

Э. Л. ТОРНДАЙК

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

Перевод с английского А. С. ДОЛГОВОЙ

Под редакцией
проф. И. К. АНДРОНОВА
и
Д. Л. ВОЛКОВСКОГО



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие редактора	3
Предисловие редакции русского перевода	9
Глава I. Учащиеся в школах повышенного типа	21
„ II. Применения алгебры	30
„ III. Сущность алгебраических навыков	50
„ IV. Психология уравнивания	61
„ V. Психология решения задач	66
„ VI. Измерение алгебраических способностей	81
„ VII. Состав алгебраических способностей	113
„ VIII. Состав алгебраических способностей: изучение алгебраических понятий, терминов и приемов	124
„ IX. Состав алгебраических способностей: выбор частных умственных связей, подлежащих образованию	135
„ X. Новые виды алгебраических упражнений	146
„ XI. Расположение учебного материала при прохождении курса алгебры	154
„ XII. Прочность алгебраических связей	160
„ XIII. Психология алгебраических упражнений	167
„ XIV. Интерес учащихся к занятиям алгеброй	178
„ XV. Индивидуальные и половые различия в успешности занятий алгеброй	183
„ XVI. Дальнейшие желательные изыскания в области психологии алгебры	187

Ответств. редакц. А. Н. Барсуков и В. Н. Молодший
Технич. редактор М. Хасина

Сдана в набор 26/X 1933 г. Подписана к печати 7/II 1934 г.

Формат 62×94¹/₄. Тираж 5 000. У—71. Заказ 4119.

Учгиз № 5469. Изд. листов 12. Бум. л. 6. В бум. листе 109 344 печ. зн.

Уполномоченный Главлита Б—35633.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

САСШ — страна мощного и, относительно, передового капиталистического хозяйства — дарит педагогическому миру талантливому реформиста, развившего огромную активность в экспериментальной дидактике и выпустившего значительное количество оригинальных работ, связанных с реформой образования вообще и реформой математического и алгебраического образования в частности. Перед нами находится одна из значительных работ Э. Л. Торндайка — „Психология алгебры“¹.

В этой работе дается легкая критика традиционного алгебраического образования и, понятно, даются эскизы новой методики. Все это развевается при отсутствии систематического плана; скорее — даются правильные неуловимые намеки, чаще же неправильно расставляются вехи; ни одна тема, поставленная в книге, не доводится до конца, и не вскрывается теория вопроса.

В работе кустарно разрешается методический кризис в школьной алгебре силами реформистской бесхребетной методики. Этим приходится объяснить ту неудовлетворенность, которая остается у читателя после прочтения этой книги.

В ней даны некоторые избранные проблемы методики алгебры, скорее общей, чем частной, разрабатываемые на основе значительных педагогических экспериментов, с обращением некоторого внимания на сознательность и, главное, жизненность роста алгебраического мышления учащегося, с игнорированием научной подпочвы алгебраической культуры и плановой ее методологии. Торндайк, как и большинство реформистов, борясь с односторонностью выхолащенной традиционной алгебры, впадает в другую ошибку, связанную с несомненной недооценкой теории ее.

В первой главе он легко, если не сказать — поверхностно, анализирует действительное состояние алгебраического образования американской школы.

Не поддерживая связи с историей алгебраической науки, не углубляясь в историю алгебраического образования, Торндайк оказался близоруким и в анализе настоящего. Он идет в хвосте педагогического ползучего эмпиризма, переоценивая роль эксперимента. Он преподносит, как вполне объективные, выводы, сделанные на основе подытоживания средних числовых показателей глубоких качественных процессов сознания.

¹ Таково заглавие настоящей работы в английском оригинале книги. Редакция сочла необходимым заменить это заглавие на более отвечающее содержанию книги.

ния, обезличенно и механически переводимых на статистические ряды, где действительность выявляется как нечто неизменное и где нет речи об изменяющейся школьной и учительской среде.

Автор доверяет только выводу на основе эксперимента даже там, где в нем нет никакой необходимости; так, на основе проведенных тестов общего развития, делается вывод: „Оказалось, что в алгебре проявляли успехи те учащиеся, которые выявили большее общее развитие“. Неужели нужно ставить эксперименты там, где практика многих поколений дала уже однозначные ответы! Тут же американский педагог делает „объективный“ вывод, что „только 56% учащихся могут понимать не формально символы, обобщения, доказательства, свойственные алгебре“, и дальше дает об остальных 44% учащихся педагогически-реакционный вывод, считая, что они должны изучать математику только в размере их способностей или что они должны быть переводимы в школы отсталых, где алгебра начинается со второго или с третьего года обучения. Чудовищно неверен и реакционен вывод из одного-двух экспериментов-подсчетов, связанный с отрицанием возможности усвоения нормального курса алгебры половиной учащихся.

Так, первая глава не дает рядовому учителю нашей школы и ее методисту желаемой „синицы“ в руки. Вторая глава ставит важный вопрос, в каких размерах и для каких целей необходимо знание алгебраического искусства.

Анализ ведется лишь на основе эксперимента, числового подведения итогов, как бы в предположении, что читатель не столько доверяет логике разворачивания действительности в мышлении, сколько соглашается с автором при предъявлении оформленного числового счета. Педагог Э. Л. Торндайк убежден в нежизненности большинства научных надстроек, в частности математических: отсюда его сомнения в полезности алгебры и стремление обосновать науку и ее части через жизненные эксперименты. Этот пессимизм американского педагога нам должен быть особенно понятен: ведь автор не владеет истинной логикой возникновения и смерти надстроек; он видит лишь внешнюю сторону культуры своей эпохи, где алгебраическая наука переросла массовый запрос капиталистической практики и автор боится передать лишний грамм теоретической культуры подрастающему поколению.

Относительная ценность алгебры обосновывается двусторонне: алгебра нужна для изучения некоторых вопросов других школьных общеобразовательных и профессионально-технических предметов, и, во-вторых, она нужна при чтении некоторых научно-технических книг.

Тут же автор проговаривается, замечая, что „алгебраическое исчисление применяется в жизни настолько редко, что экономия времени, получаемая благодаря скорости в вычислениях, почти не имеет значения по сравнению с самой способностью их понимания“.

Автор не видит, что алгебраическая культура есть фундамент высшей и жизненной математики, изучением которой будет занята часть подрастающего поколения.

Он не видит, что проблемы арифметики, геометрии и тригонометрии со своими сложными жизненными отделами властно требуют алгебраических орудий, без которых они остаются консервированными. Автор не видит, что он повернулся к жизни только с потребительской, а не

производственной ее стороны. Он не слышит запросов техника и инженера на алгебру, этого „шестого“ чувства, необходимого при производственных планированиях с количественными предвидениями неизвестного.

Читатель может понять наши суждения о педагогическом эксперименте неправильно — как недооценку его роли в процессе построения общественных наук. Нет, мы ценим экспериментальное исследование, но как неразрывно связанное с историко-методологическим и научным качественным анализом проблемы.

Статистический анализ — дело наиболее тонкое, и только в руках марксистски-образованного человека он ведется правильно, а потому приводит к плодотворным результатам.

В частности, помимо анализа школьных книг и анкет среди преподавателей различных общеобразовательных предметов, лучше было бы провести те же исследования относительно специальных технических книг, рассчитанных на инженера со средним и высшим образованием, и исследования их справочников.

Когда читались страницы о постановке соответствующих экспериментов с книгами и школьными работниками, мы беспокоились за результаты экспериментальных выводов: можно было ожидать самых неблагоприятных заключений относительно школьной алгебры.

Статистически „объективный“ случай выпал все же в пользу алгебраической культуры: автор получает в выводе, что 2,1% просмотренного материала заняты под алгебраическим исчислением.

Повидимому, это число удовлетворяет американского педагога. А между прочим здесь-то и напрашивается необходимость качественного анализа — установить, сколь необходимо алгебраическое исчисление в методе и содержании соответствующего учебного предмета. Автор фетишизирует количество и спешит подать бухгалтерский счет.

Мимоходом Торндайк отмечает, что на основе эксперимента видно, как самая высокая оценка ценности алгебры была дана преподавателями физики и химии. А разве этого нельзя было получить из анализа ведущих и подсобных методов физико-химических наук?

Этот фетишизм количества объясняется тем, что „в современном буржуазном обществе все отношения подводятся фактически под одно абстрактное денежно-торгашеское отношение“¹.

Дальше идет такой же механический анализ энциклопедии „Британика“, где по подсчету оказалось, что алгебраическое исчисление встречается в 3,6% случаев, и т. д. Тут же автор попутно делает замечание, что для чтения энциклопедии недостаточно знать алгебру, да и среднюю математику, что уже требуется добавочное знание элементов высшей математики.

Дается правильное, но не развернутое замечание, что к XX в. возрастает значение оперирования с формулами в биологии, психологии, социологии и педагогике при употреблении соответствующих кривых повторяемости и соответствующей корреляции.

В дальнейшем американский педагог по тестам анализирует собранный материал, выясняющий ценность различных отделов алгебры, предварительно не создав четкой классификации самого алгебраического содержания.

¹ „Архив Маркса и Энгельса“, кн. IV, стр. 274.

И здесь идет „воинствующая“ недооценка теории разных отделов алгебры с односторонним вскрытием предельной полезности их.

Автор не обращает внимания на логику внутреннего развития основных понятий в математике, когда внутренние противоречия развертываемых понятий требуют, рождают новые понятия, в которых отражены и переработаны в сознании более скрытые и всеобщие стороны движения. Так, труднейшие вопросы, связанные с постановкой и развитием теории числовой области, относительных, иррациональных и комплексных чисел, автором обойдены.

Торндайк в кустарной классификации рассматривает распыленные куски алгебраической машины не в их связи и переходах, не в действии, а скорее — в их мертвом и статическом состоянии.

Автор говорит, что „в жизни требуются не сложные действия над многочленами, — требуется решение несложных уравнений, в особенности в форме пропорций“.

Понятно, что автор недооценивает дальнейших частей алгебры, как второй, так и третьей, говоря, что „умение решать квадратные уравнения, задачи на прогрессии или бином Ньютона, которое так ценится при школьных испытаниях, имеет весьма незначительную практическую полезность“.

Тут же отмечается, что „сложные упражнения есть потеря времени“, что „простое знание алгебраических выражений имеет гораздо большее значение, чем навык в алгебраическом счислении“ или: „нам чаще приходится читать символы, чем оперировать с ними“.

На основе наспех проведенного анализа американский педагог смело набрасывает пять концентров „алгебраического сырья“, ставя концентры в их нисходящем порядке жизненных запросов, в отношении, которое дано Торндайком, как 32:16:8:4:2.

Американский педагог, не будучи математиком и профессионалом-преподавателем ее, что видно по всему тону и стилю его книги, не мог справиться с поставленной проблемой, так как взял непосильную задачу на свои, хотя и талантливые, педагогические плечи. Отсюда — необоснованность многих суждений и отсутствие глубокого анализа, так необходимого в научной математике.

В работе Торндайка недооценивается роль теории; автор набрасывает практическую небольшую эпизодическую алгебру не как самостоятельную науку, а как сумму практических мелких проблем, встретившихся на дороге кустаря.

Нужно отметить, что во второй главе имеется небольшое число довольно удачно собранных типичных формул, взятых чаще из физики, с которыми нужно научить обращаться учащихся.

В третьей главе — „Сущность алгебраических навыков“ — проблема не ставится по существу; в ней конкретизируются некоторые выводы первой главы, приводятся пределы допустимости самых сложных примеров и примеры, переходящие пределы допустимой сложности.

И здесь демаркационная линия проведена слишком низко, с той же недооценкой познавательного и практического значения более сложных задач и примеров.

Странно видеть педологически якобы оправданное требование на проработку только наипростейших алгебраических преобразований. Разве автор не заметил, что легче схватить механ. зм и принципы алгебраиче-

ских преобразований только в усложненной практике, когда теория выступает как необходимая опора, тогда как в простейших случаях преобразования возможно вести лишь по здравому смыслу?

Автор недооценивает будущую практику как инженера-исследователя, так и студента, занимающегося высшей математикой. Неужели тогда снова нужно заниматься изучением алгебры более сложных вычислений? Ведь перед средней общеобразовательной школой стоит задача — дать систематический фундамент под всю культуру, основами которой нужно овладевать молодому поколению.

Нельзя согласиться с выводами автора, в которых он советует не рассматривать теорию общего наименьшего кратного, решая проблемы лишь в простейших случаях по „стихийному“ соображению.

