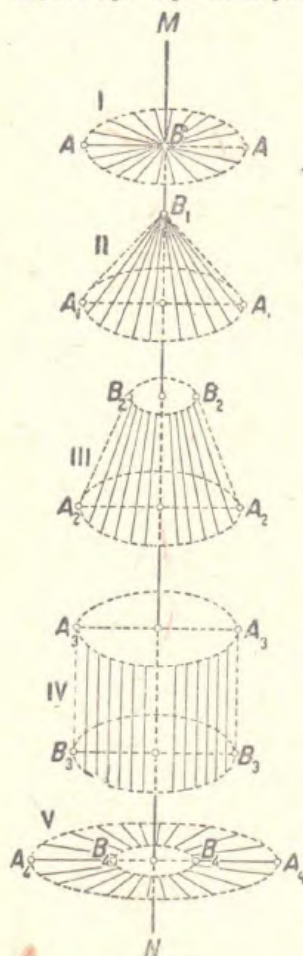


Рис. 174.

III. Отрезок A_2B_2 не параллелен оси вращения MN , не перпендикулярен к ней и не имеет с ней общей точки. При своем вращении

отрезок A_2B_2 опишет кривую поверхность усеченного конуса, высотой которого является проекция отрезка A_2B_2 на ось MN .

IV. Отрезок A_3B_3 параллелен оси вращения MN ; в данном случае отрезок A_3B_3 при своем вращении опишет кривую поверхность цилиндра; высота цилиндра — проекция отрезка A_3B_3 на ось MN , — равна длине отрезка.

V. Отрезок $A_4B_4 \perp MN$, но не имеет с осью вращения общей точки. При таком своем положении отрезок опишет плоское кольцо, ширина которого равна длине самого отрезка.

§ 2. Изображение тела вращения.

Дан многоугольник $ABCDEF$ (рис. 175), лежащий в одной плоскости с осью вращения MN ; ось вращения MN не пересекает многоугольника, но совпадает с одной из его сторон EF . Многоугольник $ABCDEF$ расположен относительно оси MN так, что сторона его $BC \parallel MN$, а $DE \perp MN$. Вершины A, B, C и D многоугольника, не лежащие на оси MN , называются свободными вершинами фигуры. Чтобы начертить тело вращения, поступают так:

1) проектируют все свободные вершины на ось вращения и

2) строят фигуру $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ симметрично данной фигуре относительно оси вращения MN .

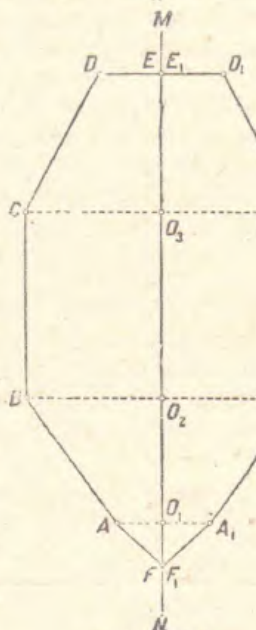


Рис. 175.

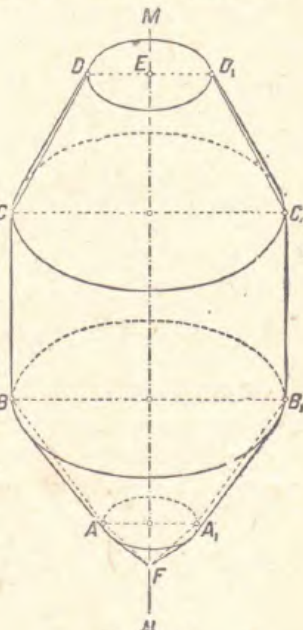


Рис. 176.

Построенный так многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 175) есть симметричное изображение данного многоугольника $ABCDEF$, вся же фигура AD_1 представляет собою осевое сечение тела вращения. Построив затем окружности, диаметрами которых служат отрезки, соединяющие симметрично расположенные относительно оси вращения свободные вершины A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 , D и D_1 , получим изображение тела вращения (рис. 176).

§ 3. Поверхность и объем тел вращения.

1. Поверхность тела, образованного вращением треугольника или n -угольника вокруг оси, не пересекающей вращаемой фигуры, равна сумме поверхностей, образуемых вращением каждой стороны треугольника

или n -угольника; если одна из сторон фигуры совпадает с осью вращения, то она в расчет не принимается, так как она не образует поверхности.

2. Дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 177) и вне его в плоскости четырехугольника ось MN , параллельная стороне BC . Вращая данный четырехугольник вокруг оси MN , получим тело вращения; его поверхность S_m равна сумме поверхностей, образуемых вращением отрезков AB , BC , CD и DA вокруг MN .

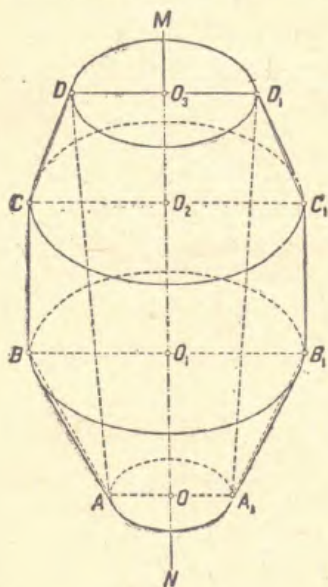


Рис. 177.

$$S_m = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA},$$

где S_{AB} — боковая поверхность усеченного конуса, S_{BC} — боковая поверхность цилиндра, S_{CD} и S_{DA} — боковые поверхности усеченных конусов.

Вычислив отдельно S_{AB} , S_{BC} , S_{CD} и S_{DA} и подставив их числовые значения в формулу S_m , получим искомую поверхность тела вращения.

3. Объем V тела, образованного вращением четырехугольника $ABCD$ вокруг оси MN , равен сумме объемов цилиндра BB_1C_1C , усеченных конусов CC_1D_1D и AA_1B_1B без объема усеченного конуса AA_1D_1D .

$$V_m = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} - V_{DA}.$$

4. **Теорема.** Кривая поверхность, образуемая вращением отрезка вокруг оси, лежащей с ним в одной плоскости и не пересекающей его, равна произведению проекции отрезка на ось и длины окружности, радиус которой есть перпендикуляр к отрезку, проведенный из его середины до пересечения с осью.

Дано: Отрезок AB ; точка C — его середина; MN — ось вращения; $CO = a$ — длина перпендикуляра, проведенного к отрезку AB из C до пересечения с MN в точке O ; h — проекция AB на ось MN (рис. 178).

Требуется доказать: $S_{AB} = h \cdot 2\pi a = 2\pi ah$.

Доказательство. Рассмотрим три случая:

I. Отрезок $AB \parallel MN$ (рис. 178).

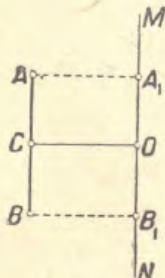


Рис. 178.

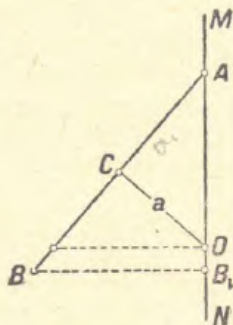


Рис. 178а.

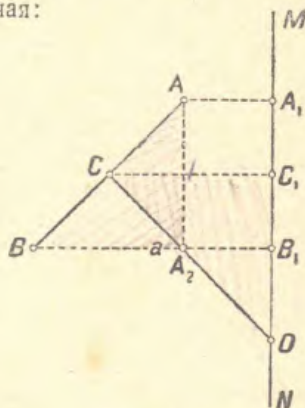


Рис. 178б.

В этом случае отрезок AB при своем вращении вокруг оси MN образует кривую поверхность цилиндра, которая равна $2\pi \cdot BB_1 \cdot A_1B_1$; но $BB_1 = CO = a$ и $A_1B_1 = h$ — проекции отрезка AB на ось MN , следовательно $S_{AB} = 2\pi ah$.

II. Отрезок AB наклонен к оси MN , и один конец его A лежит на оси MN (рис. 178а).

В этом случае отрезок AB при своем вращении вокруг оси образует кривую поверхность конуса, которая равна $\pi \cdot BB_1 \cdot AB$.

Из подобия прямоугольных треугольников BB_1A и OCA имеем:

$$CA:CO = AB_1:BB_1, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{2}:CO = AB_1:BB_1,$$

откуда

$$AB \cdot BB_1 = 2CO \cdot AB_1, \quad \text{или} \quad AB \cdot BB_1 = 2a \cdot h.$$

Заменив в выражении поверхности конуса $\pi \cdot BB_1 \cdot AB$ произведение $BB_1 \cdot AB$ через $2ah$, имеем:

$$S_{AB} = \pi \cdot 2ah = 2\pi ah.$$

III. Отрезок AB наклонен к оси MN и не имеет с ней общей точки (рис. 178б).

В этом случае отрезок AB при своем вращении вокруг оси MN образует кривую поверхность усеченного конуса, которая равна

$$\pi (BB_1 + AA_1) \cdot AB.$$

Проведем $AA_2 \perp BB_1$ (на чертеже точка A_2 случайно попала на прямую CO) и $CC_1 \parallel BB_1$; из подобия прямоугольных треугольников CC_1O и BA_2A имеем:

$$AA_2:AB = CC_1:CO,$$

но

$$AA_2 = A_1B_1 = h; \quad CC_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}; \quad CO = a;$$

поэтому

$$h:AB = \frac{AA_1 + BB_1}{2}:a,$$

откуда

$$AB \cdot \frac{AA_1 + BB_1}{2} = ah, \quad \text{или} \quad AB (AA_1 + BB_1) = 2ah.$$

Заменив в выражении $\pi (BB_1 + AA_1) \cdot AB$ произведение $(BB_1 + AA_1) \cdot AB$ через $2ah$, получим:

$$S_{AB} = \pi \cdot 2ah = 2\pi ah.$$

Если отрезок AB перпендикулярен к MN , то при своем вращении вокруг MN он образует не кривую поверхность, а плоскость — круг или кольцо.

Следствие. Поверхность, образуемая вращением правильной, вписанной в полуокружность ломаной линии вокруг диаметра, равна проекции ломаной на диаметр, умноженной на длину окружности, радиус которой есть апофема ломаной (рис. 179).

Апофемы правильной ломаной линии равны между собой и проходят через центр O окружности. Обозначив апофему через a , имеем:

$$S_{AB} = 2\pi a \cdot A_1B_1; \quad S_{BC} = 2\pi a \cdot B_1C_1 \quad \text{и} \quad S_{CD} = 2\pi a \cdot C_1D_1,$$

откуда

$$S_{ABCD} = 2\pi a (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1) = 2\pi a \cdot A_1D_1,$$

где A_1D_1 — проекция ломаной $ABCD$ на диаметр MN .

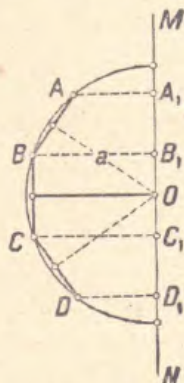


Рис. 179.

5. Задача. Треугольник ABC вращается вокруг большей своей стороны. Найти поверхность и объем тела вращения (рис. 180).

Решение. Проведя из вершины B треугольника ABC перпендикуляр BO к стороне AC , которая служит осью вращения, получим два прямоугольных треугольника, из которых каждый при своем вращении образует конус.

$$S_{m.вр.} = S_{AB} + S_{BC} = \pi \cdot BO \cdot AB + \pi \cdot BO \cdot BC = \pi \cdot BO \cdot (AB + BC).$$

$$\begin{aligned} V_{m.вр.} &= V_{AB} + V_{BC} = \frac{1}{3} \pi \cdot BO^2 \cdot AO + \frac{1}{3} \pi \cdot BO^2 \cdot CO = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot BO^2 \cdot (AO + CO) = \frac{1}{3} \pi \cdot BO^2 \cdot AC. \end{aligned}$$

6. Задача. Квадрат со стороной $AB = a$ вращается вокруг прямой, лежащей вне квадрата в одной с ним плоскости и отстоящей от стороны квадрата на расстоянии b . Найти поверхность и объем тела вращения (рис. 181).

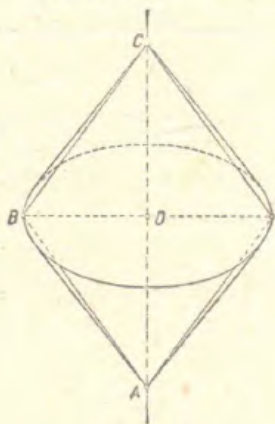


Рис. 180.

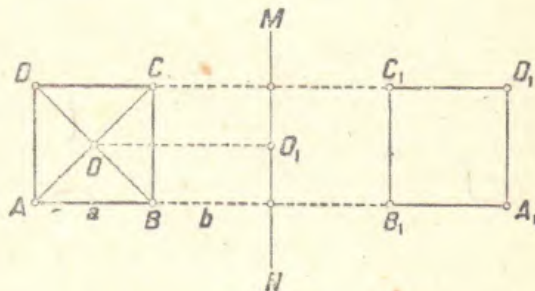


Рис. 181.