Слишком категоричны суждения автора относительно ненужности в алгебре квадратных скобок.

Можно сказать, что Торндайк не советует идти в глубину алгебраической культуры, он „воинственно“ выступает за завоевание жизненных позиций, которые без закрепления теорией так и останутся незавоеванными юношеским сознанием. Сомнительна и возвещенная американским педагогом экономия времени, потребного на изучение алгебры, примерно, до одной четверти или половины ныне отводимого. Сэкономить время возможно, но с ущербом и для качественных, и для количественных показателей изучаемой алгебраической культуры.

Попутно, но настойчиво ставится в этой главе вопрос о задачах, связанных с изучением алгебраического исчисления. Уже в начале главы автор иронизирует над бесполезными искусственно-схоластическими задачами, так вросшими в алгебраическое тело. Он говорит, что „как в арифметике, так и в алгебре старались научить ученика решать любую головоломную задачу, которую только мог бы изобрести учитель, и привить ему мастерство в обращении с величинами безотносительно к их значению и действительной полезности при решении количественных задач из области физических дисциплин“. В этом суждении имеется значительная доля справедливости, но все же суждение нужно взять в ограничивающие рамки.

Автор вульгарно представляет роль абстракций в процессе познания, недооценивая последнюю. На самом же деле нужно научиться абстрактно отражать действительность, так, чтобы, начав с простейшего и одностороннего отражения, довести сознание до более полного отражения действительности, связанного с проблемами физики и других реальных наук.

Нужно не выбрасывать схематические задачи, а осторожно развивать их с доведением иногда до целостных жизненно-технических проблем.

Так же односторонне подчеркиваются важность и преимущественность подбора задач, а не их расположения: автор „отрывает форму от содержания“, придавая значение только последнему.

Мимоходом даются намеки на неразвитые виды классификации задач.

Не совсем убедительно ставится вопрос об именованной размерности формулы в ее преобразованиях; автор говорит, что „при всех преобразованиях формулы нужно иметь дело только с абстрактными числами“. Что вначале учащимся так легче понимать логику и технику преоб-

разования и что в традиционном курсе так строится понимание алгебраического преобразования формулы,— об этом никто не спорит; но что язык теории и практики механики, физики и техники вносит сюда свои исторические поправки,— об этом вы ничего не услышите от Торндайка. У него и в дальнейшем при технических формулах не дано их размерности в целом и для отдельных параметров в частности, а отсюда становится реальная невозможность применения их в инженерно-технической практике.

В четвертой главе — „Психология уравнения“, или, как мы назвали бы — „Психология мышления в форме алгебраического уравнения“, — даются краткие, иногда оригинальные замечания, например, как изменить алгебраические обозначения с целью более естественного „алгебраического роста“ учащегося. Можно благодарить автора за некоторые относительно удачные советы, как связывать координатные обозначения с географическими обозначениями NS и SW или употреблять вместо x знаки v и k , а при системах уравнений с индексными пометками — в виде x_1, x_2 и т. п.; также недурно иногда заменять обозначения $y = ax^2 + bx + c$ через

$$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \quad \text{или} \quad J = k_1 x^2 + k_2 x + k_3.$$

Сомнительна настойчивость в подчеркивании, что функции $ax + b$ и $ax^2 + bx + c$ не имеют y , а потому будто неправильны обозначения:

$$y = ax + b \quad \text{или} \quad y = ax^2 + bx + c.$$

Автор проводит слишком абсолютную демаркационную линию в разграничении уравнения на два вида с постоянно-неизвестным и с переменнo-неизвестным.

В пятой главе — „Психология решения задачи“ — дается много интересного материала, связанного с подбором, расположением и, частично, решением соответствующих задач.

Автор ставит нужные проблемы, на которые обычно в традиционной практике мало или совсем не обращается внимания.

Он подбирает серию безусловнo нужных и ценных задач разных типов. Интересна серия упражнений, связанных с избирательным ученическим мышлением; примерно, дается ряд формул:

$$v = at; \quad v = gt; \quad s = \frac{1}{2} at^2; \quad s = \frac{g}{2} t^2; \quad v = \sqrt{2as},$$

где

$$g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right],$$

и требуется найти пространство, пройденное свободно падающим телом в течение шести секунд. По какой формуле вести расчет?

Торндайк придает громадное значение реальности в процессе обучения. Этой стороной его работа сильна, и здесь можно у него учиться.

Он часто умело соединяет реальность содержания с психологически оправданной формой.

Нам в СССР в особенности нужно использовать критический тон работы Торндайка, так как у нас имеются традиции таких сверхпроизводственных, „идуших на голове“ задач, какие имеются в работах А. В. Ланкова, В. Г. Фридмана и др.

Автор приводит много таких задач, где условие дано нежизненно и антипедагогично.

Он указывает, что, проанализировав американские задачки, он нашел 50% с лишним неправильно составленных задач с точки зрения ранее развитых соображений.

Отмечается, что „пока не исчерпана возможность нахождения реальных задач, не прибегать к вымышленным и грубо-упрощенным“, а в крайнем случае лучше явно взять задачи на задуманные числа, чем вкладывать в них искусственные связи и нежизненное содержание.

Дается правильное предостережение — не обременять преподавания алгебры физикой, астрономией или инженерным делом; педагог также предостерегается от излишней траты времени в связи с черчением, измерением и взвешиванием на уроках алгебры.

Разбирается более глухо вопрос и о системе расположения задач: автор приходит к выводу, что нужно обращать внимание на смешанные отделы в алгебре, которых нужно создавать больше.

В конце главы даются намеки на группировку задач по жизненным темам, как падение тел, сплавы, скользящие шкалы заработной платы и пр.

Автору трудно проплыть между Сциллой и Харибдой современного актуального вопроса методики — соединения теории и практики; отдавая предпочтение последней и значительно недооценивая теорию и ее систему, автор, в сущности, недооценил и практику. Только в наших условиях, в практике политехнической школы, возможно то, что не удается автору.

Политехническая школа высоко ценит теорию и ее систему, ставя теоретический прожектор так, чтобы давать „практикам силу ориентировки, ясность перспективы, уверенность в работе, веру в победу нашего дела“ (Сталин).

Односторонние, но во многом правильные указания даются на ценность, содержание и форму задач типа загадок и головоломок, где подчеркивается мысль о том, что иногда лучше брать этот вид упражнений в отвлеченной форме, как, например, когда $a^2 < a$. Автор справедливо борется с наивно-вульгаризирующей постановкой юношеского математического досуга, хотя здесь же недооценивает роль парадоксов в развитии алгебраического мышления.

В шестой главе предложено огромное количество тестовых задач.

Несомненно, автор переоценивает тестологию. Что должно подлежать еще изучению и экспериментальной проверке, у него берется как несомненная научная опора. Так, автор считает, что „тесты дают абсолютно объективную оценку“. Здесь будет к месту привести цитату из критики Лениным дореволюционной статистики, что она „все чаще и чаще страдает за последнее время некоторым, я бы сказал, „статистическим кретинизмом“, — за деревьями исчезает лес, за горами цифр исчезают экономические типы явлений“¹.

Но мы должны быть благодарны американскому педагогу за ознакомление нас с соответствующими „достижениями“ заатлантической мысли, которые могут подлежать изучению и проверке в наших исследовательских педагогических институтах, тем более, что многие тесты из-за их

¹ Ленин, Собр. соч., т. XII, ч. 2, стр. 308, К вопросу о задачах земской статистики, М., 1924.

жизненной и педологической ценности могут быть использованы в нашем бедном задачном инвентаре, нуждающемся в переделке и оздоровлении.

Хотя здесь имеется и сырой задачный материал, но из него можно отсеять многое, пригнав к соответствующим разделам алгебраического исчисления. Возьмите, например, предложенные формулы физико-технического характера, рассмотренные с изучением функциональной изменчивости компонентов и результата, как то:

$$P = ahw, \text{ найти } h$$

$$C = \frac{E}{R} \quad " \quad R$$

$$E = \frac{P \cdot d}{R} \quad " \quad p$$

$$d = \frac{Mt - g}{t} \quad " \quad M$$

$$l = \frac{bd^3}{g} \quad " \quad b$$

$$E^2 = \frac{Iwhr}{t}, \text{ найти } h$$

$$d = \frac{lf}{g} \quad " \quad f$$

$$\frac{e}{w} = \frac{r}{R} \quad " \quad w$$

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_1 v_1}{T_1} \quad " \quad v$$

$$N = \frac{a \cdot b}{l} - d(l - f) + \frac{1,414}{g + \frac{1}{h}},$$

найти f .

Даны сравнительно удачные для исследования ряды чисел с целью усмотрения в некоторых из них определенных видов прогрессии; даны на месте упражнения беглого определения степеней; примерно, определить 2^{10} или приблизительно оценить, что больше: $1,17 \cdot 10^3$; 2^{20} ; 4^{11} ; $1\,000\,000^{\frac{1}{2}}$ и др.? Но совсем неубедительными выглядят упражнения с алгебраическими ребусами по исследованию способности обращаться с символами.

У Торидайка часто многообещающее заглавие не совпадает с бедно развернутым содержанием главы. Так и в этой главе, в параграфе „Тестов способности к алгебре“, ожидаешь, что вот, наконец, увидишь и услышишь долгожданное решение проблемы способности и неспособности к алгебраическому мышлению с его нюансами силы, быстроты, глубины, прочности — и больше: получишь, как учитель, средства для определения необходимых способностей.

На самом же деле читателя ожидает большое разочарование, когда он не увидит истинного развертывания сложной проблемы, а получит все те же „надоевшие“ тесты.

Хуже всего то, что поверхностное скольжение по проблеме, проявленное американским педагогом, снимает эту важную проблему и усыпляет искания учителя в этом направлении.

В дальнейших главах: седьмой, восьмой и девятой, идущих под „зашифрованным“ названием — „Состав алгебраических способностей“, дается конгломерат различных проблем, возникающих попутно.

Вначале брошено несколько интересных и сравнительно реальных задач, заставляющих читателя думать. А дальше автор пытается разложить

алгебраическую машину на четырнадцать частей или, как автор называет, способностей, которые учащиеся должны приобрести через изучение алгебры.

При классификации не соблюдены элементарные правила ни логики, ни науки алгебры, ни педагогики.

Все идет без четкой системы развития, а располагается сырыми случайными кусками.

Автор во всей книге набросал часто интересные примеры и задачи, которые развивают навыки, обычно игнорируемые в образовательном курсе.

В поставленном автором параграфе — „Развитие навыков, которыми обычно пренебрегают“, почти ничего дельного не сказано, а если кое-что в нем и высказано оригинальное, то все это не относится к узкопоставленному вопросу.

Все изложенное достаточно ярко характеризует „органические пороки“ мышления автора, в частности, его „комплексный“ подход к разработке проблем преподавания алгебры.

Отсюда понятно суждение автора, пишущего, что „многие учителя убедились путем интуиции и опыта в том, что психологи устанавливают, исходя из общих принципов, а именно: что очень часто полезно приводить небольшое количество элементов данной темы или доктрины задолго до того, как она подвергается в целом систематическому изучению“, и дальше продолжающего: „Ученые и учителя страдают двойного рода манией: изучать все в отношении всего и учить всему в отношении всего, что привлекает наш разум“. В том же духе идет и дальнейшая борьба против систематического развертывания понятий.

Этим вредным принципом „по попутности“ и „сырых знаний“ Торндайк пользуется в развитии основных тем всех своих работ.

В этой главе обращается внимание на кустарность в подборе и чередовании упражнений, где обнаруживается, что многие из упражнений, как

типа $\frac{axy}{b}$, ведутся до сотни раз, а другие, не менее необходимые,

как $\frac{a}{bx}$, — до двух раз.

Понятно, этой кустарщины у нас не меньше, чем в американской действительности.

Дилемма гибкости алгебраической действительности и прямолинейной жесткости запоминаемых правил, отмеченная Торндайком, так и не поставлена по существу, и не дано соответствующего решения ее, так как автор занялся новой нахлынувшей волной — ассоциацией идей. Он советует, помимо общих приемов алгебраического исчисления, использовать складывающуюся единичность и специфичность данного, с тем чтобы вычисления повести значительно изящнее.

Ставятся нужные, но несвоевременно, упражнения типа $\left(5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(5^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{1}{2}}\right)$ или $10^{\frac{5}{2}}$ и др.