Решение:

$$\begin{aligned} 1. S_m &= S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA} = \\ &= \pi [(a+b)^2 - b^2] + 2\pi ba + \pi [(a+b)^2 - b^2] + 2\pi (a+b)a = \\ &= 2\pi (a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + ab + a^2 + ab) = 2\pi (2a^2 + 4ab) = 4\pi a(a+2b). \end{aligned}$$

Центр правильного многоугольника, следовательно, и центр O квадрата является в то же время центром тяжести как периметра фигуры, так и самой фигуры; его расстояние OO_1 от оси равно $b + \frac{a}{2}$. Обозначив OO_1 через c , имеем $c = b + \frac{a}{2}$, откуда $2c = a + 2b$.

Заменяя в полученном для S_m выражении $a + 2b$ через $2c$, получим

$$S_m = 4\pi a \cdot 2c = 4a \cdot 2\pi c.$$

Обозначив периметр квадрата через P , имеем: $S_m = P \cdot 2\pi c$.

$$\begin{aligned} 2. V_m &= V_{AD} - V_{BC} = \pi(a+b)^2 a - \pi b^2 a = \pi a(a^2 + 2ab + b^2 - b^2) = \\ &= \pi a(a^2 + 2ab) = \pi a^2(a + 2b). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $a + 2b = 2c$, получаем:

$$V_m = \pi a^2 \cdot 2c = a^2 \cdot 2\pi c.$$

Обозначив площадь квадрата через Q , имеем:

$$V_m = Q \cdot 2\pi c.$$

Следует заметить, что вообще:

1. Поверхность тела вращения равна произведению длины вращаемой линии или периметра вращаемой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести линии или периметра.

2. Объем тела вращения равен произведению площади вращаемой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести фигуры.

Это так называемые теоремы Гюльдена, принимаемые нами без доказательства. Они верны только при следующих условиях: 1) ось вращения должна лежать в плоскости вращаемой фигуры и 2) ось вращения не должна пересекать вращаемой фигуры. Применить ее можно в элементарном курсе только для правильных фигур, у которых центр тяжести как периметра, так и самой фигуры совпадает с центром фигуры. Центр тяжести периметра фигуры и центр тяжести самой фигуры в неправильных фигурах не совпадают.

Вопросы и упражнения.

1. Равносторонний треугольник ABC вращается вокруг одной из своих сторон a . Найти поверхность и объем тела вращения.

2. Правильный шестиугольник вращается вокруг одной из своих сторон a . Найти объем тела вращения: 1) обычным способом и 2) применив теорему Гюльдена.

3. Прямоугольная трапеция, основание которой $a=40$ мм, $b=70$ мм и высота $h=40$ мм (рис. 182), вращается вокруг оси, перпендикулярной к основанию трапеции и отстоящей от ее высоты на расстоянии 8 см. Найти объем тела вращения.

4. Прямоугольник, площадь которого Q и угол между диагоналями α , вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямоугольника, параллельно его диагонали. Найти объем и поверхность тела вращения. Исследовать при $\alpha=90^\circ$.

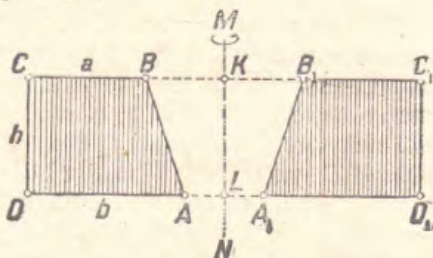


Рис. 182.

ХIII. ШАР И ЕГО ЧАСТИ.

§ 1. Шар. Шаровая поверхность.

1. Дан полуокруг DAD_1 (рис. 183). Вращая его вокруг диаметра DD_1 получаем тело, называемое шаром.

Полуокружность DAD_1 описывает при этом поверхность, которая называется шаровой, поверхностью.

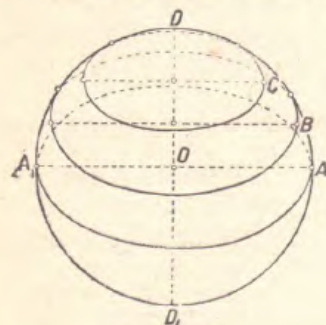


Рис. 183.

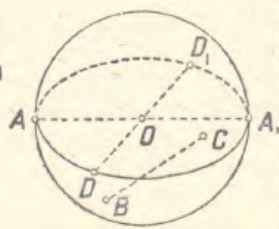


Рис. 183а.

Любая точка этой поверхности находится на одном и том же расстоянии от точки O — центра шара.

2. Геометрическое место точек в пространстве, удаленных от одной данной точки на расстояние a , есть шаровая поверхность.

3. Отрезок, концами которого служат точка A шаровой поверхности и центр O , называется радиусом.

Все радиусы шаровой поверхности и шара равны.

Хордой шара называется отрезок прямой, концами которого служат две точки шаровой поверхности; BC — хорда шара (рис. 183а). Хорда, проходящая через центр шара, называется диаметром.

Диаметр шара равен двум радиусам.

Диаметры шара равны, и каждый из них служит осью вращения шара и является осью симметрии.

4. Два шара, имеющие одинаковые радиусы, равны.

§ 2. Сечение шара. Касательная плоскость.

1. Теорема. Сечение шара плоскостью есть круг.

Дано: Шар с центром O ; P — плоскость сечения (рис. 184).

Требуется доказать: Сечение есть круг.

Доказательство. Плоскость P пересекает шар с центром O . Проведем из центра O шара перпендикуляр OK к плоскости P ; соединив две, произвольно взятые на линии пересечения плоскости P с шаровой поверхностью, точки A и B с центром O и основанием K перпендикуляра OK , получим два равных прямоугольных треугольника AOK и BOK ; у них $AO = BO$ как радиусы шара и OK — общий катет; из равенства треугольников следует, что $KA = KB$, а это значит, что произвольно взятые точки A и B , лежащие на линии пересечения плоскости P с шаровой поверхностью, находятся на одинаковом расстоянии от точки K ; следовательно, линия пересечения плоскости P с шаровой поверхностью есть окружность с центром в точке K ; само же сечение представляет собой круг.

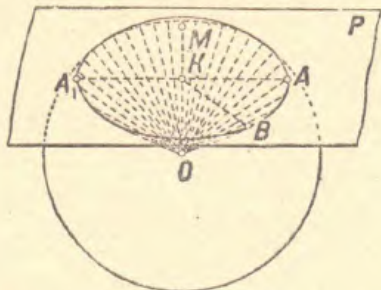


Рис. 184.

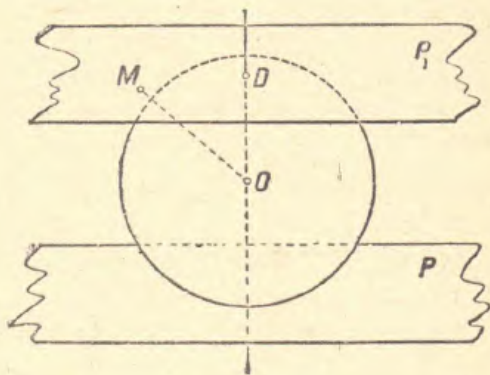


Рис. 184а.

Любая точка, не лежащая на линии пересечения плоскости P с шаровой поверхностью, находится от точки K на расстоянии, большем или меньшем, нежели расстояние KA , так как ее расстояние от центра шара или больше или меньше радиуса R шара.

2. Обозначим расстояние OK через d , радиус шара через R и радиус сечения через r . Из треугольника AOK имеем: $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2}$, или $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Из данного равенства следует, что радиус сечения зависит от расстояния d сечения от центра.

С уменьшением d радиус r сечения увеличивается, и при $d = 0$ радиус $r = R$. В последнем случае сечение называется большим кругом

шара; это сечение проходит через центр шара; сечение, плоскость которого не проходит через центр шара, называется малым кругом шара.

Следствия. 1) Сечения шара плоскостями, равноотстоящими от его центра, — равные круги; и обратно, равные сечения шара плоскостью равно отстоят от центра шара.

2) Из двух сечений шара то больше, которое ближе к его центру.

3. Если перемещать плоскость сечения P параллельно самой себе в направлении от центра, то плоскость P может занять такое положение, когда $d=R$, и тогда круг сечения обратится в точку, плоскость же P будет иметь с шаровой поверхностью только одну общую точку.

Плоскость, имеющая только одну общую точку с поверхностью шара, называется касательной плоскостью (рис. 184а). Плоскость сечения P , перемещаясь при удалении своем от центра, остается все время перпендикулярной к диаметру; она перпендикулярна и в том случае, когда сечение обращается в точку D и сама она переходит в касательную плоскость. Отсюда следует, что касательная плоскость перпендикулярна к диаметру, или, что то же самое, к радиусу шара, проведенному в точку прикосновения, и наоборот, радиус, проведенный в точку касания касательной плоскости, перпендикулярен к плоскости касания.

Действительно, любая точка M , взятая на касательной плоскости P_1 , лежит вне шара и отстоит от центра на расстоянии, большем радиуса R шара, и лишь только одна точка прикосновения D отстоит от центра на расстояние, равное радиусу R шара. Итак, расстояние точки касания D до центра O шара есть кратчайшее расстояние и, следовательно, $OD \perp P_1$.

4. Если $d > R$, то плоскость P пройдет вне шара, не касаясь его поверхности. В этом случае $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ — число мнимое.

5. Расстояние между двумя параллельными плоскостями, касательными к шару, равно диаметру шара.

Этим свойством пользуются для определения длины диаметра, а следовательно, и радиуса шара.

§ 3. Свойства больших кругов.

1. Большие круги одного шара или двух равных шаров равны.

2. Большой круг делит шар и его поверхность на две равные части.

Действительно, большой круг делит шар на две части. Если вложить одну часть шара в другую так, чтобы большие круги их совпали, то все точки поверхности одной части совпадут со всеми точками поверхности другой части, так как они отстоят от центра на одинаковом расстоянии. Итак, обе части шара совпали, значит, большой круг делит шар и его поверхность на две равные части.

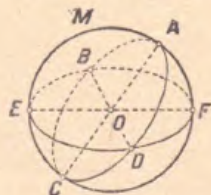


Рис. 185.

Плоскости больших кругов служат плоскостями симметрии шара.

3. Два больших круга AC и EF пересекаются по диаметру BD и взаимно делятся пополам (рис. 185).

В самом деле, два больших круга одного и того же шара имеют общую точку — центр шара, значит, у них есть и общая прямая, проходящая через центр; эта прямая — диаметр; диаметр делит каждый из больших кругов пополам. Большой круг EAC есть сечение шара плоскостью чертежа.

4. Через две точки поверхности шара, не лежащие на концах одного и того же диаметра, ~~всегда~~ можно провести большой круг, и притом только один.

Если две точки, например A и C (рис. 185), лежат на концах одного диаметра, то через них, а следовательно, и через диаметр AC шара, можно провести бесчисленное множество плоскостей, значит, и больших кругов. На рисунке 185 через точки A и C проведены два больших круга: $AECF$ и $ABCD$.

Если даны две точки поверхности шара, которые не являются концами диаметра, например точки A и D , то эти две точки вместе с центром шара — третьей точкой — определяют положение только одной плоскости, а именно плоскости большого круга $ABCD$; отсюда следует, что через две точки A и D , не лежащие на концах одного и того же диаметра, можно провести только один большой круг.

5. За расстояние между двумя точками A и E по поверхности шара принимается меньшая дуга AME большого круга $AECF$, проведенного через эти две точки A и E (рис. 185). Это расстояние есть кратчайшее расстояние между двумя точками, измеренное по поверхности шара. Высказанное суждение принимается нами без доказательства. Кратчайшее расстояние между двумя точками, измеренное по поверхности шара, не следует смешивать с кратчайшим расстоянием между теми же точками, измеряемым длиной хорды шара, концами которой служат данные точки.

6. Через любую хорду шара можно провести только один большой круг, за исключением того случая, когда хорда является диаметром шара, так как через диаметр шара можно провести бесчисленное множество больших кругов.

§ 4. Касательные к шару.

Задача 1. Провести касательную к шару в данной на его поверхности точке K .

Решение. Соединив точку K с центром O шара, проводим через точку K (рис. 186) прямую AB , перпендикулярную к OK , радиусу шара. Эта прямая AB и будет искомой касательной к шару.

В самом деле, проведем через AB и центр O шара плоскость: она пересечет шар по большому кругу; радиус круга $OK \perp AB$, а потому AB имеет только одну общую точку K с окружностью большого круга, следовательно и с поверхностью шара, а потому является касательной к шару. Но AB — не единственный перпендикуляр к радиусу OK в конце его K , лежащем на поверхности шара. Через точку K к радиусу OK можно провести бесчисленное

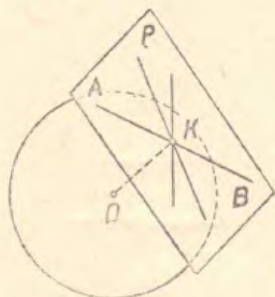


Рис. 186.