Нельзя согласиться с настойчивым советом автора раннего введения отрицательных показателей и указаниями, данными в слишком категорическом виде, ненужности усложненных разложений на множители. Обращает американский педагог внимание на встретившиеся противоречия

в его практике, связанные с пониманием подобных членов; так, автор считает, исходя из определения понятия общего коэффициента и подобных членов, что $4ab^2c$ и $5a^2b^3c$ подобны, так как в первом можно взять за коэффициент $4ab^2$, а во втором — $5a^2b^3$, и это еще более колеблет теоретические принципы автора, когда он принужден высказать, что „в действительности приведенные предложения являются не определениями и правилами, а лишь формулированными привычками приемов, основанных на опыте обращения с некоторыми величинами и выражениями“. Все кажущееся противоречие сводится к тому, что подобность алгебраических выражений нужно понимать не абсолютно, а относительно: данные выражения не подобны относительно ab^2c и a^2b^3c и подобны относительно общего числа c .

Автор справедливо, если это понимать ограничительно, выступает против традиционной системы разворачивания новых знаний на уроках алгебры всегда с общих определений, а не с наблюдения и размышления над единично-конкретными фактами, как это можно делать иногда. „Понимание значений приобретает не сразу, путем изучения определения и иллюстративных примеров, а постепенно, путем оперирования с соответствующими объектами — буквами, коэффициентами, показателями, уравнениями и т. д., при которых личная деятельность учащихся постепенно подводит их к пониманию терминов“.

В конце автор переходит за демаркационную линию, отождествляя эмпирическое первичное отражение качеств природы с их теоретической вторичной переплавкой в сознании. Так, он пишет, что „в сущности, учащиеся усваивают понятия о коэффициентах, показателях степени, иррациональных величинах и т. д. путем непосредственного обращения с последними, совершенно так же, как это имеет место в отношении кислорода, водорода и серы или же бактерий, амёб, дифтерита и опы“.

Отсюда понятны суждения автора по поводу правила знаков, когда он пишет, что „он обращает лишь внимание на то, что иногда при установлении правил „логика“ приносится в жертву удобству создания полезных и необходимых связей“. Понятно, что Торндайк не может справиться с диалектикой развития понятий; он отошел от формальной логики неподвижных абстракций и становится на позиции практического и деляческого прагматизма Джемса, родного ему американского собрата, стоящего на непосредственных позициях идеализма XX столетия.

Справедливы замечания, данные автором, что даже незначительные изменения в обозначении неизвестных, как замена привычных x и y через a и b , или k и p , или p_1 и p_2 , весьма существенно затрудняют мышление учащегося; „если мы не проделаем некоторого количества упражнений с теми символами, которые обычно встречаются в физике, технических дисциплинах и т. д., то мы очень затрудним положение учащихся, переходящих к изучению этих дисциплин“.

Под заголовком „Желательные умственные связи, которыми в настоящее время часто пренебрегают“, автор на задачах вновь усиленно и сравнительно удачно подчеркивает роль подобранных упражнений для изучения функциональных зависимостей.

Американский педагог резко выступает против вульгарных задач и шуток, в особенности историко-анекдотических, так как они в глазах учащегося искажают истинный ход исторического развития науки и роль

гениев, открывавших законы природы. Он, после рассмотрения известной надгробной эпитафии Диофанта, справедливо говорит: „через подобного рода задачи учащиеся сочтут алгебру глупым занятием; равным образом, если они будут знать об Евклиде или Диофанте только то, что последние сочиняли такие задачи, то мнение их об этих математиках будет весьма невысоким“.

Относительно справедливо делаются нападки на излишнее количество в алгебраическом исчислении терминов, выражений и определений, где одних собственных имен насчитывается до пятидесяти.

Но автор и здесь не поставил проблемы глубже в связи с вросшими в алгебру терминами греческого, арабского и латинского языков и методикой их ознакомления. Но дальше автор переходит границу допустимых вначале суждений, заявляя, что „чем меньше применяется технических терминов, тем это лучше при прочих равных условиях“ и дальше: „не на установление и определение терминов надо направить внимание, а на правильное использование последних для прикладных целей“.

Торндайк относительно прав, когда выступает против подобранных задач с таким расчетом, чтобы они давали наипростейшие ответы в виде целых чисел или наипростейших алгебраических выражений. Это приучает учащихся судить о верности процесса решения при следовании соответствующим, легко получаемым сокращениям, чего, понятно, не встречается в жизненной практике.

Но и здесь автор не устанавливает какого-либо конкретного вывода: нельзя же все задачи брать с „сырыми“, неподбранными числами, впадая тем самым в другую крайность.

Не можем мы согласиться с автором в его настойчивых советах — не решать квадратных уравнений через разложение на множители или с его советами — каждый раз заменять $\sqrt{2}$ приближенно равным ему числом 1,414.

Справедливы советы автора — не увлекаться сокращенными алгебраическими вычислениями, если они не обоснованы для сознания учащегося. Нельзя не отметить, как Торндайк эпически спокойно из сопоставления выводов тестов общего развития и алгебраических способностей делает основное заключение, что „алгебраическая способность оказывается интеллектуальной способностью“. Неужели может быть другое мнение, если не ставить соответствующих экспериментов? Большой вызывается с нашей стороны протест, когда мы читаем у автора место, где говорится, что „ученики школ повышенного типа принадлежат, за редкими исключениями, к той части населения, которая обладает предрасположением к абстрактному мышлению“.

Торндайк, несомненно, хочет сказать другое; скорее, что эти ученики находятся в среде более обеспеченной и тем самым прикоснувшейся к некоторым основам теоретической культуры. Здесь американский педагог показал себя как пленник буржуазного мировоззрения.

В главе десятой — „Новые виды алгебраических упражнений“ — автор дает примеры и задачи, из которых можно выбрать интересные и реальные проблемы, начиная с простейших и кончая весьма сложными. Взяты из реальной действительности простейшие формулы, легко переводимые на язык алгебры силами учащихся: ряды садовых деревьев, ряды стульев в театре, скорость отдачи орудия, плотность материи, крепость

раствора, окраска стен и телефонные соединения — все это „дается в табличной и оперативно-функциональной формулировке“.

Приведены и сложные физико-технические формулы, правда, не выводимые силами учащихся, так как имеются соответствующие эмпирические параметры: предельная нагрузка сваи, потеря помещением тепла, мощность парового судна и автомобильного мотора, сила тяги дымовой трубы, подвесной груз к чугунной трубе, оборот торгового предприятия — все это приведено в табличном и оперативно-функциональном задании.

Главу одиннадцатую — „Расположение учебного материала при прохождении курса алгебры“ — автор начинает словами, что учителя обнаруживают большее пристрастие к строго систематическому изложению тем, причем изучение последних разделяется на отделы и подотделы, которые проходятся каждый в свое время и в определенном порядке. К этому их побуждает свойственное всякому представителю точного знания пристрастие к системе, а также то обстоятельство, что при этом очень легко определить каждый момент, что уже сделано и что еще осталось пройти.

Американский педагог, несомненно, недооценивает роль системы в развивающемся научном мышлении. Он не выдвигает той или иной ведущей системы, не подчеркивает ни последовательно-поступательной, ни спиральной системы в развитии культуры „точного знания“, а скорее — критикует всякую систему, стоя ближе к стихийному творческому порыву учителя и учащегося, что так гармонирует со стихийным хозяйством страны, представителем которой является Торндайк.

Автор совершенно верно подмечает наступивший кризис в системе развертывания научно-математических знаний; в практике школ последовательно-поступательная система приобрела мертвый оттенок формализма; крайние формы спирально-концентрической системы в практике последних годов создают обезличку в проходимом материале и безответственность учителей низших классов перед преподавателями старших групп средней школы.

Неверны организационные выводы, делаемые автором: вместо отыскания новой жесткой системы американский педагог отмахивается от всякой системы, предварительно созданной, считая невозможным навязывать таковую по соображениям якобы педагогическим.

Отсюда понятна та легкость обращения американского педагога со всякими установившимися системами в алгебраической культуре. Автор последовательно дошел до полного отрицания истинной системы в алгебре, говоря, что „не было бы большой беды в том, что некоторые задачи приводили бы к квадратным или даже кубическим уравнениям; учащиеся могли бы составить подобные уравнения, откладывая решение их до приобретения соответствующих технических навыков“; тогда как для нашей школы, в особенности на данном этапе, вопросы системы образования являются ведущими и решающими. В постановлении ЦК ВКП(б) от 5 сентября 1931 г. совершенно правильно говорится, что „всякая попытка оторвать политехнизацию школы от систематического и прочного усвоения наук, особенно физики, химии и математики, преподавание которых должно быть поставлено на основе строго определенных и тщательно разработанных программ, учебных планов и проводиться по строго установленным расписаниям, представляет собой грубейшие извращения идей политехнической школы“.

Предлагаемый порядок расположения учебной алгебры со ссылкой на его обоснованность соображениями „психологии предмета“, не выдерживает никакой критики. Классификация дана по разным путанным и случайным основаниям, мелкие вопросы и большие идеи идут как равноправные сочлены, математические задачи противопоставлены алгебраическим формулам, тригонометрия каким-то образом затерлась между тисками корней и логарифмов, а последние поставлены раньше отрицательных и дробных показателей и пр. Нет возможности разобраться в предложенном сырье и кустарщине, — все это должно пойти на слом.

Нельзя согласиться с советами автора — начинать сокращение дробей с их осложненными многочленными видами компонентов, а не одночленными, как исторически принято и логически оформлено. Слишком категоричны предложения на счет связывания раскрытия скобок с умножением, хотя — с ограничением — подчеркнутую мысль нужно поддержать.

Интересны наблюдения автора, что восприятие навыков сложения одночленов идет труднее, чем умножения, а также его замечания, что „лицу, сведущему в алгебре, но неискушенному в вопросах психологии, крайне трудно понять ту борьбу противоположных представлений, которую испытывает сознание ребенка при встрече со сложением, например, $3b + 4b$, когда получается $7b$, а другое b будто в глазах учащегося исчезает“.

Правильны замечания относительно того, что в соответствующем месте необходимо брать систему линейных уравнений, возникающих из трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ при определении его параметров, что встречается в технической действительности.

В мимоходом поставленной громадной важности проблеме „отрицательных чисел“ автор ничего в сущности не сказал.

В двенадцатой главе — „Прочности алгебраических связей“ — Торндайк на основе поставленных тестов-письменных работ в лучших школах САСШ делает неутешительный вывод о состоянии алгебраического образования в стране: „Учащиеся не владеют ни одним элементом алгебры, поскольку они не могут проделать ни одного упражнения с надежностью, близкой к 100%“. Поразительно то, что письменные работы имели простейшие примеры или ниже средней трудности и все же получилось более одной трети ошибочных работ.

Как снижено математическое образование в массовых школах САСШ!

Дальше автор делает правильные выводы, что „было бы лучше, если бы учащиеся хорошо знали половину или две трети тем, вместо того чтобы знать понемногу обо всем“, и дальше продолжает: „Если ученики не могут решить, в среднем, одного алгебраического примера из четырех, то дисциплинирующее значение алгебры сводится к нулю; если они столь неуверены в технике, то близко к нулю и значение алгебры как орудия счисления“.

Тяжело, что автор только констатирует факт массовой алгебраической безграмотности, но не анализирует его причин и не дает реальных средств к изменению сложившейся методической действительности, кроме паллиативных мер, связанных с советом завести справочник рабочих формул, обращения внимания на устные алгебраические вычисления, разрешения заглядывать в учебник и рекомендации получения результата не через запомнившиеся формулы, а через выполнение алгебраи-

ческого исчисления по установленным законам алгебры. Автор не говорит о главном: как правильно ставить теорию алгебры, чтобы она была надежным руководителем в мелких и больших вопросах практики; словом, автор не ставит вопроса о сознательном вращении в научно-систематическое алгебраическое мышление. Нам думается, что результаты алгебраической безграмотности в американской школе объясняются тем, что учащимся своевременно не дана алгебра в систематическом виде как основа наук, и это должно быть историческим уроком для нас.

В главе тринадцатой, витиевато озаглавленной „Психология алгебраических связей“, ставится вопрос о количестве прорабатываемых и необходимых для закрепления упражнений по каждому разделу алгебры. И здесь, как и следовало ожидать, в действительности имеются громадные расхождения в количестве предложенных упражнений между отдельными авторами задачников и мнениями опрошенных „известных“ преподавателей САСШ, когда расхождения доходят до размера десятка раз. Так, на некоторые разделы алгебры дается недостаточное число упражнений, а на иные предложено их избыточное количество.

Автор подбирает темы, где мы недоучиваем учащихся, давая недостаточное число примеров и задач, и где мы переучиваем, давая сверхдостаточное их количество.

Здесь же мимоходом дается временная нормировка соответствующих отделов и вопросов.

В разделе „Желательное количество упражнений“ Торндайк делает не совсем убедительные выводы о количестве упражнений по соответствующим разделам алгебры, полученные в результате обработок анкет пяти психологов и шестидесяти четырех преподавателей математики.

В дальнейшем ставится вопрос о распределении упражнений, подобранных для данной темы, где советуется вкрапывать в новые задачные темы старое содержание по определенной системе; также дается временная пропорция чередования родственного и пройденного. Так, после прохождения сложения, вычитания и умножения, когда проходится деление, советуется вести упражнения на деление с повторением предшествующего в отношении 3:1:1:1.

В четырнадцатой главе — „Интерес учащихся к занятиям алгеброй“ — через анкету среди учителей и учащихся автор получил „неограниченный“ вывод, что алгебра в целом является средне-любимым предметом для учащихся среди целой плеяды средне-общеобразовательных предметов.

А далее он обрабатывает данные уже относительно разных отделов алгебраического курса. Оказывается, будто бы учащиеся предпочитают вести вычисления над числами, переданными в цифровой форме, перед вычислениями над общим числом; не любят длинных формул; будто бы испытывают „антипатию“ к дробным выражениям; не совсем приятно вспоминают о графической работе в алгебре и больше интересуются подстановками частных числовых значений в общую алгебраическую формулу.

И самая анкета, и полученные ответы рисуют убогость алгебраической культуры, где все разменивается на разрозненные мелочи практики и „живая алгебраическая машина“ разложена на эпизоды мертвых частей. Все

выводы далеко не убедительны. Читатель получает „в свое распоряжение рутинные, бессмысленные столбцы цифр, статистическую „игру в цифирки“ вместо осмысленной статистической обработки материала“¹.

Пятнадцатая глава — „Индивидуальные и половые различия в успешности занятий алгеброй“, как и следовало ожидать, исходя из исторической практики, дает „экспериментально проверенные“ выводы, что „не существует сколько-нибудь заметного различия в способностях к занятиям алгеброй“.

Оказывается, что у мальчиков нюансы различий падают в сторону прикладных интересов, а у девочек — в сторону более сложных задач.

И, наконец, в шестнадцатой главе — „Дальнейшие желательные изыскания в области психологии алгебры“ — автор ставит неразрешенные методические проблемы, но уже поставленные в американской действительности.

Что трудно и легко дается учащимся в процессе изучения алгебры, на что уходит продуктивно и непродуктивно при обучении время, какова роль доказательств в алгебре, в чем может проявиться помощь от геометрии в развитии алгебры, как повысить интерес к алгебраическому содержанию, как составить стандартный задачник, — вот те подчеркнутые проблемы, на которые нужно ожидать ответа, повидимому, в следующих работах американских педагогов.

Поскольку мы в СССР отрываемся от традиционной рутины алгебраического образования, постольку нам необходимо использовать международный опыт в деле рационализации математического образования.

Книга Торндайка может быть полезной при изучении методики алгебры в педвузах и, частично, при преподавании алгебры. Тем более, что методике алгебры учиться почти не у кого, так как печатных работ имеется на мировом рынке мало. И все же, несмотря на наш суровый прием американского педагога, нужно отметить, что есть чему учиться у Э. Л. Торндайка.

Во-первых, в этой работе читатель ознакомится с практикой алгебраического образования заатлантической школы, увидит конкретно недостатки преподавания алгебры, связанные с ее полужнанием и еще чаще — с быстрой потерей непрочно усвоенных ее элементов и нерациональной постановкой ее многих отделов.

Читатель поймет, как история подвела все капиталистические страны, примерно, к одному знаменателю — недовольству наиболее прогрессивной части общества традиционной системой и выделению верхушки интеллигенции, предполагающей в рамках капиталистических условий разрешить наметившийся кризис науки и образования.

Увидит читатель и свой идеологический рост, когда его, часто рядового школьного работника, не может удовлетворить метафизический анализ Торндайка, одного из тех авторов, которые считаются единицами в американской действительности как лидеры и властители дум учительского мира.

Больше того, наш учитель может найти и корни, на которых выросло столь несовершенное произведение, как предложенный труд Торндайка. В этом нашему учителю поможет методология диалектического материализма, и можно надеяться, что неверно данный анализ и конст-

¹ Ленин, Собр. соч., изд. I, т. IX, стр. 236.

рукция многих вопросов будут выправлены в их исторической и логической основе. Все это должно произойти потому, что наше сознание не пассивно размышляет о действительности, а ее изменяет в грандиозном социалистическом строительстве, создающем необходимое и истинное единство науки и практики, о котором между строк мечтает наш уважаемый автор; только у нас в СССР создается массовый социальный заказ на массовое научное знание и в первую очередь приходится нести „технику в массы“ и вместе с ней ее рычаг — математику. Американскому педагогу приходится делать лишь статистический анализ небогатой идеями школьной действительности, но не планомерно ее изменять, отсюда становятся понятными многие указанные „левые“ фразы заатлантического педагога. Во-вторых, в этой работе получают педагогические вузы, исследовательские институты и „творцы методики“ конкретный материал по постановке методического эксперимента в области такого сложного раздела математики, каковым является алгебра. У нас нет методических курсов по алгебре, — предстоит большая фундаментальная работа по постановке и развитию ее; в числе прочих методов построения методики придется пользоваться анкетными и другими видами статистического анализа, и тогда придется использовать первый опыт, данный Торндайком в этой работе. Понятно, что придется значительно исправлять статистический анализ автора, помня, что сперва идет раскрытие специфических и существенных сторон данного вопроса, а потом идет количественная обработка, т. е. качественный анализ служит основной предпосылкой количественного, а не наоборот, как это представлено у Торндайка. „Лишь после того, как выяснена сущность этих форм и их отличительные особенности, — имеет смысл иллюстрировать развитие той или другой формы посредством обработанных надлежащим образом статистических данных“ (Ленин).

В-третьих, в этой работе экспериментальные образцовые и массовые школы получают конкретные указания рационализации преподавания алгебры в направлении: 1) как сделать занятия по алгебре содержательными с повышением жизненности в росте алгебраического мышления учащегося, 2) как сделать занятия по алгебре интересными через создание соответствующих эмоций и с повышением сознательности в росте учащегося с психологически оправданной постановкой и разрешением некоторых алгебраических отделов и 3) как создать алгебраические навыки быстрее и прочнее, чтобы не было „недоучивания и переучивания“ их с выделением и анализом навыков, которых не нужно ставить.

Правда, здесь нужно быть особенно бдительным, используя наш, развернутый выше критический анализ.

Учиться нужно критически, боясь попасть в идеологический реформистский плен, выбирая по преимуществу техническую, а не идеологическую сторону методического процесса, расщепление чего делается с большим трудом, так как в конкретном движении мысли все слито в единый методологический и методический процесс.

Для того, кто желает получить полное понимание данной работы, мы советуем прочитать работы Торндайка по арифметике, как „Психология арифметики“ и „Новые методы преподавания арифметики“, изданные Учпедгизом в 1932 г. с нашими предисловиями.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКЦИИ РУССКОГО ПЕРЕВОДА.

I.

Настоящая книга является переводом американского оригинала „The Psychology of Algebra“ Thorndike'a, вышедшего в свет в 1922 г.

Перевод сделан с значительными сокращениями объема книги, примерно на 43%.

При переводе были приняты меры для сохранения всех сколько-нибудь существенных мыслей автора, его анализа вопросов, критических замечаний, характерных примеров, выводов и предложений. Это могло быть достигнуто за счет сокращения в той или иной мере остального материала. В этом отношении пришли на помощь следующие обстоятельства. Прежде всего оказалось возможным поступиться внешностью издания, заменив во многих случаях табличное расположение материала текстовым и опустив значительное число диаграмм, особенно в главе XIV оригинала: „Распределение упражнений“, где автором обработано графически распределение упражнений в нескольких ходовых американских учебниках, умышленно обозначенных им литерами *A, B, C, D*; поскольку эти учебники читателям неизвестны и подробный анализ их является излишним, достаточно отметить лишь общие тенденции, что нами и сделано. Далее, некоторые части книги носят чисто „локальный“ интерес. Таковы, например, весьма объемистая глава I, содержащая подробную характеристику учащихся в школах повышенного типа САСШ, и глава XV оригинала, излагающая сравнительный интерес учащихся к занятиям алгеброй и другими предметами. Вовсе опустить первую главу нам казалось невозможным, так как характеристика учащихся, несомненно, важна для дальнейших выводов автора; но сократить ее приблизительно в четыре раза представилось целесообразным. Что касается XV главы оригинала, то едва ли нас может интересовать детальное изучение сравнительного пристрастия учеников-американцев к алгебре, ветхому завету, кулиарии или латыни. Поэтому эту главу, как самостоятельную, мы упразднили, сохранив лишь основной вывод автора. То же было сделано с данными относительно половых различий в успешности занятий алгеброй, поскольку сам автор признает, что они весьма не велики и во всяком случае во много раз меньше, чем индивидуальные различия. Подобные же сокращения были сделаны и в отношении некоторых других тем, встречающихся в различных главах. Три приложения, которыми заканчивается книга, касаются сравнения алгебраических вычислений с решением уравнений, вопроса о продолжительности действия алгебраических связей и влияния изменения данных на решение примеров и задач. Эти приложения являются перепечаткой соответствующих статей, помещенных в свое время в педагогических журналах САСШ, и не были включены автором в основной текст, повидимому, вследствие характера их изложения. Мы решили их значительно сократить, отчасти переработать и отнести к тем главам книги, где трактуются сродные вопросы.

По выполнении этих сокращений оказалось возможным достаточно полно изложить те темы, которые нам казались наиболее существенными, как, например, психология уравнения и решения задач, состав алгебраических способностей, новые виды алгебраических упражнений и др. Мы сочли также целесообразным сохранить характеристику почти всех тестов, приводимых автором, в том числе армейского альфа-теста, опустив в

них лишь несколько менее существенных примеров. Думается, что многие из этих тестов по своей оригинальности представят значительный интерес для наших читателей.

Таким образом, наша работа заключалась в отборе материала, который надо было использовать, его перегруппировке, в некоторых же случаях — переработке, а затем и переводе его на русский язык. Само собой разумеется, что при этих условиях перевод нельзя было выполнить, строго следуя тексту; его пришлось заменить возможно точной, но сжатой передачей соображений автора с сохранением характерного для последнего стиля.

В наши намерения не входило „приспосабливать“ работу Торндайка для наших условий. Автор особенно ценен именно учетом данных конкретных фактов, данной обстановки обучения данной среды САСШ, в которой протекает работа, и т. д. С методами Торндайка надо ознакомиться „в натуре“, отбросить то, что не соответствует нашим условиям, и использовать те указания и в тех пределах, которые уместны в советских школах.

Тем не менее, в ряде случаев мы пошли на замену примеров, приводимых автором, другими, более близкими нашими читателям, стараясь сохранить характер примеров с учетом той цели, ради которой они приводятся. Так, диаграмму изменения тоннажа флота САСШ мы заменили диаграммой выплавки чугуна в СССР (фиг. 17), соответственно изменив и текст вопроса. Равным образом в главе, трактующей о новых видах алгебраических упражнений, мы заменили многие формулы, принятые только в Америке, другими, содержащимися в наших справочниках и т. д.

II.

Из краткого предисловия Торндайка видно, что в составлении „Психологии алгебры“ принимал непосредственное участие ряд его сотрудников: Маргарита Кобб, Яков Орлеанс, Персиваль Саймондс, Эльва Вальд, Элла Вудярд.

Общее число учителей и научных работников, доставивших сообщения, проделавших экспертную работу и т. д., превысило двести. Таким образом, указанный труд, выполненный под непосредственным руководством Торндайка, носит до некоторой степени коллективный характер. Следует, однако, заметить, что единство плана, системы и стиля более или менее выдержано на протяжении всей книги.

Отметив что настоящая работа является в некоторых своих частях продолжением трудов американских педагогов Нонна, Смита, Юнга, Рогга-Кларка, неоднократно цитируемых в дальнейшем, автор указывает, что основой данной книги является попытка приложить к преподаванию алгебры те факты и основные принципы, которые в настоящее время прочно установлены психологией обучения. К главнейшим из них автор относит представление о динамической умственной работе как системе связей между положением и реакциями, трактование вопросов изучения предмета как установление этих связей или навыков и представление о рассуждении и мышлении (или о так называемых „высших способностях“) как организации этих навыков для отбора и совместной работы, а не как „о силах, противоположных этим навыкам“.