множество перпендикуляров, касательных к шару; все они лежат в одной плоскости, перпендикулярной к OK , а именно в касательной плоскости P , проведенной через точку K .

Задача 2. Дан шар с центром O и вне его прямая MN . Провести к шаровой поверхности касательную, параллельную данной прямой MN (рис. 187).

Решение. Проводим через центр O шара диаметр $AB \parallel MN$ и большой круг CD перпендикулярно к диаметру AB . В какой-либо точке C большого круга проводим затем прямую EF , перпендикулярную к плоскости круга, тогда $EF \perp OC$. Прямая EF — касательная к шару.

Перемещая прямую EF вокруг AB так, чтобы она все время оставалась параллельной диаметру AB и касалась окружности CD большого круга, получим цилиндрическую поверхность, любая образующая которой является касательной к шару, параллельной данной прямой MN .

Задача 3. Из внешней точки M провести касательную к поверхности шара с центром O .

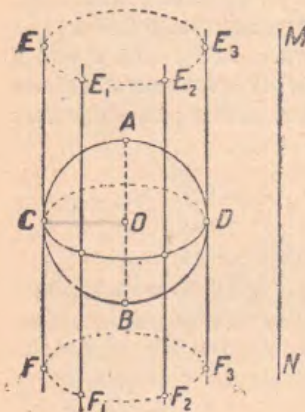


Рис. 187.

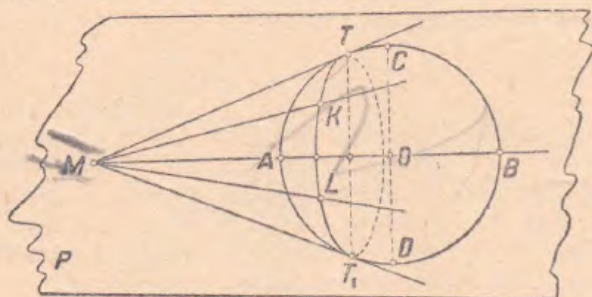


Рис. 188.

Решение. Проводим через данную точку M и центр O шара плоскость P ; пусть это будет плоскость чертежа. Эта плоскость пересечет шаровую поверхность по большому кругу T_1BTA (рис. 188). Проведем из точки M к окружности этого большого круга касательные MT и MT_1 ; эти касательные являются касательными к поверхности шара.

Вращая касательную MT вокруг OM так, чтобы она все время проходила через точку M и скользила по малому кругу TT_1 , получим коническую поверхность, все образующие которой касаются поверхности шара по малому кругу с диаметром TT_1 ; при этом $MT = MK = ML = MT_1$ и т. д.

Мы получили так называемый конус касания. По мере удаления точки M от центра шара конус касания вытягивается, окружность касания TT_1 увеличивается, и в предельном случае, когда точка M будет бесконечно далеко отстоять от центра, конус касания обратится в цилиндр касания, и тогда окружность касания обратится в окружность большого круга.

По мере приближения точки M к поверхности шара окружность касания уменьшается, и в предельном случае, когда точка M окажется на поверхности шара, окружность касания обращается в точку касания; образующие конуса касания, оставаясь касательными к шару, будут лежать в плоскости, касательной к шару.

Задача 4. Провести к шару касательную плоскость, параллельную данной плоскости.

Решение. Из центра O шара проводим перпендикуляр к данной плоскости и продолжаем его за центр O до пересечения с поверхностью шара. Через точки пересечения этого перпендикуляра с шаровой поверхностью проводим затем две плоскости, перпендикулярные к нему. Обе проведенные плоскости являются плоскостями, касательными к шару и параллельными данной плоскости.

§ 5. Части шара.

1. Часть шара, отсекаемая от него какою-либо плоскостью, называется шаровым сегментом (рис. 189 и 190). $АМА_1$ — шаровой сегмент. Шаровой сегмент ограничен частью поверхности шара и кругом; круг называется его основанием; радиус OM , перпендикулярный к основанию, пересекает кривую поверхность сегмента в точке M , которая называется вершиной сегмента; расстояние KM от вершины сегмента до его основания называется высотой h сегмента. Плоскость рассекает шар на два шаровых сегмента.

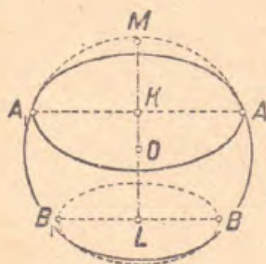


Рис. 189.

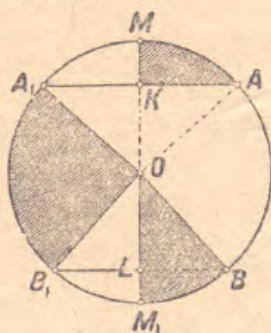


Рис. 190.

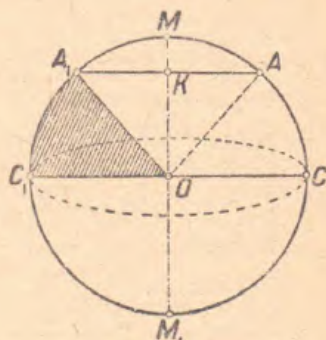


Рис. 191.

2. Если пересечь шар двумя параллельными плоскостями, то часть шара, заключенная между ними, называется шаровым слоем (рис. 189). Шаровой слой AA_1B_1B ограничен частью поверхности шара и двумя кругами AA_1 и BB_1 ; эти круги называются основаниями шарового слоя, а часть шаровой поверхности, заключенная между основаниями слоя, называется шаровым поясом, или зоной.

3. Если принять основание AA_1 сегмента $АМА_1$ за основание конуса с вершиной в центре O (рис. 190), то этот конус AOA_1 вместе с шаровым сегментом $АМА_1$ образует тело, называемое шаровым сектором.

4. Шаровой сегмент, шаровой слой и шаровой сектор могут быть получены вращением части круга около его диаметра.

Дан круговой сегмент $АМА_1$ (рис. 190); вращая половину его $МКА$ вокруг диаметра $ММ_1$, перпендикулярного к хорде AA_1 сегмента, получим шаровой сегмент; KA — радиус его основания, а проекция дуги MA на диаметр, т. е. MK — высота h сегмента.

Вращая круговой сектор $ВОМ_1$ (рис. 190) вокруг одного из крайних радиусов, например OM_1 , получаем шаровой, или сферический, сектор. M_1L — проекция дуги BM_1 на ось вращения — есть высота сектора; эта высота является одновременно высотой шарового сегмента,

соответствующего данному шаровому сектору. При вращении кругового сектора, дуга которого равна 90° , вокруг одного из его радиусов получается полушар.

5. Шаровой сектор, получаемый вращением кругового сектора вокруг одного из его крайних радиусов, называется сектором первого рода. Сектор второго рода получается при вращении кругового сектора A_1OB_1 (рис. 190) вокруг диаметра круга, если при этом диаметр круга не пересекает сектор и не совпадает ни с одним из его крайних радиусов. Сектор второго рода можно рассматривать как шаровой слой AA_1B_1B , из которого вынуты два конуса AOA_1 и BOB_1 , или как шар с двумя вынутыми секторами первого рода. Если один из крайних радиусов, например OC_1 , кругового сектора (рис. 191) перпендикулярен к оси вращения, то для получения объема шарового сектора второго рода нужно из объема слоя вычесть объем только одного конуса. В последнем случае объем шарового сектора можно рассматривать и как разность между объемом полушара C_1MC и объемом сектора AMA_1O первого рода.

Высотой KL сектора второго рода (рис. 190) называется проекция его дуги A_1B_1 на диаметр; высота KL сектора второго рода является одновременно и высотой слоя.

§ 6. Поверхность шара.

За поверхность шара принимается предел, к которому стремится поверхность, получаемая при вращении правильной вписанной в полуокружность ломаной линии вокруг диаметра полуокружности при неограниченном удвоении числа ее сторон.

Теорема. Поверхность шара равна учетверенной площади его большого круга.

Дано: R — радиус шара (рис. 192).

Требуется доказать: $S_{ш} = 4\pi R^2 = \pi D^2$.

Доказательство. Пусть полуокружность разделена на n равных дуг и концы их соединены хордами. Обозначим апофему ломаной линии через a . Проекция ломаной на диаметр равна диаметру $2R$.

$$S_{ABCDEFGH} = 2\pi a \cdot 2R.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim S_{ABCDEFGH} = \lim (4\pi R \cdot a) = \lim 4\pi R \cdot \lim a.$$

Согласно определению $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{ABCDEFGH} = S_{ш}$;

$$\lim a = R \text{ и } \lim 4\pi R = 4\pi R$$

а потому

$$S_{ш} = 4\pi R^2 = \pi D^2 \text{ кв. единиц.}$$

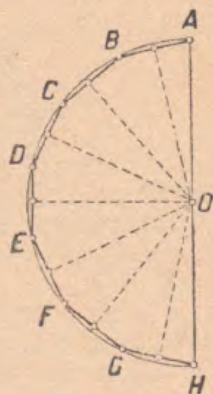


Рис. 192.

Следствие. Поверхности двух шаров относятся как квадраты их радиусов или диаметров.

$$S_1 = 4\pi R_1^2 = \pi D_1^2 \text{ и } S_2 = 4\pi R_2^2 = \pi D_2^2;$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

Задача. Даны полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды S и радиус вписанного в нее шара R . Вычислить объем пирамиды.

Решение. Шар, вписанный в пирамиду, касается всех ее граней, и центр его O отстоит от каждой грани пирамиды на расстоянии, равном радиусу шара. Соединив центр O шара со всеми пятью вершинами пирамиды, разобьем данную четырехугольную пирамиду на пять пирамид с общей вершиной в центре O шара. Высота каждой малой пирамиды равна радиусу вписанного шара; основаниями малых пирамид служат четыре боковых грани и основание данной пирамиды. Обозначив площадь боковой грани пирамиды через q , а площадь основания через Q , имеем:

$$V_n = 4 \cdot \frac{1}{3} q \cdot R + \frac{1}{3} QR = \frac{1}{3} R (4q + Q) = \frac{1}{3} SR,$$

так как

$$S = 4q + Q.$$

§ 7. Поверхности частей шара.

Теорема. Кривая поверхность шарового сегмента или шарового слоя равна произведению длины окружности большого круга шара на высоту сегмента или слоя.

Дано: R — радиус шара, h — высота сегмента или слоя (рис. 193).

Требуется доказать: 1) $S_{\text{сегм}} = 2\pi R h$ и 2) $S_{\text{сл}} = 2\pi R h$.



Рис. 193.

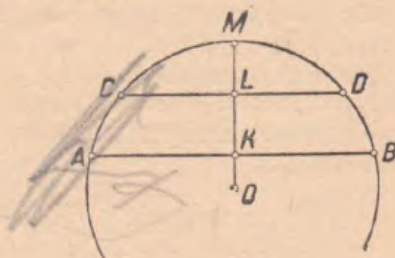


Рис. 194.

Доказательство. 1) Пусть ACB — круговой сегмент, AB — хорда сегмента и OC — радиус, перпендикулярный к хорде AB . Разделим дугу AC на n равных дуг и соединим концы их хордами. Тогда

$$S_{ALKC} = 2\pi a \cdot CM,$$

где a — апофема ломаной $ALKC$ и $CM = h$ — высота сегмента. За кривую поверхность сегмента принимается предел поверхности, образованной вращением правильной ломаной, вписанной в дугу AC кругового сегмента, равной половине дуги ACB сегмента, при неограниченном удвоении числа сторон ломаной.

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{ALKC} = \lim 2\pi a h = \lim 2\pi h \cdot \lim a,$$

откуда

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi h \cdot R = 2\pi R h \text{ кв.ед.}$$

2) Проведем в окружности две параллельные хорды, $CD \parallel AB$, и радиус $OM \perp CD$ и AB (рис. 194). Вращая фигуру $KLCA$, ограниченную отрезками KA , KL , LC и дугой CA , вокруг радиуса OM , получим

шаровой слой. Дуга AC описывает кривую поверхность слоя, или шаровой пояс. Разделим дугу AC на n равных дуг и соединим концы их хордами, тогда на основании рассуждений, аналогичных приведенным выше, находим:

$$S_{\text{пояса}} = 2\pi R h \text{ кв. ед.}$$

§ 8. Объем шара.

Теорема. Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Дано: шар радиуса R (рис. 195).

Требуется доказать: $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство I. Разделим шар плоскостью, проходящей через его центр, на два полушара и вычислим объем одного полушара. Для этого разделим его высоту, равную R — радиусу шара, на n равных частей и проведем через точки деления сечения, параллельные основанию полушара; тогда полушар разобьется на n слоев; высота h каждого слоя равна $\frac{R}{n}$, $h = \frac{R}{n}$.

Объемом полушара называется предел, к которому стремится сумма объемов вписанных в него цилиндров при неограниченном увеличении числа n .

Пусть первое от основания полушара сечение служит основанием цилиндра, стоящего на основании полушара.