ГЛАВА I.

УЧАЩИЕСЯ В ШКОЛАХ ПОВЫШЕННОГО ТИПА.

Для установления наиболее рациональных путей обучения алгебре было бы желательно располагать достаточно подробными и надежными сведениями об общем составе учащихся, занимающихся алгеброй, степени их общего развития, характере их деятельности по окончании школы и том минимуме познаний в области алгебры, который требуется для изучения различных дисциплин как в самой школе, так и после ее окончания.

К сожалению, данные, которые можно собрать по всем этим вопросам, весьма неполны и с трудом поддаются обобщению.

Состав учащихся в школах повышенного типа.

В отношении общего состава обучающихся алгебре должен быть, прежде всего, отмечен чрезвычайный рост числа учащихся в американской четырехлетней школе повышенного типа (high school), в которой начинается преподавание алгебры. Преподаватель математики или составитель руководства по алгебре сделает большую ошибку, если при выборе методов обучения, равно как и учебного материала, будет представлять себе учеников такими, какими они были двадцать пять-тридцать лет назад, когда этот современный педагог сам еще был учащимся.

Анализ возрастного состава населения, а также количества учащихся и оканчивающих школы повышенного типа в САСШ, произведенный в отношении 1890 и 1918 гг., показывает, что общее число учащихся в указанных школах возросло за соответствующий период с 298 до 1804 тыс., т. е. в 6 раз, а число детей, принимаемых ежегодно в первую из четырех групп указанных школ, достигло 650 тыс., что составляет около трети всех детей, которым в данном году исполнилось 14 лет, тогда как ранее в школы повышенного типа попадал только один ребенок из десяти того же возраста. Приблизительно в той же пропорции изменилось и количество оканчивающих ежегодно указанные школы.

Мы вовсе не располагаем данными о прирожденных способностях учеников прошлого времени и имеем весьма скудные сведения о тех же способностях современных учеников. Но все же несомненно, что, имея дело с обучением алгебре одной трети всех детей данного возраста, вместо одной десятой или одной одиннадцатой, как в прежнее время, мы встречаемся со значительно большим разнообразием индивидуальных

способностей учащихся. А это обстоятельство имеет весьма существенное значение в деле обучения алгебре.

Небезынтересно отметить, что в странах Западной Европы обучение в школах, аналогичных американским школам повышенного типа, не имеет столь широкого распространения. Так, в Пруссии в 1910 г. число 14-летних учащихся в гимназиях, прогимназиях, реальных училищах и других школах, которые можно сравнивать с американскими школами повышенного типа, составляло около 30 тыс. при общем числе детей того же возраста около 800 тыс.; другими словами, в Пруссии соответствующее образование получил в 1910 г. только один ребенок из 27. В последующие годы в этом отношении в Пруссии произошел некоторый сдвиг, однако совершенно несравнимый с тем, который имел место в САСШ.

Бирн (Вугпе, 1922) приводит следующие данные о процентном отношении суммарного числа учащихся в четырех группах школ, аналогичных американским школам повышенного типа, к общему числу детей соответствующих четырех возрастных групп в различных странах:

Шотландия	9,1	Франция	2,4
Дания	5,4	Швейцария	2,2
Норвегия	4,5	Австрия	2,0
Ирландия	4,3	Япония	1,8
Англия и Уэльс	3,9	Германия	1,7
Голландия	2,6	Швеция	1,4 и т. д.
Бельгия	2,5		

Хотя данные Бирна не могут быть приняты безоговорочно, все же они достаточно ясно характеризуют состояние соответствующего вида образования в различных странах.

Характер деятельности оканчивающих школы повышенного типа.

Вопрос о дальнейшей деятельности оканчивающих школы повышенного типа в САСШ представляет большой интерес для правильной организации школьного обучения. Однако сведения, которые имеются по этому вопросу, не охватывают не только всей страны в целом, но даже отдельных штатов и крупных городов, так что нам по необходимости приходится довольствоваться хотя и достаточно характерными, но все же отрывочными данными.

Так известно, что из 734 окончивших в июне 1908 г. 75 нью-йоркских школ повышенного типа 55,6% поступили в другие школы для продолжения образования (университетские колледжи, профессиональные учебные заведения и т. д.), 16,0% посвятили себя педагогической деятельности, 11,7% нашли занятие в промышленности, 8,5% — в торговле, 5,6% остались дома; в отношении остальных 2,6% характер деятельности остался невыясненным. Из 845 окончивших в том же году 48 школ повышенного типа в Иове 30% посвятили себя педагогической деятельности, 16,6% поступили в художественные школы, 16,1% сделались коммерческими служащими, 7,7% избрали так называемые „свободные профессии“, 5,8% нашли себе занятие в сельском хозяйстве, 3,8% — в промышленности и 20% остались дома (в том числе 17% бывших учениц, вышедших замуж). Каунте (Counts) сообщает следующие данные о дальнейшей деятельности 20 389 окончивших в 1913 г. 100 школ

повышенного типа, собранные через заведующих этими школами в первой половине 1913/14 учебного года: 37,9% окончивших продолжали образование, 10,1% нашли занятие в промышленности, 5,3% — в сельском хозяйстве, 3,4% — в торговле, 4,3% избрали педагогическую деятельность, 17,6% — прочие виды занятий, 15,1% — остались дома; в отношении занятий остальных 6,3% сведений не имеется.

Аналогичные данные, касающиеся как окончивших школы повышенного типа, так отчасти и вышедших из них по различным причинам, можно было бы привести в весьма значительном количестве. Мы ограничимся, однако, только теми цифрами, которые приведены выше, так как они достаточно освещают интересующий нас вопрос.

Обратив внимание на то, что суммарные данные о числе окончивших, нашедших занятие в торговле, промышленности и сельском хозяйстве или посвятивших себя „прочим занятиям“, не характеризуют еще положения данного лица в данной отрасли, так как под эту номенклатуру с одинаковым правом попадают и конторский мальчик, и директор банка, и сельскохозяйственный рабочий, и управляющий крупным имением, — автор попытался детально проанализировать ряд опубликованных и неопубликованных отчетов и других материалов, посвященных рассматриваемому вопросу. Ему удалось проследить карьеру довольно большого числа лиц, окончивших школы повышенного типа за ряд лет (с 1892 по 1901 г. и с 1902 по 1911 г.). При этом оказалось, что оканчивающие избирают себе самые различные профессии и самые разнообразные виды занятий, однако из числа наилучше оплачиваемых и дающих несколько привилегированное положение в жизни. Это полностью подтверждает обычное утверждение учителей и заведующих школами повышенного типа, что их питомцы редко остаются простыми рабочими, шоферами или продавцами.

Кроме того, необходимо иметь в виду, что весьма большой процент оканчивающих школы повышенного типа (в некоторых районах около 50 и даже выше) продолжает образование в университетах и профессиональных учебных заведениях; значительный процент их посвящает себя и педагогической деятельности.

Что же касается лиц, не окончивших школ повышенного типа, то собранные автором данные показывают их преуспевание по сравнению с лицами, вовсе не посещавшими этих школ; однако в смысле круга своих занятий они находятся в менее благоприятном положении, чем лица, окончившие указанные школы; этого, впрочем, можно было ожидать и наперед.

Вот те основные данные, которые можно привести в отношении дальнейшей деятельности лиц, обучавшихся в американских школах повышенного типа.

Выше уже отмечалось, что число учащихся в указанных школах возрастает весьма быстро. Поэтому возникает вопрос, могут ли оканчивающие эти школы в настоящее время рассчитывать на тот же круг занятий, как их предшественники, оканчивавшие школы хотя бы в период между 1891 и 1901 гг. Чтобы это было возможно, необходимо, чтобы соответствующие виды занятий представлялись только лицам, окончившим по меньшей мере школы повышенного типа. В этом нет ничего невозможного; но если бы в этом отношении и произошел некоторый сдвиг вниз, то все же благодаря тесному соответствию между полнотой

образования и требованиями данной профессии оканчивающие школы повышенного типа могут рассчитывать на относительно благоприятное положение при выборе дальнейших занятий¹.

Общее развитие учащихся в школах повышенного типа.

Для разработки планов преподавания алгебры весьма важно, далее, знать, какова же степень общего развития учащихся в школах повышенного типа, их „интеллигентность“. По этому вопросу собран уже богатый материал, причем мерилом степени общего развития является успешность выполнения учащимися особого разработанного в САСШ теста — так называемого „Армейского альфа-теста“. Чтобы читатель мог составить себе ясное представление о характере соответствующего испытания, мы приведем здесь основные черты этого теста.

Последний разбивается на 8 разделов, содержащих в общей сложности 212 отдельных заданий. Задания первого раздела приводятся здесь полностью; из прочих разделов приводятся только наиболее характерные примеры, причем они помечены теми номерами, под которыми они помещены в оригинале.

РАЗДЕЛ I.

Устное испытание.

Всего 12 заданий.

1. „Внимание! Когда я говорю „внимание“ — приготовьте карандаши. Взгляните на круги, изображенные на первом рисунке розданных вам фигур. Когда я скажу „начинайте“, но отнюдь не ранее того, поставьте крестик сперва внутри первого круга, а затем третьего. Начинайте“. (На исполнение задания дается не более 5 секунд.)

2. „Внимание! Взгляните на круги, изображенные на втором рисунке, в которых проставлены цифры. Когда я скажу „начинайте“, проведите линию от первого круга к четвертому так, чтобы она прошла над вторым кругом и под третьим. Начинайте“. (Не более 5 секунд.)

Армейский альфа-тест.

Раздел 1. Форма V.

3. „Внимание! Взгляните на треугольник и квадрат, изображенные на третьем рисунке. Когда я скажу „начинайте“, поставьте крестик на площади, которая входит в треугольник, но не в квадрат, а затем цифру 1 на площади, которая входит как в треугольник, так и в квадрат. Начинайте“. (Не более 10 секунд.)

4. „Внимание! Взгляните на четвертый рисунок. Когда я скажу „начинайте“, поставьте цифру 1 на площади, которая входит в круг, но не входит ни в треугольник, ни в квадрат, а затем цифру 2 на площади, которая входит в треугольник и круг, но не входит в квадрат. Начинайте“. (Не более 10 секунд.)

5. „Внимание! Взгляните на пятый рисунок. Если вы считаете, что пулемет может произвести больше выстрелов в минуту, чем винтовка, то поставьте, когда я скажу „начинайте“, крестик внутри второго круга, если же вы этого не считаете, то подчеркните слово „нет“. Начинайте“. (Не более 10 секунд.)

6. „Внимание! Взгляните на шестой рисунок. Когда я скажу „начинайте“, поставьте внутри второго круга число, дающее *правильный* ответ на вопрос, сколько месяцев в году. В третий круг не проставляйте ничего, в четвертый же круг запишите любое число, которое давало бы *неправильный* ответ на

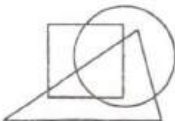
¹ Вследствие кризиса капитализма не только окончившие среднюю, но даже и высшую школу (инженеры, врачи и пр.) не могут найти занятий в САСШ.

поставленный вам вопрос, для которого вы только что нашли правильный ответ. Начинаяте". (Не более 10 секунд.)

7. „Внимание! Взгляните на седьмой рисунок. Когда я скажу „начинайте“, зачеркните букву, стоящую непосредственно перед *С*, и подчеркните букву, стоящую на втором месте перед *Н*. Начинаяте". (Не более 10 секунд.)

8. „Внимание! Взгляните на восьмой рисунок. Обратите внимание на три круга и на три слова. Когда я скажу „начинайте“, поставьте в *первый* круг *первую* букву *первого* слова, во *второй* круг *первую* букву *второго* слова и в *третий* круг *последнюю* букву *третьего* слова. Начинаяте". (Не более 10 секунд.)

9. „Внимание! Взгляните на девятый рисунок. Когда я скажу „начинайте“, зачеркните все числа, которые больше 20, но меньше 30. Начинаяте". (Не более 15 секунд.)

1. ○ ○ ○ ○ ○
2. (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)
3. 
4. 
5. ○ ○ ○ Да Нет
6. ○ ○ ○ ○ ○
7. A B C D E F G H I J K L M N O P
8. ○ ○ ○ АРМИЯ ОРУДИЕ БОЙ
9. 34-79-56-87-68-25-82-47-27-31-64-93-71-41-52-99
10.