Обозначим радиус KB основания этого цилиндра через r_1 и выразим объем цилиндра $v_1 = \pi r_1^2 h$ через радиус R шара.

Из прямоугольного треугольника KOB , катет которого $KB = r_1$, имеем:

$$KB^2 = OB^2 - OK^2 \text{ или } r_1^2 = R^2 - \frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{n^2}(n^2 - 1),$$

а потому

$$v_1 = \pi r_1^2 h = \pi \frac{R^2}{n^2}(n^2 - 1) \frac{R}{n} = \frac{\pi R^3}{n^3}(n^2 - 1).$$

Второе от основания полушара сечение будет основанием цилиндра, стоящего на первом цилиндре; вычислим его радиус $LC = r_2$ и объем. Из прямоугольного треугольника OLC находим:

$$LC^2 = OC^2 - OL^2,$$

или

$$r_2^2 = R^2 - \left(\frac{2R}{n}\right)^2 = R^2 - \frac{4R^2}{n^2} = \frac{R^2}{n^2}(n^2 - 4);$$

следовательно, объем второго цилиндра

$$v_2 = \pi r_2^2 h = \pi \frac{R^2}{n^2}(n^2 - 4) \frac{R}{n} = \frac{\pi R^3}{n^3}(n^2 - 2^2).$$

Дальнейшее построение цилиндров и вычисление их объемов даст:

$$v_3 = \pi r_3^2 h = \pi \frac{R^2}{n^2}(n^2 - 9) \frac{R}{n} = \frac{\pi R^3}{n^3}(n^2 - 3^2);$$

$$v_4 = \pi r_4^2 h = \pi \frac{R^2}{n^2}(n^2 - 16) \frac{R}{n} = \frac{\pi R^3}{n^3}(n^2 - 4^2) \text{ и т. д.}$$

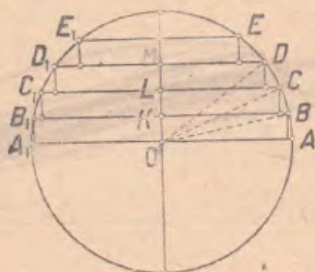


Рис. 195.

Объем последнего $(n - 1)$ -го цилиндра

$$v_{n-1} = \frac{\pi R^3}{n^3} [n^2 - (n-1)^2].$$

Таким образом, сумма объемов всех $(n-1)$ цилиндров равна:

$$\begin{aligned} & v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1} = \\ &= \frac{\pi R^3}{n^3} \{ (n^2 - 1) + (n^2 - 2^2) + (n^2 - 3^2) + \dots + [n^2 - (n-1)^2] \} = \\ &= \frac{\pi R^3}{n^3} [n^2 - 1 + n^2 - 2^2 + n^2 - 3^2 + \dots + n^2 - (n-1)^2] = \\ &= \frac{\pi R^3}{n^3} \{ n^2(n-1) - [1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] \}, \quad \star \end{aligned}$$

так как n^2 входит в данную сумму слагаемым $(n-1)$ раз. Но

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6},$$

а потому

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1} &= \frac{\pi R^3}{n^3} \left[n^2(n-1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \\ &= \frac{\pi R^3}{n^2} \cdot \frac{6n^3 - 6n - 2n^2 + 2n + n - 1}{6} = \frac{\pi R^3}{6} \cdot \frac{4n^3 - 3n - 1}{n^2} = \frac{\pi R^3}{6} \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

4) Полагая в формуле

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 1 + 3a \cdot 1^2 + 1^3 \quad a=0; 1; 2; \dots n,$$

получаем:

$$1^3 = (0 + 1)^3 = 1^3$$
$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1^3$$
$$3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1^3$$
$$4^3 = (3 + 1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1^3$$
$$\dots\dots\dots$$
$$1)^3 = (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1^3$$

Складывая почленно левые и правые части, имеем:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1.$$

откуда

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Поэтому

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n - 1 \right] = \frac{1}{3} \left(n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \right) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

ИТАК,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

откуда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{6} (n-1) n (2n-2+1), \text{ T.K. } 3900$$

При увеличении числа n дроби $\frac{3}{n}$ и $\frac{1}{n}$ становятся все меньше и меньше, и при бесконечно большом n они становятся бесконечно малыми, имеющими своим пределом нуль. Объем полушара есть предел суммы объемов всех цилиндров при $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{1}{2} V_{ш} = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^3}{6} \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi R^3}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \pi R^3;$$

следовательно, объем шара

$$V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3 \quad \text{куб. единиц,}$$

где D — диаметр шара.

Доказательство II (на основании теоремы Кавальери).

Возьмем полушар радиуса R и цилиндр, радиус основания и высота которого также равны R ; в цилиндр вписан конус, основанием которого служит верхнее основание цилиндра и вершиной — центр нижнего основания цилиндра (рис. 196); основания полушара и цилиндра лежат в одной плоскости.

Сравним объем полушара с объемом тела, представляющего собою цилиндр, из которого вынут конус. Проводим в обоих телах сечения, параллельные их основаниям, на расстоянии h от основания.

Сечение полушара есть круг, а сечение цилиндра с вынутым конусом — кольцо. Площадь круга равна πr^2 , площадь кольца равна $\pi(R^2 - r_1^2)$, где r_1 — радиус сечения конуса.

Из треугольника OFC имеем: $r^2 = R^2 - h^2$; из равнобедренного треугольника $O_1C_2O_2$ имеем: $r_1 = h$. Значит $r^2 = R^2 - r_1^2$, а потому $\pi r^2 = \pi(R^2 - r_1^2)$, т. е. площадь круга равна площади кольца.

Таким образом, полушар и цилиндр с вынутым конусом удовлетворяют условию теоремы Кавальери, а потому они равновелики и

$$\frac{V_{ш}}{2} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \pi R^2 R = \frac{2}{3} \pi R^3, \quad \text{откуда } V_{ш} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

III. Применение к вычислению объема шара формулы Ньютона-Симпсона:

$$V = \frac{1}{6} H (Q + q + Q_{cp}).$$

Высота шара $H = 2R$, $Q = 0$, $q = 0$ и $Q_{cp} = \pi R^2$, а потому

$$V_{ш} = \frac{1}{6} \cdot 2R (0 + 0 + 4\pi R^2) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Следствие. Объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов или их диаметров.

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 = \frac{1}{6} \pi D_1^3 \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 = \frac{1}{6} \pi D_2^3.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_1^3}{\frac{4}{3} \pi R_2^3} = \frac{R_1^3}{R_2^3}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6} \pi D_1^3}{\frac{1}{6} \pi D_2^3} = \frac{D_1^3}{D_2^3}.$$

§ 9. Объемы частей шара.

Задача 1. Даны шаровой сегмент AMB шара радиуса R , высота шарового сегмента $MC = h$ (рис. 197). Вычислить его объем.

Решение. Делим высоту $MC = h$ на n равных частей и проводим через точки деления сечения, параллельные основанию AB сегмента; эти сечения рассекают шаровой сегмент на n слоев; высота каждого слоя равна $\frac{h}{n}$. Пусть первое от основания AB сегмента сечение A_1B_1 служит основанием цилиндра, стоящего на основании сегмента; обозначив радиус A_1C_1 основания цилиндра через r_1 , определяем объем V_1 цилиндра:

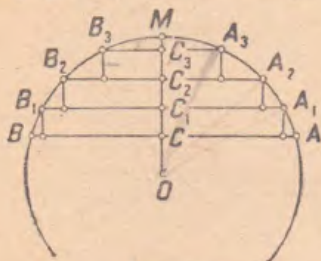


Рис. 197.

$$V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot \frac{h}{n}.$$

Пусть второе сечение A_2B_2 служит основанием второго цилиндра, стоящего на втором сечении; обозначив радиус основания второго цилиндра через r_2 , находим его объем V_2 :

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot \frac{h}{n}.$$

Вписывая указанным построением третий, четвертый и т. д. цилиндры и обозначая радиусы их оснований соответственно через $r_3, r_4, \dots, r_{n-1}$, находим их объемы $V_3, V_4, \dots, V_{n-1}$:

$$V_3 = \pi r_3^2 \cdot \frac{h}{n}; \quad V_4 = \pi r_4^2 \cdot \frac{h}{n}; \quad \dots \quad V_{n-1} = \pi r_{n-1}^2 \cdot \frac{h}{n}.$$

Сумма объемов всех вписанных в сегмент $(n-1)$ цилиндров равна:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{n-1} = \pi \cdot \frac{h}{n} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-2}^2 + r_{n-1}^2).$$

Определяем радиусы цилиндров из прямоугольных треугольников $OC_1A_1, OC_2A_2, OC_3A_3, \dots$

$$r_{n-1}^2 = R^2 - \left(R - \frac{h}{n}\right)^2 = R^2 - R^2 + 2R \frac{h}{n} - \frac{h^2}{n^2} = 2R \frac{h}{n} - \frac{h^2}{n^2};$$

$$r_{n-2}^2 = R^2 - \left(R - \frac{2h}{n}\right)^2 = R^2 - R^2 + 2R \frac{2h}{n} - \frac{4h^2}{n^2} = 2R \frac{2h}{n} - \frac{4h^2}{n^2};$$

$$r_{n-3}^2 = R^2 - \left(R - \frac{3h}{n}\right)^2 = 2R \cdot \frac{3h}{n} - \frac{9h^2}{n^2};$$

.....

$$r_2^2 = R^2 - \left[R - \frac{(n-2)h}{n}\right]^2 = 2R \frac{(n-2)h}{n} - \frac{(n-2)^2 h^2}{n^2};$$

$$r_1^2 = R^2 - \left[R - \frac{(n-1)h}{n}\right]^2 = 2R \frac{(n-1)h}{n} - \frac{(n-1)^2 h^2}{n^2}.$$

Итак, сумма квадратов радиусов:

$$\begin{aligned} & r_{n-1}^2 + r_{n-2}^2 + \dots + r_2^2 + r_1^2 = \\ & = \frac{2Rh}{n} [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] - \frac{h^2}{n^2} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = \\ & = \frac{2Rh}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{h^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = Rh(n-1) - \frac{h^2}{6n} (n-1)(2n-1), \end{aligned}$$

Следовательно, сумма объемов всех цилиндров:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} = \frac{\pi h}{n} \left[Rh(n-1) - \frac{h^2}{6n} (n-1)(2n-1) \right] = \\ = \pi h^2 \left[R \frac{n-1}{n} - \frac{h}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \right] = \pi h^2 \left[R \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{h}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right].$$

При неограниченном увеличении числа делений n высоты h сегмента предел суммы объемов вписанных в него цилиндров есть объем V сегмента.

Переходя к пределу, имеем:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

Получили формулу для вычисления объема шарового сегмента:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \quad \text{куб. единиц.}$$

Таким образом, шаровой сегмент равновелик цилиндру, радиус основания которого равен высоте h сегмента, а высота цилиндра меньше радиуса шара на одну треть высоты сегмента.

Если высота сегмента $h = R$, то сегмент — полушар. Определяя объем полушара по формуле объема шарового сегмента, имеем:

$$V_{\text{полуш.}} = \pi R^2 \left(R - \frac{R}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Тот же результат получаем, применяя для вычисления объема полушара формулу объема шара, а именно:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 : 2 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Задача 2. Даны шаровой сегмент высотой h и радиус шара R ; цилиндр с вынутым из него конусом, радиусы оснований и высоты которых равны R (рис. 198). Вычислить, пользуясь теоремой Кавальери, объем шарового сегмента.

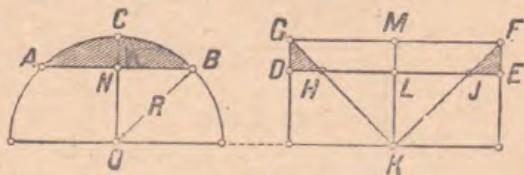


Рис. 198.

Решение. Сравним объемы двух тел: 1) шарового сегмента ACB и 2) тела, которое получается, если из цилиндра $DEFG$ вынуть усеченный конус $GHJF$. Эти два тела имеют одинаковую высоту h , и сечения, проведенные параллельно основаниям на одинаковом расстоянии от оснований, равновелики.

Следовательно, данные тела удовлетворяют условию теоремы Кавальери и равновелики, а потому

$$V_{\text{сегм}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{ус. кон}}$$

или

$$V_{\text{сегм}} = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h [R^2 + (R-h)^2 + R(R-h)] = \\ = \pi R h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3 = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

Если обозначить радиус основания сегмента через r , то имеем из прямоугольного треугольника ONB :

$$r^2 = R^2 - (R-h)^2 \quad \text{или} \quad r^2 = h(2R-h),$$

откуда

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Заменяя в формуле $V_{\text{сег.м}}$ радиус шара R через $\frac{h^2 + r^2}{2h}$, получаем:

$$V_{\text{сег.м}} = \pi h^2 \left(\frac{h^2 + r^2}{2h} - \frac{1}{3} h \right) = \frac{1}{6} \pi h (3r^2 + h^2).$$

Эта формула выражает объем шарового сегмента через радиус его основания r и его высоту h .