--	--	--	--	--
11.

7F	4	3	5A	8	2	6	9B	3
----	---	---	----	---	---	---	----	---
12. 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Фиг. 1.

10. „Внимание! Взгляните на десятый рисунок. Обратите внимание на то, что полоска разбита на пять частей. Когда я скажу „начинайте“, отметьте цифрами 3 и 2 каждую из двух наибольших частей, а затем любой цифрой от 4 до 7 ту часть, которая следует по величине за наименьшей. Начинаяте". (Не более 15 секунд.)

11. „Внимание! Взгляните на одиннадцатый рисунок. Когда я скажу „начинайте“, зачеркните все четные числа кроме тех, которые стоят в квадратах, а также все нечетные числа, которые стоят в квадратах рядом с буквами. „Начинаяте". (Не более 25 секунд.)

12. „Внимание! Взгляните на двенадцатый рисунок. Если 17 больше 5, а 6 больше 8, то, когда я скажу „начинайте“, зачеркните 6; если же 6 не больше 8, то подчеркните 7. Начинаяте". (Не более 10 секунд.)

РАЗДЕЛ II.

Всего 20 заданий.

Старайтесь находить ответы как можно быстрее. Проставляйте ответы на этом листке.

Примеры.

1. Сколько будет 30 человек и 7 человек? *Ответ* ().
8. Отряд прошел 80 км в пять дней. В первый день было пройдено 18 км, во второй — 12 км, в третий — 20 км и в четвертый — 16 км. Сколько километров было пройдено в последний день? *Ответ* ().
15. Запасы провианта на судне рассчитаны на снабжение команды из 500 человек в течение 6 месяцев. На сколько времени хватит тех же запасов для команды в 1200 человек? *Ответ* ().
19. Войсковая часть насчитывает 3000 артиллеристов, 15000 пехотинцев и 1000 кавалеристов. Если численность ее будет доведена до 20900 при сохранении того же соотношения между различными родами оружия, то насколько увеличится число артиллеристов? *Ответ* ().

РАЗДЕЛ III.

Всего 16 заданий.

Это испытание по преимуществу в „здравом смысле“. В каждом примере даются три ответа на один и тот же вопрос. Отмечайте крестиком, поставляемым в одном из трех квадратов, какой ответ кажется вам наилучшим.

Примеры.

1. Кошки полезные животные, потому что:
- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| ☐ | они истребляют мышей, |
| ☐ | они ласковы, |
| ☐ | они боятся собак. |
5. Если спросят ваше мнение о человеке, которого вы не знаете, то что вы ответите?
- | | |
|--------------------------|--|
| ☐ | Я пойду и познакомлюсь с ним. |
| ☐ | Я о нем хорошего мнения. |
| ☐ | Я его не знаю и потому ничего не могу сказать. |
13. Вода при замерзании разрывает трубы, потому что:
- | | |
|--------------------------|------------------------------------|
| ☐ | холод делает трубы менее прочными, |
| ☐ | вода при замерзании расширяется, |
| ☐ | лед останавливает движение воды. |
16. Почему около полюсов холоднее, чем вблизи экватора? Потому что:
- | | |
|--------------------------|---|
| ☐ | полюсы всегда дальше от солнца, |
| ☐ | солнечные лучи падают там более наклонно, |
| ☐ | на полюсах больше льда. |

РАЗДЕЛ IV.

Всего 40 заданий.

В каждом примере даются два слова, имеющих более или менее одинаковое или противоположное значение. Подчеркните, какое значение они по вашему мнению имеют. Если вы сомневаетесь, то пропускайте соответствующие примеры.

Примеры.

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. Мокрый — сухой | одинаковое — противоположное |
| 14. Выпуклый — вогнутый | одинаковое — противоположное |
| 30. Апатия — равнодушие | одинаковое — противоположное |
| 39. Отказаться — отклонить | одинаковое — противоположное |

РАЗДЕЛ V.

Всего 24 задания.

Слова, приведенные в каждом примере, можно расположить в надлежащем порядке таким образом, чтобы получилось определенное утверждение. Последнее будет правильным или ошибочным. Подчеркните, каково оно будет по вашему мнению.

Примеры.

- | | |
|--|----------------------|
| 1. Силой отличаются львы большой | правильно — ошибочно |
| 9. Америки президентом первым был Колумб | правильно — ошибочно |
| 11. Делаются масло и сыр воды из | правильно — ошибочно |
| 22. Человека некоторые вызывают болезни смерть неизбежно | правильно — ошибочно |

РАЗДЕЛ VI.

Всего 20 заданий.

Проставьте в каждом числовом ряде помещаемых ниже примеров еще по два числа, которые должны следовать за напечатанными числами.

Примеры.

2.	10	15	20	25	30	35	...	...
6.	8	1	6	1	4	1	...	...
11.	19	16	14	11	9	6	...	...
16.	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	...	...
20.	3	6	8	16	18	36	...	...

РАЗДЕЛ VII.

Всего 40 заданий.

Два первых слова каждого из помещаемых ниже примеров связаны между собой некоторым соответствием. Вам надо установить это соответствие, а затем подчеркнуть одно из последних четырех слов, которое находилось бы в таком же соответствии с третьим словом, как первые два слова между собой.

Примеры.

1. Ружье — стрелять; нож — бежать, резать, шляпа, птица.
 10. Уходить — приходить; продавать — оставлять, покупать, деньги, бумаги.
 24. Ученик — учитель; ребенок — отец, кукла, младший, повиноваться.
 38. Луна — земля; земля — почва, Марс, солнце, небо.

РАЗДЕЛ VIII.

Всего 40 заданий.

Каждое из помещаемых ниже предложений оканчивается четырьмя словами; из последних вам надо выбрать одно, которое делало бы утверждение правильным. Подчеркните в каждом примере то слово, которое, по вашему мнению, обуславливает правильность утверждения. Если вы сомневаетесь, то пропускайте соответствующие примеры.

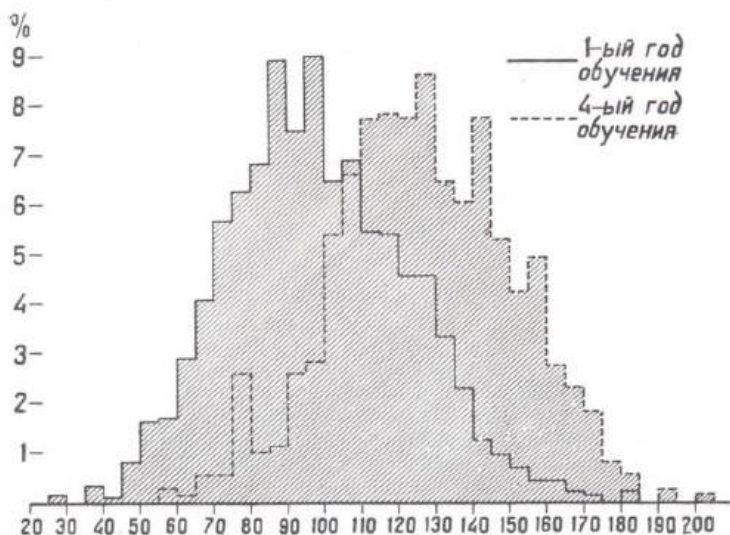
Примеры.

3. Петройт известен производством автомобилей, пива, цветов, тары.
 20. Бомбей находится в Китае, Египте, Индии, Японии.
 35. Ампер является единицей измерения силы ветра, силы электрического тока, гидравлической энергии, дождя.
 39. Слюда есть растительное вещество, минерал, газ, жидкость.

При пользовании этим тестом для испытаний всякий правильный ответ оценивается единицей, а неправильный — нулем; если же имеется твердое основание предполагать, что ответ найден только путем догадки, то ставится отрицательная единица. Если бы произвести поголовное испытание всех белых уроженцев САСШ, то половина из них получила бы отметку 65 или выше; около трети из них имели бы отметку не ниже 85.

Испытания, произведенные при помощи того же теста над учащимися различных американских школ повышенного типа, ясно показали следующие три основных факта.

Во-первых, средняя отметка у учащихся значительно выше, чем у населения в целом; во-вторых, средняя отметка повышается от первого ко второму, от второго к третьему и от третьего к четвертому году пребывания в школе; в-третьих, отметки обнаруживают весьма широкий предел индивидуальных отклонений.



Фиг. 2.

Так, обработанные автором результаты испытаний нескольких тысяч учащихся в различных школах повышенного типа дают следующие средние отметки для различных годов обучения: первый год — 96, второй год — 111, третий год — 123, четвертый год — 126. Пределы индивидуальных отклонений можно характеризовать следующими данными. Из числа 1721 обучающегося в школе первый год девять имели отметки 25—40 и пять — отметки 170—184, из числа же 766 обучающихся в школе четвертый год три имели отметки 55—64 и три — отметки 190—204.

Приводимая выше фигура 2, в которой по оси абсцисс отложены отметки (через пять), а по оси ординат — процент учащихся, имеющих отметки 25—29, 30—34, 35—39 и т. д., наглядно иллюстрирует указанные выше три основных положения.

Последние нашли себе косвенное подтверждение при испытаниях, производившихся при помощи того же теста над лицами, зачисляв-

шимися в американскую армию во время мировой войны. Для тех из них, кои показали, что они покинули школу повышенного типа через один, два, три и четыре года, средние отметки были соответственно 98, 105, 111 и 115. Конечно, поскольку испытаниям в данном случае подвергались не школьники, а лица в возрасте от 21 года до 30 лет, непосредственное сопоставление отдельных отметок того и другого рода было бы неправильным; но мы имеем полное основание подчеркнуть совпадение *общей тенденции* обоих родов чисел.

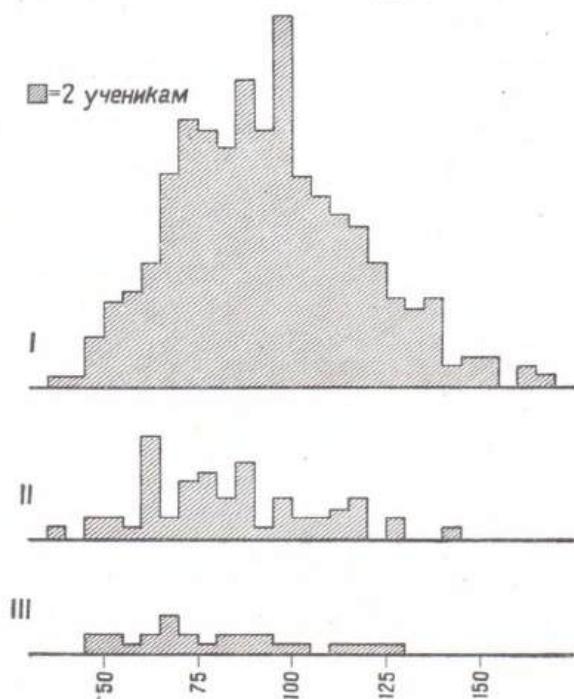
Необходимо отметить также, что, несмотря на широкие пределы колебания индивидуальных способностей, которое должен принимать во внимание каждый учитель, число учеников, обладающих общим развитием ниже среднего, т. е. имеющих отметку ниже 65, весьма не велико: оно не составляет и 3% общего числа учащихся.

Общее развитие и успешность занятий алгеброй.

Как известно, учащимся в школах повышенного типа предоставляется право выбирать различные циклы предметов. Замечено, что ученики, избирающие алгебру или циклы, включающие алгебру, составляют

группы, отличающиеся, вообще говоря, большим общим развитием, чем прочие, и что те ученики, которые обнаруживают успехи в занятиях алгеброй, отличаются большим общим развитием, чем ученики, не справляющиеся с этими занятиями. Некоторые отклонения, конечно, имеют место и здесь, но они не ослабляют общего правила. Указанное явление может быть подтверждено следующими данными, собранными автором. Средняя отметка учащихся, обучающихся первый год в четырех школах в Мичигане, составляла по альфа-тесту для успевающих в алгебре 92, для не успевающих — 80 и для тех, кто ею не занимался, — 75.

Для учащихся в школах Детройта соответствующие отметки составляли 94, 85 и 73, причем общее развитие учащихся определялось в этом последнем случае путем применения несколько иного теста, чем указанный выше. Помешаемая выше фигура 3 позволяет детализировать приведенные выше данные в отношении учеников мичиганских школ, успевающих в алгебре (I), не успевающих (II) и не занимающихся алгеброй (III).



Фиг. 3.