Задача 3. Дан шаровой сектор $OAMA_1$ шара радиуса R ; высота сектора $MK=h$ (рис. 198а). Вычислить его объем.

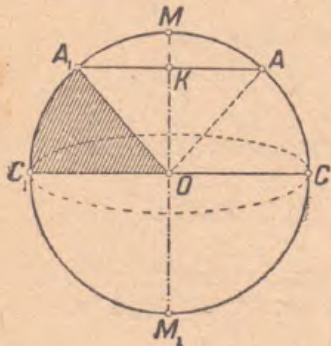


Рис. 198а.

Решение. Объем шарового сектора есть сумма объемов шарового сегмента AMA_1 и конуса OAA_1 , имеющих общее основание AA_1 , радиус которого r .

$$V_{\text{сег.м}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right); \quad V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 (R - h).$$

Определяем r^2 из треугольника OKA :

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2 = (2R - h) \cdot h.$$

Значит:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi h (2R - h) (R - h).$$

Таким образом, объем сектора

$$\begin{aligned} V_{\text{сект}} &= V_{\text{сег.м}} + V_{\text{кон}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) + \frac{1}{3} \pi h (2R - h) (R - h) = \\ &= \pi h \left[Rh - \frac{h^2}{3} + \frac{2}{3} R^2 - Rh + \frac{h^2}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi R^2 h. \end{aligned}$$

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h \quad \text{куб. единиц.}$$

Если $h=2R$, то сектор есть шар, и, применяя формулу для объема сектора, получаем формулу объема шара:

$$V_{\text{ш}} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot 2R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Задача 4. Дан шаровой слой ABB_1A_1 шара радиуса R . Радиусы оснований шарового слоя равны r_1 и r_2 , высота слоя $KL=h$. Вычислить его объем (рис. 199).

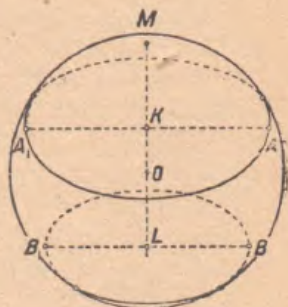


Рис. 199.

Решение. Шаровой слой ABB_1A_1 есть разность двух шаровых сегментов BMB_1 и AMA_1 . Обозначив через h_1 и h_2 высоты шаровых сегментов, вычислим их объемы, а затем объем шарового слоя:

$$\begin{aligned} V_{\text{шар. сл}} &= \pi h_1^2 \left(R - \frac{h_1}{3} \right) - \pi h_2^2 \left(R - \frac{h_2}{3} \right) = \pi \left(Rh_1^2 - \frac{h_1^3}{3} - Rh_2^2 + \frac{h_2^3}{3} \right) = \\ &= \pi \left[R(h_1^2 - h_2^2) - \frac{h_1^3 - h_2^3}{3} \right] = \pi (h_1 - h_2) \left[R(h_1 + h_2) - \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3} \right] = \\ &= \pi h \left[R(h_1 + h_2) - \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3} \right], \quad \text{так как } h_1 - h_2 = h. \end{aligned}$$

Но $r_1^2 = (2R - h_1) h_1 = 2Rh_1 - h_1^2$ и $r_2^2 = (2R - h_2) h_2 = 2Rh_2 - h_2^2$.

Суммируя почленно последние два равенства, находим:

$$r_1^2 + r_2^2 = 2R(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_2^2),$$

откуда

$$R(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + h_1^2 + h_2^2).$$

Подставив $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + h_1^2 + h_2^2)$ вместо $R(h_1 + h_2)$ в выражение для объема шарового слоя, получим:

$$\begin{aligned} V_{ш. сл} &= \pi h \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + h_1^2 + h_2^2}{2} - \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \pi h (3r_1^2 + 3r_2^2 + 3h_1^2 + 3h_2^2 - 2h_1^2 - 2h_1 h_2 - 2h_2^2) = \\ &= \frac{1}{6} \pi h [3r_1^2 + 3r_2^2 + (h_1 - h_2)^2] = \frac{1}{6} \pi h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2), \end{aligned}$$

так как

$$h_1 - h_2 = h.$$

При $r_2 = 0$ шаровой слой представляет собою шаровой сегмент. Если в формуле объема шарового слоя

$$V_{ш. сл} = \frac{1}{6} \pi h (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) \quad \text{куб. единиц}$$

принять $r_2 = 0$, то получим формулу объема шарового сегмента:

$$V_{ш. сегм.} = \frac{1}{6} \pi h (3r_1^2 + h^2),$$

где r_1 — радиус основания сегмента, а h — высота сегмента. Та же формула была получена в задаче 2.

Если и $r_2 = 0$ и $r_1 = 0$, а $h = 2R$, то шаровой слой обратится в полный шар, и получится формула объема шара. В самом деле,

$$V_{ш} = \frac{1}{6} \pi \cdot 2R \cdot (2R)^2 = \frac{1}{3} \pi R \cdot 4R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Задача 5. Дан шаровой сегмент шара радиуса R , высота сегмента h . Вычислить объем шарового сегмента, пользуясь формулой Ньютона-Симпсона

Решение. Пусть радиус AK основания сегмента ACB (рис. 200) равен r а радиус LM среднего сечения, параллельного основанию, равен x ; тогда $Q = \pi r^2$ $Q_{ср} = \pi x^2$, а $q = 0$, и по формуле Ньютона-Симпсона имеем:

$$V_{ш. сегм.} = \frac{1}{6} h (\pi r^2 + 4\pi x^2) = \frac{1}{6} \pi h (r^2 + 4x^2).$$

Расстояние $DK = 2R - h$, а расстояние от конца D диаметра CD до среднего сечения равно $2R - \frac{h}{2}$, а потому на основании свойства двух пересекающихся хорд находим;

$$\begin{aligned} r^2 &= (2R - h) h = 2Rh - h^2, \\ x^2 &= \left(2R - \frac{h}{2} \right) \frac{h}{2} = Rh - \frac{h^2}{4}; \end{aligned}$$

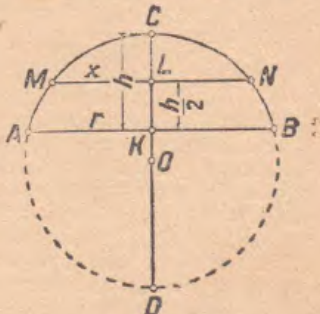


Рис. 200.

следовательно:

$$V_{ш. сегм} = \frac{1}{6} \pi h (2Rh - h^2 + 4Rh - h^2) = \frac{1}{6} \pi h (6Rh - 2h^2),$$

или

$$V_{ш. сегм} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \text{ куб. ед.}$$

Задача 6. Даны круг радиуса R и вне круга прямая MN на расстоянии $a > R$ от центра круга; прямая MN лежит в плоскости круга. Вычислить поверхность и объем тела, получаемого при вращении круга вокруг оси MN (рис. 200а).

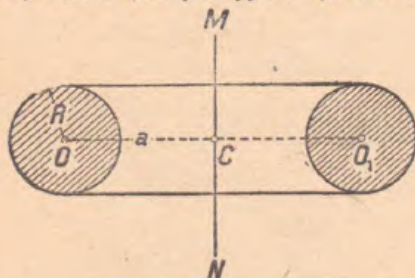


Рис. 200а.

Решение. Условия для возможности применения теоремы Гюльдена налицо, а потому поверхность тела вращения

$$S_m = 2\pi R \cdot 2\pi a = 4\pi^2 a R \text{ кв. ед.}$$

и объем тела вращения

$$V_m = \pi R^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 a R^2 \text{ куб. ед.}$$

Тело это называется тором.

Вопросы и упражнения.

1. Во сколько раз увеличится объем шара, если радиус его увеличить в 2 раза? в 3 раза? и вообще в m раз? Если радиус его R увеличить на единицу длины? на n единиц?

2. Как изменится радиус шара, если объем его увеличить вдвое? втрое? в m раз? уменьшить вдвое? втрое? в n раз?

3. Даны цилиндр, шар и конус; радиусы шара и оснований конуса и цилиндра равны R , а высоты конуса и цилиндра равны $H = 2R$. Найти отношение объемов этих тел (задача Архимеда).

4. В цилиндрический сосуд с водою брошен свинцовый шар; радиус цилиндра $r = 8,5$ см; а радиус шара $R = 4,5$ см. На сколько поднимется вода в сосуде?

5. Вычислить объем полого шара, если известно, что внешний диаметр его d_1 , а внутренний d_2 .

6. Чугунные шары регулятора весят каждый 10 кг. Найти их диаметр. Удельный вес чугуна равен 7,2.

7. Шар вписан в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой $H = 40$ см, а сторона основания $a = 60$ см. Найти объем шара.

8. Объем конуса или цилиндра, в который можно вписать шар, равен произведению полной поверхности его на треть радиуса вписанного в него шара. Доказать.

9. Доказать то же (см. задачу 8) для правильной пирамиды, правильной усеченной пирамиды, правильного октаэдра и усеченного конуса, в который можно вписать шар.

10. Как изменится поверхность шара, если радиус его R увеличить на 1, на 2 и т. д., вообще на n единиц длины?

11. Чему равна полная поверхность полушара радиуса R ?

12. Поверхность и объем шара численно равны. Найти радиус шара.

13. Полная поверхность S цилиндра равна 9420 см². В цилиндр вписан шар. Вычислить поверхность шара и боковую поверхность цилиндра.

14. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Высота пирамиды h и плоский угол при вершине ее α . Найти поверхность шара.

15. Найти поверхность сегмента, высота которого $h = 40$ см, если известно, что диаметр шара равен 2,0 м.

16. Сосуд в форме цилиндра заканчивается шаровым сегментом, высота которого 30,0 см. Найти объем и поверхность сосуда, если известно, что диаметр цилиндра 16,0 см и высота цилиндрической части 80,0 см.

17. Площадь основания конуса, поверхность вписанного шара и боковая поверхность конуса составляют разностную прогрессию. Найти наибольший угол между образующими конуса.

XIV. ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР И ТЕЛ. СЕЧЕНИЯ ТЕЛ ПЛОСКОСТЯМИ.

§ 1. Правила изображения фигур.

1. Чем дальше находится от нас предмет, тем меньшим он нам кажется. Расставленные вдоль дороги телеграфные столбы (рис. 201), хотя и имеют, примерно, одинаковую высоту, но кажутся нам тем меньшими, чем дальше они от нас; параллельно идущие телеграфные провода кажутся нам сходящимися в одной точке O .

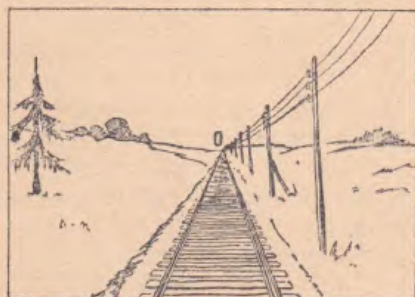


Рис. 201.



Рис. 201а.

Сходящимися кажутся нам и края дорожки на рисунке 201а, где изображена аллея возле могил коммунаров у Кремлевской стены в Москве (вдали мавзолей Ленина).

Такого рода изображения называются перспективными.

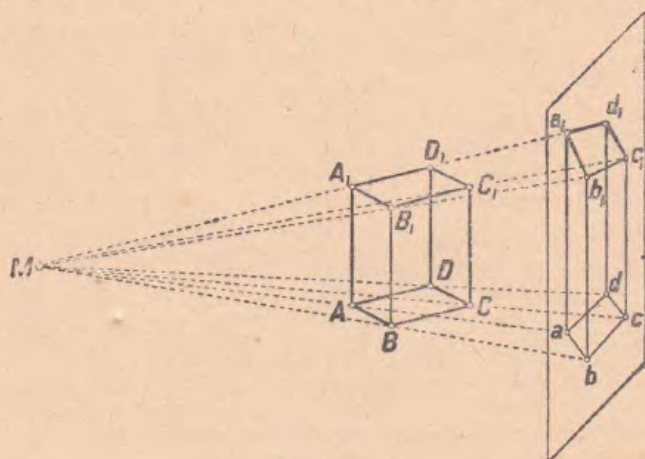


Рис. 202.

2. На рисунке 202 изображена проволочная модель призмы, на которую падают лучи от источника света M ; за призмой помещен экран. Тень от ребер призмы дает на экране изображение призмы. Такой способ

изображения тела на плоскости называется проектированием. Лучи MAa , MBb и т. д. называются проектирующими лучами, точка M — центром проекции, само же изображение тела на экране —

центральной проекцией тела.

Изображения эти весьма наглядны, так как тело изображено на экране таким, каким оно кажется глазу наблюдателя, помещенному в точке M .

Можно поместить экран (прозрачный) и между глазом наблюдателя и призмой (рис. 203); в этом

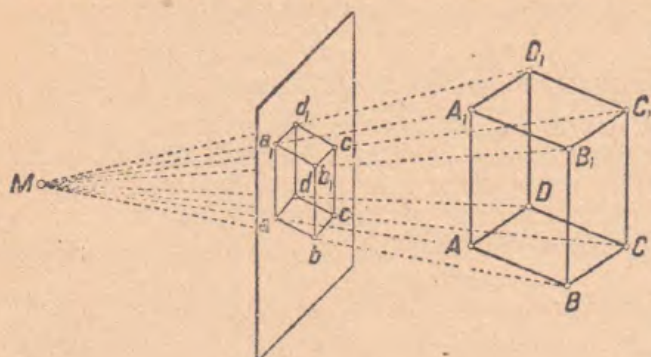


Рис. 203

случае изображение призмы на экране будет уменьшенным.

Изображения тел в центральной перспективе дают наглядное представление о их форме; однако по таким изображениям трудно установить точные размеры тела и его элементов.

3. Если источник света находится очень далеко от тела, то проектирующие лучи принимаются за параллельные, и в таком случае говорят о параллельном проектировании. Если, кроме того, лучи падают на плоскость проекций — экран — под прямым углом, т. е. перпендикулярно к нему, то получаемая проекция называется прямоугольной, или ортогональной (рис. 204).

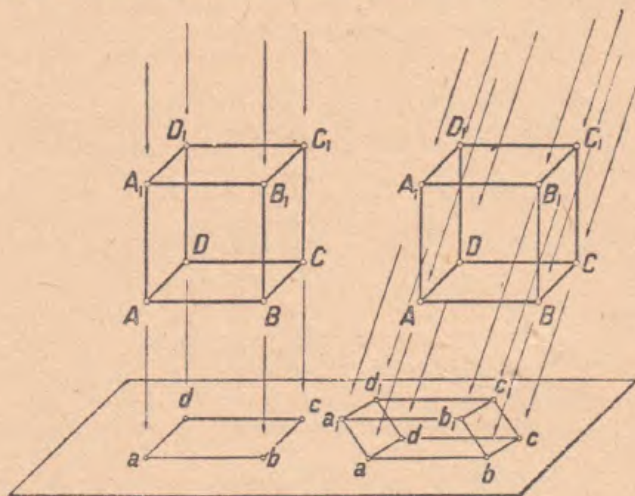


Рис. 204.

Рис. 204а.

Если параллельно идущие лучи падают на плоскость проекции не под прямым углом (рис. 204а), то проекция называется косоугольной.

По прямоугольным проекциям определяют точные размеры тела.

4. В дальнейшем будем изображать фигуры и тела так, чтобы:
1) получить наглядное представление о них и 2) иметь возможность определить по данным изображениям размеры элементов фигур и тел.

5. Рассмотрим куб, изображенный на рисунке 205 в косоугольной параллельной проекции.

Куб есть многогранник — шестигранник, ограниченный 6-ю равными квадратами — гранями. Он изображен на вертикальной плоскости. Куб поставлен на горизонтальную плоскость, причем так, что его передняя грань, следовательно, и задняя параллельны плоскости чертежа.

Из чертежа видно:

1) проекции параллельных отрезков — ребер куба — также параллельны:
так

$$A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2 \parallel D_1D_2; \quad A_1B_1 \parallel A_2B_2 \dots; \quad A_1D_1 \parallel A_2D_2 \dots;$$

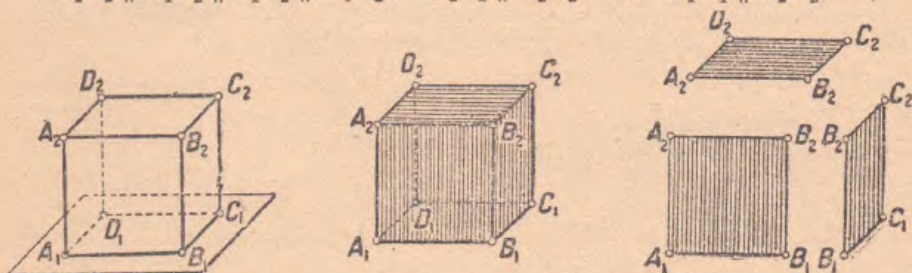


Рис. 205.

2) отрезки, параллельные плоскости чертежа, проектируются на плоскость чертежа без сокращения, в их натуральную величину:

$$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2; \quad A_2B_2 = D_2C_2 \dots;$$

3) отрезки, перпендикулярные к плоскости чертежа, A_1D_1 , B_1C_1 , A_2D_2 и B_2C_2 , сокращены и повернуты на некоторый угол;

4) проекции пересекающихся отрезков пересекаются;

5) отношение отрезков одного направления сохраняется и для их проекций.

6. Для получения четкого изображения пространственной фигуры или тела необходимо иметь в виду перечисленные выше условия.

Приступая к изготовлению чертежа, устанавливают:

1) масштаб $1:n$, в котором выполняется чертеж;

2) угол φ , на который повернуты отрезки, перпендикулярные к вертикальной плоскости. Этот угол поворота называется углом сокращения;

3) отношение k , в котором сокращаются отрезки, перпендикулярные к вертикальной плоскости. Отношение это называется коэффициентом сокращения.

За угол сокращения обычно принимается угол $\varphi = 45^\circ$ (30° ; 60°) или дополнительный к нему угол 135° (150° ; 120°); коэффициент сокращения k обычно принимается равным $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$).

На рисунке 205 изображен куб, ребро которого равно 15 см; масштаб $1:10$; $\varphi = 45^\circ$ и $k = \frac{1}{2}$.

§ 2. Изображение на плоскости чертежа плоских фигур, расположенных в горизонтальной плоскости.

1. Задача 1. Прямоугольник со сторонами $a=10$ см и $b=6$ см расположен в горизонтальной плоскости; сторона $AB=a$ параллельна вертикальной плоскости проекций. Построить изображение прямоугольника в вертикальной плоскости чертежа. Масштаб $1:4$; $\varphi=45^\circ$ и $k=0,5$.

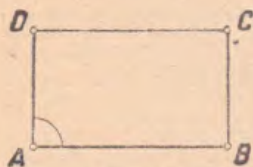


Рис. 206.

Решение. Начертим сначала прямоугольник $ABCD$ в масштабе $1:4$ (рис. 206). Затем на плоскости чертежа берем горизонтальную прямую MN (рис. 206а) и на ней отложим отрезок $A_1B_1=AB$; из точек A_1 и B_1 проводим под углом $\varphi=45^\circ$ прямые A_1D_1 и B_1C_1 и отложим на них отрезки $A_1D_1=0,5AD$ и $B_1C_1=0,5BC$. Соединив D_1 и C_1 прямой, получим изображение $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольника $ABCD$.



Рис. 206а.

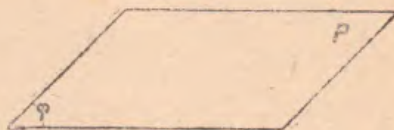


Рис. 206б.

Оно представляет собою параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами $A_1B_1=D_1C_1=AB=DC=2,5$ см; $A_1D_1=B_1C_1=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=0,75$ см и углом $D_1A_1B_1=0,5d$, т. е. половине угла DAB .

В виде параллелограмма с углом в 45° (рис. 206б) обычно изображают горизонтальную плоскость P .

Задача 2. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $a=12$ см и $b=9$ см расположен в горизонтальной плоскости. Диагональ его DB параллельна вертикальной плоскости проекций.

Дать изображение прямоугольника в вертикальной плоскости чертежа.

Решение. Начертим прямоугольник $ABCD$ в масштабе $1:4$; пусть диагональ его BD параллельна вертикальной плоскости чертежа, т. е. параллельна верхнему или нижнему краю листа или доски (рис. 207), и из вершин A и C проведены перпендикуляры AK и CL к диагонали BD .

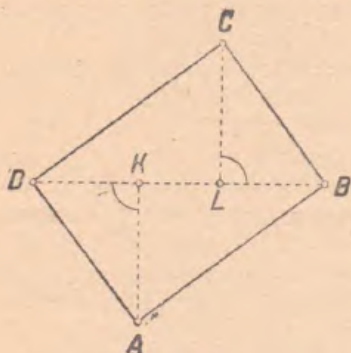


Рис. 207.

Построим затем горизонтальную плоскость P в виде параллелограмма с углом $\varphi=45^\circ$ (рис. 207а) и проведем на ней произвольную прямую MN , параллельную нижней стороне параллелограмма, изображающего плоскость.

Отложим на прямой MN отрезок $D_1B_1=DB$ и отметим на отрезке D_1B_1 точки K_1 и L_1 , соответствующие основаниям K и L перпендикуляров AK и CL . Через точки K_1 и L_1 проведем прямые K_1A_1 и L_1C_1 по обе стороны от D_1B_1 под углом

$\varphi = 45^\circ$ к D_1B_1 и отложим на них отрезки $K_1A_1 = 0,5 KA$ и $L_1C_1 = 0,5 LC$. Таким образом определено положение всех четырех вершин D_1, B_1, A_1 и C_1 изображения данного прямоугольника, начерченного на горизонтальной плоскости P ; соединив эти точки прямыми, получим искомое изображение $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольника.



Рис. 207а.

Указание. Можно было бы и не вычерчивать плоскости P . Однако это целесообразно, так как дает возможность проверить положение отрезков K_1A_1 и L_1C_1 , перпендикулярных к вертикальной плоскости, а потому параллельных боковым сторонам параллелограмма — изображения плоскости P .

На каждом рисунке необходимо отметить масштаб $1:n$, угол сокращения φ и коэффициент сокращения k .

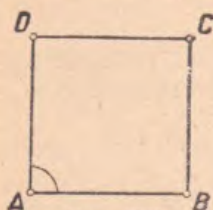


Рис. 208.

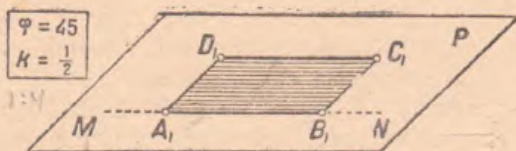


Рис. 208а.

2. На рисунке 208 изображен на горизонтальной плоскости квадрат, сторона которого $a = 8$ см, масштаб $1:4$. Сторона AB параллельна вертикальной плоскости; на рисунке 208а дано соответствующее изображение его на вертикальной плоскости при $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

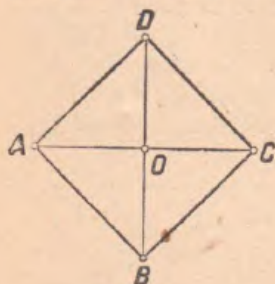


Рис. 209.

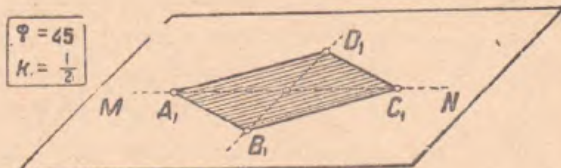


Рис. 209а.

На рисунке 209 дан в масштабе $1:4$ тот же квадрат, диагональ которого AC параллельна вертикальной плоскости; на рисунке 209а дано его изображение в плоскости чертежа при $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

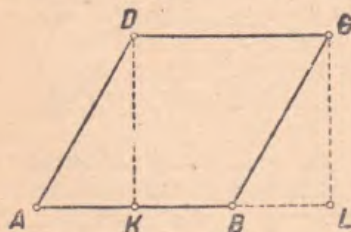


Рис. 210.

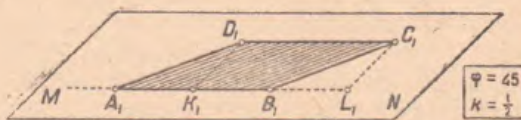


Рис. 210а.

На рисунках 210 и 211 дан ромб на горизонтальной плоскости в двух положениях: на первом — его сторона AB , на втором — его диагональ AC параллельны вертикальной плоскости. Сторона первого ромба $a = 7,5$ см, второго $b = 6$ см и угол ромба $\alpha = 60^\circ$. Масштаб в обоих случаях 1:3; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

На рисунках 210а и 211а даны соответствующие изображения ромба.

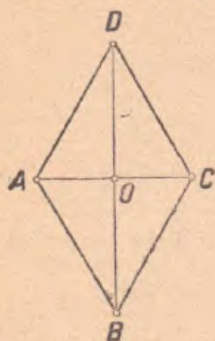


Рис. 211.

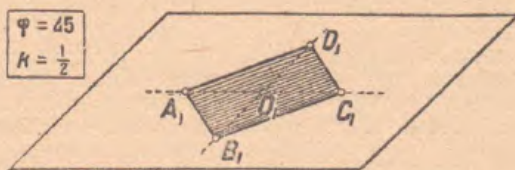


Рис. 211а.

3. Задача 3. На рисунке 212 дан многоугольник $ABCDE$, лежащий в горизонтальной плоскости. Построить изображение его в вертикальной плоскости чертежа при $\alpha = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

Решение. Проведем на рисунке 212 из вершины A прямую AL , параллельную вертикальной плоскости, и из вершин B, C, D и E перпендикуляры к прямой AL ; обозначим основания этих перпендикуляров через K, L, M и N .