Подготавливая к печати настоящий труд, автор запросил некоторых авторитетных педагогов, близко знакомых с преподаванием алгебры в школах повышенного типа и с вопросами общего развития учащихся, прося их определить, какая степень общего развития нужна для успешных занятий алгеброй в течение первого года обучения в школах повышенного типа. Полученные ответы определили эту степень развития отметкой в 105—110 единиц по особой шкале, в которой отметка 110 соответствует отметке альфа-теста в 100 (точнее в 98,5).

Конечно, интерес к занятиям и усердие могут до некоторой степени компенсировать способность к занятиям алгеброй; бесспорно также, что особая способность к математике может компенсировать недостаток общего развития, измеряемого при помощи альфа-теста. Но все же ученик, который обнаруживает общее развитие, не достигающее отметки 100 в испытаниях при помощи альфа-теста, не будет в состоянии понять ни символики, ни обобщений, ни доказательств, свойственных алгебре. Возможно, что он формально пройдет курс алгебры, но действительно изучить и усвоить последнюю он не сможет. Это относится, примерно, к половине (точнее — 56%) учащихся, вступающих в настоящее время в школы повышенного типа. Пожалуй, было бы правильно принять отметку в 100 как приблизительную норму для определения количества учащихся, могущих с успехом заниматься алгеброй, с допущением увеличения этого количества на 5—10%. Остальные ученики должны бы были изучать математику в объеме, доступном их способностям, или переносить изучение алгебры с первого года обучения на второй или третий. Само собою разумеется, что приведенную цифру придется считать только ориентировочной, так как некоторое различие в способах применения альфа-теста может вызвать и различие в получаемых отметках.

ГЛАВА II.

ПРИМЕНЕНИЯ АЛГЕБРЫ.

Едва ли многие из учителей математики и вообще лиц, работающих на педагогическом поприще, станут оценивать значение алгебры, руководствуясь лишь непосредственной полезностью ее для дальнейших учебных занятий или практической работы: косвенное значение ее как предмета, дисциплинирующего мышление, оценивается обычно довольно высоко. Тем не менее, вопросы практического применения ее в жизни заслуживают самого серьезного внимания. Установить непосредственную полезность отдельных элементов, из которых складывается современная элементарная алгебра, для последующей работы тех, кто ее изучает, было бы весьма благодарной задачей; к сожалению, выполнить подобного рода исследование почти невозможно вследствие его чрезвычайной громоздкости. К тому же результаты, которые могли бы получиться при этом исследовании, нуждались бы в частом исправлении: вспомним, что совсем еще недавно проценты применялись в практической жизни столь же редко, как хотя бы дробные показатели в настоящее время. Поэтому нам приходится ограничиться рассмотрением значения алгебры для двух основных целей — подготовки к занятиям различными научными дисциплинами в университетских колледжах

и профессиональных школах и свободного понимания текста при чтении и изучении различного рода сочинений. Этого будет вполне достаточно, так как в настоящее время алгебра является преимущественно орудием при научной работе и установлении обобщений; лишь немногие элементы ее находят непосредственное применение в различных отраслях обычной практической работы.

Могут возразить, что подходить таким путем к установлению объема преподавания алгебры в течение первого года обучения несколько рискованно, поскольку продолжать образование в высших школах и заниматься впоследствии научной работой сможет лишь меньшинство учащихся. В этом есть доля истины, и приводимые ниже данные об абсолютной и относительной полезности отдельных элементов алгебры автор предлагает рассматривать только как отправные и подлежащие в соответствующих случаях корректированию.

**Алгебра как
подготови-
тельная дисциплина для научных занятий в колледжах и профессиональных школах.**

Изложение этой темы мы начнем с рассмотрения результатов специальной анкеты, предпринятой в 1921 г. Национальным комитетом о нуждах математического образования. Последний разослал значительному числу авторитетных преподавателей колледжей, ведущих занятия как в области физических наук (астрономия, физика, химия), так и в области социально-экономических дисциплин (история, экономика, социология, политика), перечень тем или разделов курса математики с просьбой указать в отношении каждой темы, каково ее значение для того предмета, который преподает опрашиваемый. Ответы давались путем проставления против каждой темы одной из четырех условных отметок, соответствовавших большому (Б), значительному (З), некоторому (Н) или малому (М) значению; последняя отметка проставлялась и в тех случаях, когда опрашиваемый считал данную тему не имеющей никакого значения. Всего было получено 42 ответа от преподавателей физических наук и 22 — от преподавателей социально-экономических дисциплин. При этом многие преподаватели не проставили отметок для ряда тем, помеченных в перечне. Вызывалось ли это какими-либо побочными обстоятельствами или отсутствием у них ясного представления о данной теме, или же затруднительностью дать ей оценку в целом, поскольку различные части ее могли казаться им имеющими различное значение, — сказать трудно. Поэтому с отсутствием полных ответов пришлось считаться как с фактом, не пытаясь исправлять полученные результаты на основе каких-либо предположений о характере ответов, которые могли бы быть получены при повторном запросе тех же преподавателей.

При детальном рассмотрении результатов анкеты обращает на себя также внимание большое различие в оценке почти всех тем со стороны разных лиц. Многие выдающиеся преподаватели считают существенно важными для подготовки к занятиям по их предмету уравнения третьей степени, мнимые величины, конические сечения, полярные координаты, в то время как другие не признают почти никакого значения за отрицательными числами, простыми формулами, отношениями, уравнениями первой степени с одним неизвестным, словом, ни за одной из тем, помеченных в перечне. Возможно, что в последнем

случае сыграла известную роль недостаточная детализированность тем. Однако некоторая и притом значительная разность в оценке безусловно неизбежна при всех условиях.

Учитывая изложенные обстоятельства, и Национальный комитет и автор склонны считать результаты анкеты как мерило лишь относительной, а не абсолютной полезности той или иной темы.

Оставляя в стороне детальное распределение отметок, относящихся к каждой отдельной теме, мы приводим ниже лишь суммарные данные, полученные путем обработки материалов следующим образом. Число отметок Б, З, Н и М, полученных каждой темой отдельно со стороны представителей физических и социально-экономических наук, было пересчитано как процент соответствующего общего числа ответов, имеющих для данной темы. Затем, принимая значимость Б за 1, З — за $\frac{2}{3}$, Н — за $\frac{1}{3}$ и М — за 0, автор определил суммы $B + \frac{2}{3}Z + \frac{1}{3}N$ для отметок, данных отдельно двумя группами преподавателей. Соответствующие данные читатель найдет в графах I и II помещаемой ниже таблицы I. Следующая графа (III) дает среднее арифметическое показаний, содержащихся в первых двух графах. Считая, что относительное значение математики при изучении физических наук больше, чем при изучении социально-экономических дисциплин, автор поместил в графе IV результаты дальнейшего пересчета, в котором цифрам графы I придан вдвое больший вес, чем цифрам графы II, путем удвоения каждого из чисел графы I и деления на 3 суммы его с соответствующим числом графы II. В графах V и VI приводятся данные, заимствованные автором из отчета Национального комитета о наивысшей отметке Б и наивысшей сумме отметок Б + З безотносительно к тому, кем дана наивысшая отметка — преподавателями физических или социально-экономических дисциплин; впрочем, последние дали более высокую оценку, чем первые, только в пяти случаях для Б и семи случаях для Б + З. Указанные отметки так же, как и все предыдущие, даны в процентах.

При изучении данных, приведенных в этой таблице, следует иметь в виду, что средняя оценка для графы I равна 65, для графы II — 40 и для графы III — 51; колебания в оценках для графы I меньше, чем для графы II. При сопоставлении оценок графы I и графы II надлежит принимать во внимание различие в свойственных им средних оценках. Так, для „простейших формул“ оценка со стороны представителей физических наук составляет 97, превышая среднюю на 32; то же со стороны представителей социально-экономических дисциплин — 71, превышая среднюю на 31; совпадение в этом случае весьма близкое. Для „графических изображений“ соответствующие оценки равны 79 и 78, что дает превышение средних на 14 и 38; здесь мы имели уже значительное расхождение в оценке относительного значения этого раздела со стороны двух групп преподавателей.

Предоставляя читателю самому проштудировать таблицу и сделать из нее соответствующие выводы, мы отметим здесь только два наиболее существенных обстоятельства. Разделам алгебры, связанным со статистикой, графическими изображениями вообще и исчислением над многозначными числами, надлежит придавать много большее относительное значение, чем это имело место при обучении алгебре в прошлое время и чем это наблюдается сейчас в огромном большинстве школ. Не менее

Таблица 1

	I	II	III	IV	V	VI
Простейшие формулы—их значение и применение	97	71	84	88	93	98
Графическое изображение статистических данных	79	78	79	79	57	82
Отношения и пропорции	90	65	78	82	84	92
Отрицательные величины—их значение и применение	86	64	75	79	79	84
Вычисления: приближенные вычисления—правильное применение значащих цифр	85	65	75	78	61	97
Линейные функции, $y = mx + b$.	90	53	72	78	78	92
Задачи, приводящие к уравнениям первой степени с одним неизвестным	99	45	72	81	98	100
Задачи, приводящие к квадратным уравнениям с одним неизвестным . .	90	39	70	73	78	93
Графические методы изображения зависимости	80	56	68	72	62	78
Статистика: значение и применение элементарных понятий	53	81	67	62	55	91
Статистика: определение повторяемости и кривые повторяемости .	59	72	66	63	47	80
Задачи, приводящие к системе уравнений первой степени с двумя неизвестными	89	38	64	72	71	95
Вычисления: применение таблиц логарифмов	84	41	63	70	62	91
Вычисления: методы сокращенных вычислений	60	57	59	59	29	65
Графические методы решения задач	69	45	57	61	46	66
Тригонометрия на плоскости . . .	79	34	57	64	57	84
Отклонения от средних величин .	65	47	56	59	50	63
Пользование счетной линейкой . .	63	46	55	57	24	63
Вычисления: применение таблиц иных, чем таблицы логарифмов . . .	63	47	55	58	24	69
Начертательная геометрия	82	28	55	64	68	83

	I	II	III	IV	V	VI
Статистика: корреляция	36	69	53	47	33	80
Квадратичные функции: $y = ax^2 + bx + c$	79	24	52	61	59	80
Теория вероятностей	44	55	50	47	20	55
Бином Ньютона	63	35	49	54	35	67
Арифметическая прогрессия	50	46	48	47	23	52
Геометрическая прогрессия	50	46	48	49	23	48
Тригонометрические вычисления . .	83	8	46	58	68	89
Аналитическая геометрия на плоскости: основные понятия и методы .	68	23	46	53	32	77
Задачи, приводящие к системе уравнений первой степени с числом неизвестных, большим двух	70	19	45	53	42	72
Степени и показатели	65	21	43	50	36	67
Аналитическая геометрия: систематическое изучение прямых	65	21	43	50	34	71
Аналитическая геометрия: систематическое изучение круга	64	15	40	48	29	72
Теория логарифмов	58	22	40	46	34	60
Мнимые величины: их значение и применение	45	34	40	41	23	44
Задачи, приводящие к одному уравнению первой и одному второй степени с двумя неизвестными	65	9	37	46	40	64
Аналитическая геометрия: систематическое изучение конических сечений	54	12	33	40	18	59
Эмпирические кривые и кривые наблюдений	50	16	33	39	12	50
Задачи, приводящие к двум квадратным уравнениям с двумя неизвестными	53	6	30	37	31	50
Полярные координаты	49	6	28	35	18	44
Буквенные уравнения, отличные от формул	29	20	25	26	43	61
Задачи, приводящие к уравнениям более высоких степеней, чем квадратные	42	3	23	15	10	42

существенным фактом является весьма низкая оценка полезности буквенных уравнений, отличных от формул.

Работа, произведенная Национальным комитетом, была повторена Кохом (Koch) и Шлаухом (Schlauch); она еще не опубликована, но автор имел возможность с ней ознакомиться. Несмотря на некоторую трудность сопоставления полученных при этом результатов с ранее приведенными, автор полагает, что в основном они совпадают с оценками, данными преподавателями физических дисциплин.