На изображении горизонтальной плоскости (рис. 212а) проводим затем прямую OO_1 параллельно основанию параллелограмма, изображающего эту плоскость; на OO_1 отложим отрезок $A_1L_1 = AL$ и отметим на нем точки N_1, K_1, L_1 и M_1 , соответствующие точкам N, K, L и M . Через точки N_1, K_1, M_1 и L_1 проводим под углом $\varphi = 45^\circ$ к A_1L_1 прямые N_1E_1 и M_1D_1 по одну сторону от A_1L_1 , а K_1B_1 и L_1C_1 — по другую сторону от A_1L_1 .

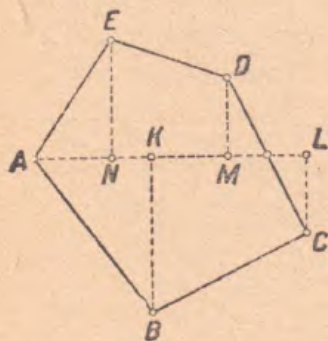


Рис. 212.

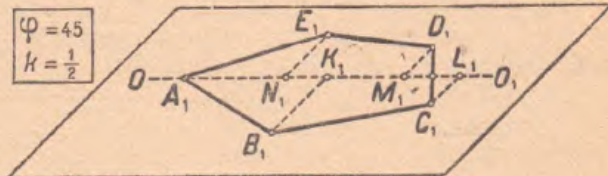


Рис. 212а.

Отложив на этих перпендикулярах отрезки $N_1E_1 = 0,5 NE$, $M_1D_1 = 0,5 MD$, $L_1C_1 = 0,5 LC$ и $K_1B_1 = 0,5 KB$, определяем положение вершин E_1, D_1, C_1 и B_1 изображения данного многоугольника $ABCDE$. Соединив эти точки прямыми, получим искомое изображение $A_1B_1C_1D_1E_1$ данного многоугольника $ABCDE$.

4. Задача 4. Круг O , диаметр которого $AB = 12$ см, расположен в горизонтальной плоскости (рис. 213); его диаметр параллелен вертикальной плоскости. Построить изображение круга в вертикальной плоскости чертежа. Масштаб 1:4; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

^А Решение. Проведем диаметр $CD \perp AB$ и разделим диаметр AB на некоторое число равных частей, например 8; через точки деления проводим хорды, параллельные CD , и, следовательно, перпендикулярные к AB . На прямой MN плоскости P (рис. 213а) отложим отрезок $A_1B_1 = AB$; разделим его также на 8 равных частей и через точки деления под углом $\varphi = 45^\circ$ к A_1B_1 проведем параллельные прямые, пересекающие A_1B_1 ; на них отложим по обе

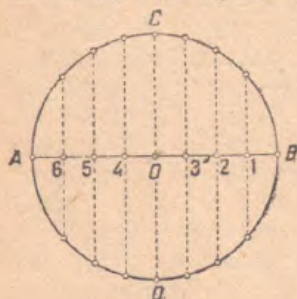


Рис. 213.

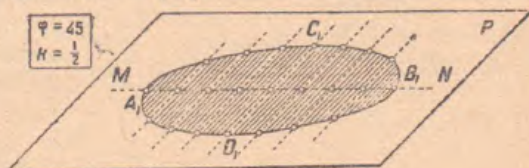


Рис. 213а.

стороны от A_1B_1 отрезки, равные половинам соответствующих хорд круга O , так, что хорды делятся диаметром A_1B_1 пополам. Соединив затем концы этих отрезков, соответствующие точкам окружности данного круга, одной непрерывной кривой линией с помощью лекала, получим изображение данного круга в плоскости чертежа. Заметим, что чем больше число частей, на которое разделен диаметр AB , а следовательно, и A_1B_1 , тем больше точек обозначится для изображения окружности.

5. Задача 5. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 214), сторона которого $a = 4$ см. Шестиугольник лежит в горизонтальной плоскости. Построить изображение шестиугольника в вертикальной плоскости при условии, что большая диагональ его BE параллельна вертикальной плоскости. Масштаб 1:2; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

Решение. Начертим сначала шестиугольник $ABCDEF$ в масштабе 1:2 и разобьем его на треугольники, соединив его центр O с вершинами. Строим только один из шести полученных треугольников, например AOB , так как им и определяется весь шестиугольник; этот треугольник, как известно, называют основным, или определяющим, треугольником.

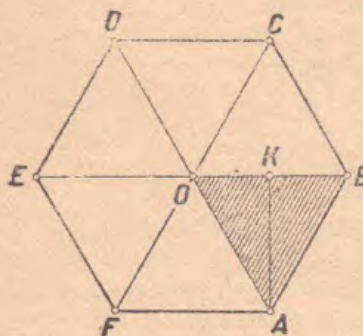


Рис. 214.

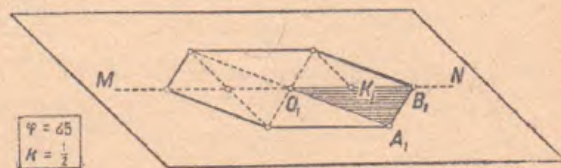


Рис. 214а.

Берем горизонтальную прямую MN (рис. 214а) и отложим на ней отрезок $O_1B_1 = OB$ и через точку K_1 , соответствующую основанию высоты AK треугольника OAB , проводим K_1A_1 под углом $\varphi = 180^\circ - 45^\circ$ к O_1B_1 . Отложив затем $K_1A_1 = 0,5 KA$ и соединив A_1 с O_1 и B_1 , получим искомое изображение $O_1A_1B_1$ определяющего треугольника OAB . На рисунке 214а дано изображение и всего шестиугольника.

6. Если на рисунке отмечены: 1) масштаб, в котором начерчена фигура, 2) угол сокращения φ и 3) коэффициент сокращения k , то по нему можно установить как форму, так и размеры той фигуры, изображение которой дано на рисунке.

Так, на рисунке 215 изображен четырехугольник $ABCD$ (масштаб 1:10). Отрезок $AB \parallel DC$ и оба параллельны нижнему или верхнему

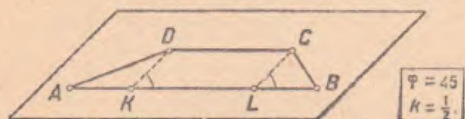


Рис. 215.

краю листа; значит, четырехугольник $ABCD$ — трапеция, начерченная на горизонтальной плоскости, и основания AB и CD параллельны вертикальной плоскости. Измерив AB и CD , находим: $AB = 4$ см и $CD = 2$ см, а их действительная величина $AB = 4$ дм и $CD = 2$ дм.

Измерив углы DKB и CLB , находим, что каждый из них равен 45° , а потому прямая $DK \perp AB$ и прямая $CL \perp AB$ и они являются высотами трапеции. Каждая из них сокращена вдвое, так как $k = 0,5$. Измерив DK и CL , находим $DK = CL = 0,9$ см; значит, в горизонтальной плоскости DK и CL должны быть вдвое больше, т. е. $DK = CL = 1,8$ см, их же действительная величина равна $1,8$ дм. Проекции на основание AB боковых сторон трапеции: $AK = 1$ см, $LB = 1$ см; их действительная величина: $AK = LB = 1$ дм. Этих данных достаточно для определения всех элементов трапеции, т. е. для построения трапеции.

§ 3. Изображение на плоскости чертежа тел, стоящих на горизонтальной плоскости.

Задача 1. Построить на плоскости чертежа изображение куба, ребро которого $a = 20$ см, если известно, что куб стоит на горизонтальной плоскости и диагональ основания его параллельна вертикальной плоскости. Масштаб 1:10; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

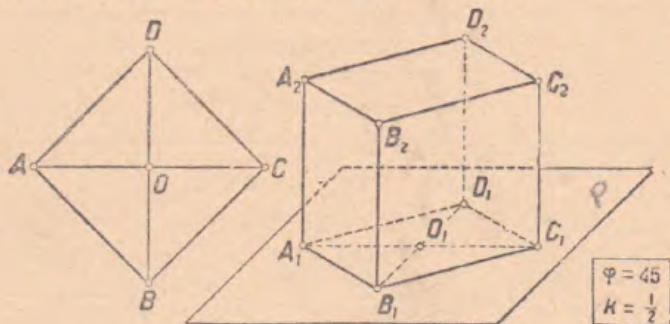


Рис. 216.

Решение. Строим сначала в масштабе 1:10 основание куба — квадрат; сторона его равна 2 см (рис. 216). Затем строим на плоскости P отрезок $A_1C_1 = AC$ и через середину O_1 диагонали A_1C_1 проводим к ней под углом $\varphi = 45^\circ$ диагональ B_1D_1 . Отложив по обе стороны от

диагонали A_1C_1 отрезки $O_1D_1 = O_1B_1 = \frac{1}{2}OD$ и соединив точки D_1 и B_1 с A_1 и C_1 , получим изображение $A_1B_1C_1D_1$ квадрата $ABCD$ — основания куба.

Боковые ребра куба параллельны вертикальной плоскости и равны каждое 2 см. Проведя из точек A_1, B_1, C_1 и D_1 4 перпендикуляра к диагоналям A_1C_1 и B_1D_1 , откладываем на них отрезки $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 2$ см и, соединив их концы, получаем изображение куба.

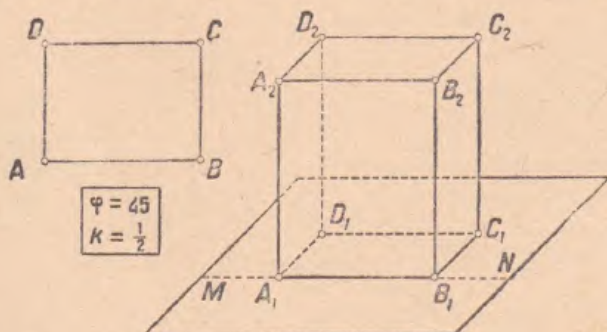


Рис. 217.

Задача 2. Размеры прямоугольного параллелепипеда $8\text{ см} \times 6\text{ см} \times 10\text{ см}$. Параллелепипед своим основанием, т. е. прямоугольником со сторонами 8 см и 6 см, стоит на горизонтальной плоскости так, что большая сторона прямоугольника параллельна вертикальной плоскости. Построить изображение параллелепипеда в плоскости чертежа. Масштаб $1:4$; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

Решение. Построим сначала основание $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда: $\angle A_1 = 45^\circ$ и $A_1D_1 = \frac{1}{2}AD$ (рис. 217). Проведем затем $A_1A_2 \perp A_1B_1$ и другие ребра, параллельные ему: $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 2,5$ см. Соединив концы их, получим искомое изображение параллелепипеда.

§ 4. Построение сечений тел.

1. Задача. Даны две плоскости P и Q , пересекающиеся по прямой AB (рис. 218), и три точки: C на плоскости Q , E на плоскости P и D на прямой AB . Провести через данные три точки C, D и E плоскость S и построить прямые, по которым плоскость S пересекает данные плоскости P и Q .

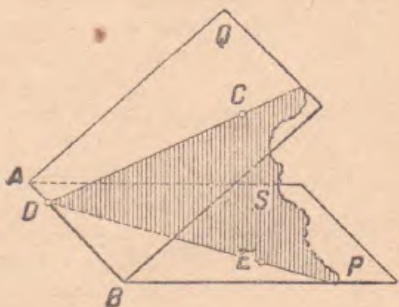


Рис. 218.

Решение. Согласно условию точки C и D лежат на плоскости Q и на плоскости S , следовательно, и прямая CD лежит на обеих плоскостях; точно так же и прямая, проведенная через точки D и E , лежит как на плоскости P , так и на плоскости S . Положение плоскости S вполне

определяется тремя точками C , D и E или двумя пересекающимися прямыми CD и DE , по которым она пересекает плоскости P и Q . На рисунке 218 сечение плоскостей P и Q плоскостью S заштриховано.

2. Задача. Даны: две плоскости P и Q , пересекающиеся по прямой AB , и на плоскости P прямая CD , а на плоскости Q точка E . Провести секущую плоскость через данную прямую CD и данную точку E (рис. 219).

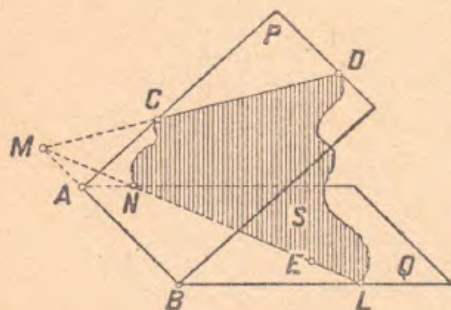


Рис. 219.

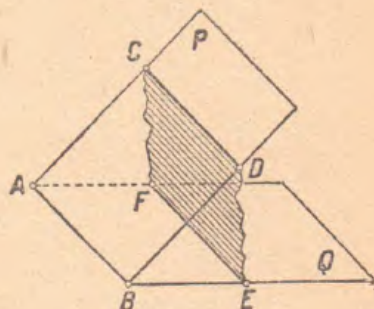


Рис. 220.

Решение. Согласно условию CD лежит на плоскости P ; AB также лежит на плоскости P , следовательно, и точка их пересечения M лежит на плоскости P . Точка M , лежащая на прямой AB , лежит и на плоскости Q . Таким образом, на плоскости Q лежат две точки: M и E , а потому и прямая ME лежит на плоскости Q . Значит, прямая ME принадлежит и плоскости Q и плоскости S , т. е. она является линией пересечения плоскостей S и Q . Следовательно, искомая плоскость S пересекает плоскость P по прямой CD и плоскость Q — по прямой NE .

В том случае, когда $CD \parallel AB$ (рис. 220), проводим через точку E прямую $EF \parallel AB$ и затем строим плоскость, проходящую через две параллельные прямые CD и EF ; ими определяется плоскость сечения S .

3. Задача. Дан куб, ребро которого $a = 20$ см. Пересечь его плоскостью, проходящей через концы трех ребер, исходящих из одной вершины куба, и дать изображение сечения.

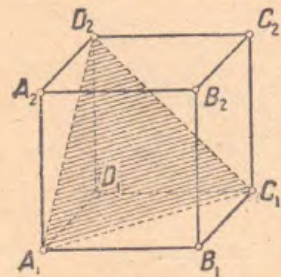


Рис. 221.

Решение. Дано изображение куба (масштаб 1:10; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$ (рис. 221)). Три вершины куба A_1 , C_1 , D_2 плоскость сечения вполне определена. Пусть плоскость сечения S проведена.

Точки A_1 и C_1 лежат в плоскости сечения и в плоскости основания, следовательно, A_1C_1 — прямая, по которой плоскость сечения пересекает основание куба; таким же образом прямые A_1D_2 и D_2C_1 — прямые, принадлежащие и плоскости сечения и граням куба. Значит, сечение куба плоскостью S есть треугольник $A_1C_1D_2$, стороны которого лежат на гранях куба.

Сечение представляет собою равносторонний треугольник: все его стороны равны, каждая из них равна диагонали грани куба, т. е. $a\sqrt{2}$.

4. Задача. Три точки K, L и M лежат на ребрах куба (рис. 222). Построить сечение куба плоскостью, проходящей через данные три точки.

Решение. Две точки K и M определяют прямую KM , лежащую в плоскости сечения S и в плоскости передней грани. Точка пересечения E прямых KM и B_1A_1 , лежащих в плоскости передней грани куба, принадлежит: 1) плоскости передней грани куба, 2) плоскости сечения S , 3) плоскости нижней грани куба.

Поэтому прямая EL лежит и в плоскости нижней грани куба и в плоскости сечения S , и NL есть линия пересечения обеих плоскостей.

Точки K и N принадлежат плоскости сечения S и плоскости левой боковой грани куба, а потому KN — линия их пересечения.

Точка пересечения F прямых KM и B_1B_2 , лежащих в плоскости передней грани куба, принадлежит плоскости сечения S и плоскости передней грани куба; точно так же и точка пересечения G прямых NL и B_1C_1 , лежащих в нижней грани куба, принадлежит плоскости сечения S . Но обе точки F и G принадлежат плоскости правой боковой грани и плоскости сечения S , а потому и прямая FG принадлежит обеим плоскостям, следовательно, OP — линия их пересечения.

Точки O и L лежат в плоскости сечения S и в плоскости задней грани куба, OL — линия их пересечения; точно так же и точки M и P лежат в плоскости сечения и в плоскости верхней грани куба, а MP — линия их пересечения. Шестиугольник $KNLOPM$ есть сечение куба плоскостью S . Итак, плоскость S пересекает все шесть граней куба и дает в сечении шестиугольник.

Заметим что $OP \parallel KN$, $MP \parallel NL$ и $KM \parallel LO$.

5. Указанные приемы применяют и при построении сечений параллелепипедов, призм и других многогранников. Если принять во внимание, что стороны сечения, лежащие в параллельных гранях, параллельны, то построение значительно упрощается. Так, например, когда в последней задаче (рис. 222) уже построены отрезки MK , KN и NL , достаточно провести $MP \parallel NL$, и $PO \parallel KN$, после чего получим и $OL \parallel KM$.

6. Задача. На рисунке 223 точки K, L и M являются серединами ребер куба. Провести через эти точки сечение; определить: 1) его форму и 2) вычислить площадь сечения, полагая ребро куба равным a сантиметрам.

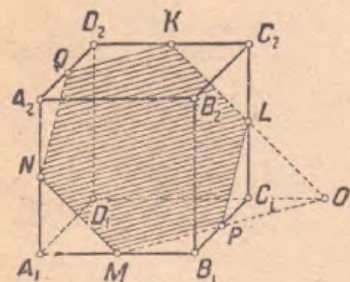


Рис. 223.

Решение. 1) Соединим точки K и L прямою. Точка O пересечения ребра D_1C_1 и прямой KL принадлежит одновременно плоскости сечения, плоскости задней грани куба и плоскости основания; следовательно, и прямая OM принадлежит и плоскости сечения и плоскости основания;

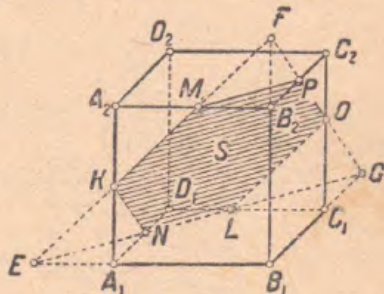


Рис. 222.

значит, и точка P ребра B_1C_1 принадлежит плоскости сечения. Поэтому и прямые LP и PM , лежащие на гранях куба, принадлежат и плоскости сечения. Проведем затем $MN \parallel LK$, $NQ \parallel PL$ и соединим Q с K , получим шестиугольник $KLP MNQ$, стороны которого лежат на гранях куба. Итак, сечение куба плоскостью, проходящей через точки K , L и M , — шестиугольник.

Треугольник KC_2L равнобедренный и прямоугольный; $KC_2 = C_2L = \frac{a}{2}$ по условию, а потому $KL = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, т. е. половине диагонали грани куба.

$\triangle LC_1O$ прямоугольный и $\angle C_1LO = \angle C_2LK = 45^\circ$, значит, $C_1O = C_1L = LC_2 = C_2K$. Из равенства треугольников MB_1P и PC_1O следует, что $B_1P = PC_1$, т. е. точка P — середина ребра B_1C_1 . Значит $\triangle KC_2L = \triangle LC_1P = \triangle PB_1M$ как равнобедренные прямоугольные треугольники, катеты которых равны каждый $0,5a$. Таким же образом доказывается, что $\triangle MA_1N = \triangle NA_2Q = \triangle QD_2K$, а потому $KL = LP = PM = MN = NQ = QK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, т. е. стороны шестиугольника сечения равны.

Углы KLP и MPL как внешние углы равностороннего $\triangle PLO$ равны каждый 120° , значит, и остальные углы шестиугольника равны каждый 120° , а потому сечение — правильный шестиугольник.

2) Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна $6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$, а потому площадь сечения

$$S = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} \text{ кв. единиц.}$$

Вопросы и упражнения.

1. Построить в вертикальной плоскости изображение правильного треугольника со стороной $a = 12$ см, лежащего в горизонтальной плоскости. Масштаб 1:3; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

2. Построить в вертикальной плоскости изображение параллелограмма со сторонами $a = 10$ см и $b = 6$ см и высотой $h = 4$ см, лежащего в горизонтальной плоскости. Масштаб 1:2; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

3. Построить в вертикальной плоскости изображение правильного шестиугольника со стороной $a = 4$ см, лежащего в горизонтальной плоскости, если известно, что большая диагональ его перпендикулярна к вертикальной плоскости. Масштаб 1:2; $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0,5$.

4. а) Построить куб, ребро которого $a = 40$ см; провести в нем сечение, проходящее через середину трех его ребер, исходящих из одной вершины, и б) доказать, что квадрат площади полученного сечения равен сумме квадратов площадей трех треугольников, отсекаемых на гранях куба.

5. Провести в кубе сечение, проходящее через диагональ боковой грани и середину ребра противоположащей грани.

6. Провести в кубе сечение, проходящее через середины двух противоположащих боковых ребер и через одну из вершин куба.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>		<i>Стр.</i>
I. Взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве.		§ 6. Основные задачи на построение	35
§ 1. Геометрия на плоскости и в пространстве	3	V. Многогранные углы.	
§ 2. Аксиомы прямой в пространстве	5	§ 1. Трехгранный угол	37
§ 3. Определение положения плоскости в пространстве	—	§ 2. Многогранный угол	39
II. Перпендикуляр и наклонные.		VI. Начатки проекционного черчения.	
§ 1. Прямая и плоскость	9	§ 1. Ортогональная проекция на одну плоскость	42
§ 2. Перпендикуляр к плоскости	—	§ 2. Проекция на две плоскости	43
§ 3. Перпендикуляр и наклонные. Проекция точки и отрезка на плоскость	12	§ 3. Проекция на три плоскости	47
§ 4. Теорема о трех перпендикулярах	13	VII. Многогранники.	
§ 5. Угол между прямой и плоскостью	14	§ 1. Многогранник	49
III. Параллельные прямые и плоскости в пространстве.		§ 2. Призма	50
§ 1. Параллельные и скрещивающиеся прямые	16	§ 3. Сечения призмы плоскостью	52
§ 2. Параллельные прямые и плоскости	19	§ 4. Параллелепипеды	53
§ 3. Параллельные плоскости	20	§ 5. Пирамида	54
§ 4. Скрещивающиеся прямые	23	§ 6. Сечение пирамиды	56
§ 5. Проекция прямой на плоскость	25	§ 7. Правильные многогранники	58
IV. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости.		§ 8. Развертки многогранников	59
§ 1. Двугранный угол	28	VIII. Поверхности многогранников.	
§ 2. Линейный угол двугранного угла	29	§ 1. Поверхность призмы и параллелепипеда	62
§ 3. Соотношение между двугранными углами и их линейными углами	30	§ 2. Поверхность пирамиды	63
§ 4. Перпендикулярные плоскости	32	§ 3. Поверхности правильных многогранников	65
§ 5. Зависимость между площадью фигуры и площадью ее проекции	33	IX. Объемы многогранников.	
		§ 1. Объем параллелепипеда	66
		§ 2. Объем прямой призмы	67
		§ 3. Объем наклонной призмы	69
		§ 4. Объем пирамиды	70
		§ 5. Объем усеченной пирамиды	73
		§ 6. Теорема Кавальери и ее применение к вычислению объемов многогранников	74

X. Цилиндр.

§ 1. Цилиндрическая поверхность. Виды цилиндров . . .	77
§ 2. Сечения цилиндра . . .	78
§ 3. Развертка прямого кругового цилиндра . . .	79
§ 4. Поверхность цилиндра . . .	80
§ 5. Объем цилиндра . . .	82

XI. Конус.

§ 1. Коническая поверхность. Виды конусов . . .	84
§ 2. Сечения конуса . . .	85
§ 3. Развертка конуса . . .	87
§ 4. Поверхность конуса . . .	—
§ 5. Поверхность усеченного конуса . . .	88
§ 6. Объем конуса . . .	89
§ 7. Объем усеченного конуса . . .	91
§ 8. Формула Ньютона-Симпсона . . .	—

XII. Тела вращения.

§ 1. Вращение отрезка вокруг оси . . .	94
§ 2. Изображение тела вращения . . .	95
§ 3. Поверхность и объем тел вращения . . .	—

XIII. Шар и его части.

§ 1. Шар. Шаровая поверхность . . .	99
§ 2. Сечение шара. Касательная плоскость . . .	100
§ 3. Свойства больших кругов . . .	101
§ 4. Касательные к шару . . .	102
§ 5. Части шара . . .	104
§ 6. Поверхность шара . . .	105
§ 7. Поверхности частей шара . . .	106
§ 8. Объем шара . . .	107
§ 9. Объемы частей шара . . .	110

XIV. Изображения пространственных фигур и тел. Сечения тел плоскостями.

§ 1. Правила изображения фигур . . .	115
§ 2. Изображение на плоскости чертежа плоских фигур, расположенных в горизонтальной плоскости . . .	118
§ 3. Изображение на плоскости чертежа тел, стоящих на горизонтальной плоскости . . .	122
§ 4. Построение сечений тел . . .	123

Ответственный редактор С. Ю. Калецкий
Технические редакторы И. И. Кутин и М. М. Хасина
Обложка работы В. С. Резникова

Подписано к печати с матриц 19/VIII 1935 г.
Формат бумаги 82×92¹/₁₆. Бумага ролевая Окуловской фабрики. Тираж 300 тыс. (201 т. — 500 т.).
Изд. листов 8. Бум. листов 4. Авт. лист. 11,3. 109 344 печ. зн. в 1 бум. листе.

Цена 1 руб., колленкоровый перепл. 60 коп., бумажный — 30 коп., папка — 15 коп.
У. 21. Учпедгиз № 6581. Заказ № 1170
Уполн. Главлита № В-39847.

Отпеч. с матр. в 18 типографии ОГИЗа треста «Полиграфмаш», Москва, Варгунихина гора, 8.