Учитывая указанную уже выше затруднительность оценки некоторых тем или разделов курса алгебры одной общей отметкой и желая получить в дополнение к приведенным выше общим данным компетентное мнение об отдельных частных примерах, которые входят в ту или иную общую тему, автор разослал ряду преподавателей колледжей лист с 56 примерами, прося их дать каждому примеру оценку по той же системе, какая была принята в анкете Национального комитета. Ответы были получены от 17 преподавателей физики (А), 6 преподавателей биологии, ботаники и агрокультуры (В), 6 преподавателей экономики и статистики (С) и 8 преподавателей социологии, психологии и антропологии (D). Заменяя буквенные отметки В, З, Н и М цифрами 3, 2, 1 и 0, автор смог вывести средние отметки из показаний указанных групп преподавателей в отношении каждого примера и получил результаты, приведенные в помещаемой на стр. 36—37 таблице II.

Ответы в виде оценки различных примеров, равно как и полученные автором сопроводительные письма, выявили два существенных обстоятельства. Во-первых, среди опрашиваемых выявилась тенденция давать оценку не отдельным примерам, а группам последних, несмотря на значительное различие в сложности и значении этих примеров. Во-вторых, в ряде случаев способность решить *данный* пример смешивалась с общей подготовленностью к решению задач *подобного типа*. Преподаватели колледжей естественно предпочитают, чтобы их слушатели были способны решать и такие примеры, как значащиеся под номерами 32—34 и 52—56, хотя подобные задачи никогда не встречаются в их курсах; ими руководило при оценке не признание непосредственной полезности этих примеров, а лишь желание иметь учеников определенной степени квалификации. Таким образом, первоначальное намерение автора получить подробную и точную оценку значения каждого отдельного примера осуществилось не вполне. Повидимому, для такой оценки от опрашиваемых потребовалась бы затрата большего количества времени и внимания, чем они фактически смогли уделить.

Несмотря на это, общие результаты оценки, приведенные в таблице II, позволяют сделать совершенно ясные выводы. Полезность алгебраического счисления считается уменьшающейся в соответствии с усложнением его надуманными или редко встречающимися данными, а также длинными перестановками, преобразованиями и т. д. Обратное усложнение, вызываемое данными, действительно встречающимися в научной работе (например, при обращении с десятичными числами или пользовании дробными показателями вместо радикалов), признается полезным. Преподаватели физики в колледжах настаивают на полном овладении алгебраическим счислением. Их оценка опускается ниже признания „некоторого“ значения лишь в отношении таких чудовищных упражнений, как значащиеся под номерами 32, 33, 55 и 56. Преподаватели других

ТАБЛИЦА II

Примеры	A	B	C	D	Среднее из B, C и D
1. $3n = 12$	3,0	1,5	2,5	1,0	1,7
2. $2n = \frac{k}{5}$, когда $k = 30$	3,0	1,8	2,5	0,9	1,7
3. $3n + 2 = 5n + 12$	3,0	1,2	2,5	0,6	1,4
4. $8n + (n + 3) = 2n + 5$	3,0	1,2	2,3	0,6	1,0
5. $\frac{2}{3}n - 10 + 3n = -5 + \frac{7}{8}n$	3,0	1,2	2,2	0,6	1,3
6. $\frac{2}{3}n + 45 = \frac{1}{3}n + 55$	3,0	1,0	2,2	0,6	1,3
7. $5 - 3n = 6 - (n + 15)$	2,9	1,0	2,2	0,6	1,3
8. $\frac{n-1}{n-2} - 2 - \frac{n}{1-n} = 0$	2,9	0,7	1,5	0,6	0,9
9. $3,4n - 0,17(n - 2) = 51 \left(\frac{n}{5} - 3 \right)$	2,9	0,7	1,7	0,5	1,0
10. $\frac{4(n+3)}{9} = \frac{8n+37}{18} - \frac{7n-29}{5n-12}$	2,5	0,7	1,3	0,5	0,8
11. $\frac{1}{3} \left[n - \frac{1}{3}(n+1) \right] + \frac{1}{4}(4n-5) =$ $= \frac{27}{4} - \frac{1}{3}(n+1)$	2,5	0,5	1,0	0,5	0,7
12. $\frac{5n-0,4}{0,3} + \frac{1,5n-0,05}{2} = \frac{4,15-8n}{1,2}$	2,5	0,5	1,0	0,5	0,7
13. $y = mx + b$. Найдите m и b , если $y = 13$, когда $x = 5$, и $y = 27$, когда $x = 12$	2,9	1,5	2,2	0,6	1,4
14. $y = mx + b$. Напишите уравнение, если $y = 10,5$, когда $x = 3,5$, и $y = 20,1$, когда $x = 6,7$	2,5	1,0	2,2	0,6	1,3
15. $y = mx + b$. Напишите уравнение, если $y = 1,6$, когда $x = 0,7$, и $y = 12,0$, когда $x = 8,7$	2,4	0,8	2,2	0,6	1,2
16. $x + y = 8$ $x - y = 2$. Найдите x и y	3,0	1,0	1,8	0,6	1,1
17. $2x + 5y = 15$ $3x - 4y = 11$. Найдите x и y	3,0	1,0	1,8	0,6	1,1
18. $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 0$ $\frac{x-3y}{y-2x} = 2$. Найдите x и y	2,6	0,7	1,5	0,5	0,9
19. $1,6x - 2,05y = 0,39$ $5,2x + 4,1y = 3,42$. Найдите x и y	2,8	0,7	1,3	0,5	0,8
20. $3x + 2y = 12 \frac{1}{4}$ $\frac{5}{x+5} : \frac{4}{3y+\frac{1}{2}} = 3 : \frac{2}{5}$. Найдите x и y	1,9	0,7	0,8	0,4	0,6

П р и м е р ы	A	B	C	D	Среднее из B, C и D
21. $\frac{5}{3x} + \frac{2}{5y} = 7$ $\frac{7}{6x} - \frac{1}{10y} = 3$. Найдите x и y	2,1	0,7	0,8	0,4	0,6
22. $\frac{7x^2}{3} = m$. Найдите x , если $m = 21$. . .	3,0	0,8	2,2	1,0	1,3
23. $\frac{4x^2}{5} = k$. Найдите x , если $k = 17$. . .	2,9	0,8	2,2	0,8	1,3
24. $x^2 + 10x = 24$	2,9	0,7	2,2	0,6	1,2
25. $x^2 + 7x + 11 = 0$	2,9	0,7	2,2	0,6	1,2
26. $8x^2 + 2y + 13 = 0$	2,9	0,7	2,2	0,6	1,2
27. $3x^2 + 2x = 11$	2,9	0,7	1,8	0,6	1,0
28. $5x^2 + 16x - 12k + 2 = 0$. Найдите x , если $k = 3$	2,6	0,5	1,3	0,5	0,8
29. $9x^2 + (1 + k)x + 4 = 0$. При каких зна- чениях k значения x равны между со- бой	2,2	0,5	1,3	0,5	0,8
30. $\frac{2}{3x-3} + 1 + \frac{4}{2x-3} = 0$	2,1	0,7	1,0	0,4	0,7
31. $5x^2 + 1,5x + 0,88 = 0$	2,6	0,7	1,3	0,4	0,8
32. $\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} = 9$	0,9	0,5	0,8	0,1	0,5
33. $\frac{x+1}{2x^2+3x-2} + \frac{2-x}{1-x-2x^2} +$ $+\frac{x-2}{x^2+3x+2} = 0$	0,7	0,5	0,8	0,1	0,5
34. $(x^2 + 1)^2 - 11(x^2 + 1) + 24 = 0$	1,4	0,5	1,2	0,1	0,6
35. $x + y = -4$ $xy = -21$	2,4	0,8	1,2	0,25	0,8
36. $x - y = -25$ $4x - 4y = xy$	2,1	0,8	1,2	0,25	0,8
37. $y + 2x^2 - 3x - 9 = 0$ $y + x - 3 = 0$	1,6	0,7	1,2	0,25	0,7
38. $x - 4y = 4$ $x^2 + y^2 = 16$	1,6	0,7	1,2	0,25	0,7
39. $2x + y - 2 = 0$ $4x^2 + 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$	1,2	0,7	1,2	0,25	0,7
40. $x - y = 1$ $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}$	1,1	0,7	1,2	0,25	0,7
41. $y = x^2 - 4x + 3$ $4x + 4y - 7 = 0$	1,4	0,7	1,2	0,25	0,7
42. Напишите число 86 290 000, пользуясь степенями десяти	2,6	0,8	1,2	0,4	0,8

П р и м е р ы	A	B	C	D	Среднее из B, C и D
43. Напишите число $9,76 \times 10^{-7}$ обычным способом	2,6	0,8	1,2	0,25	0,8
44. $\sqrt{10\,000} = ?$	2,9	1,2	1,7	0,5	0,8
45. $\sqrt{a^2 b^3} = ?$	2,8	1,0	1,5	0,25	0,9
46. $100^{\frac{1}{2}} = ?$	2,9	1,2	2,2	0,25	1,2
47. $125^{\frac{1}{3}} = ?$	3,0	1,2	2,2	0,25	1,2
48. $7^{-2} = ?$	2,8	1,0	1,3	0,1	0,8
49. Что больше: 3^{-2} или 2^{-3} ?	2,5	1,2	1,3	0,1	0,9
50. Напишите без знаков радикала $\sqrt{2^{\frac{3}{4}} : 8 \sqrt{4^{-2} \times 3^3}}$	1,6	1,2	0,9	0,1	0,7
51. Напишите число $0,00034792 \times 10^4$ обычным способом	2,5	1,2	0,9	0,1	0,7
52. Найдите величину произведения $8^{-\frac{2}{3}} \times 16^{\frac{3}{4}} \times 2^0$	1,6	0,8	0,9	0,0	0,6
53. $\frac{1}{a^{-1} - b^{-1}} + \frac{\sqrt{a^5 b^{-1}} \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right)^3}{a - b} = ?$	1,3	0,8	0,6	0,0	0,5
54. Найдите величину дроби $\frac{1}{2^{-1} + 3^{-1}}$	1,8	0,8	0,6	0,0	0,5
55. Разделите $2a - a^{\frac{1}{2}} b - \frac{1}{2} - 3b^{-1}$ на $2a^{\frac{1}{2}} - 3b^{-\frac{1}{2}}$	0,6	0,8	0,6	0,0	0,5
56. Упростите выражение $\left[\sqrt[5]{\frac{a^{\frac{1}{2}} x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} a^{-2}}} : \sqrt{\frac{x^{-1} \sqrt{a}}{a \sqrt{x}}} \right]^{-4}$	0,6	0,8	0,6	0,0	0,5

предметов (кроме экономики и статистики) в течение первого года занятий в колледжах мало пользуются даже простейшими алгебраическими выражениями. Их оценка превышает признание „некоторого“ значения лишь в отношении следующих примеров: $3n=12$; $2n = \frac{k}{5}$, когда $k=30$; определить постоянные величины, входящие в уравнение $y = mx + b$, если даны координаты двух точек.

Две темы, которые были включены в опросный лист, но которые не входят пока в обычные курсы алгебры, заслуживают особого внимания: это — определение постоянных величин, входящих в систему уравнений, и применение показателей для изображения чисел и действий над ними.

Высокая оценка, данная этим двум темам, заставляет думать, что их следовало бы немедленно ввести в курс алгебры. Благоприятные отметки, полученные примерами, в которые входят показатели степени $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$,

дают основание считать, что эту тему следовало бы изучать при прохождении курса алгебры ранее, чем это принято сейчас.

Желая получить оценку не только примеров, но и алгебраических задач, автор разослал нескольким преподавателям колледжей на отзыв текст с девятнадцатью задачами, наиболее типичные из которых приводятся ниже.

Сколько воды надо прибавить к 10 л 20-процентного раствора, чтобы получить 8-процентный раствор? *Оценка: 2,6 — 0,8.*

Брусек длиной 60 см надо распилить на две части так, чтобы длина одной из них равнялась $\frac{2}{5}$ длины другой. Найти длину каждой части. *Оценка: 2,8 — 0,2.*

Шкив, имеющий 96 см в диаметре, делает 180 оборотов в минуту. На сколько надо уменьшить его диаметр, чтобы скорость приводимого им в движение ремня осталась неизменной и при 216 оборотах шкива в минуту?

Оценка: 2,0 — 0,6.

Картонная коробка, у которой высота равна 8 см, длина вдвое больше ширины, а вместимость равна 4096 см³, изготавливается из прямоугольного листа картона путем вырезывания четырех квадратов по углам листа, отгибания боковых стенок и скрепления последних попарно по боковым ребрам. Какие размеры должен иметь соответствующий лист картона? *Оценка: 2,0 — 0,0.*

Если продавец получит 5% скидки при покупке товара, то он сможет перепродать его с прибылью в 8%. Сколько он получит прибыли, продавая товар по той же цене, если скидка при покупке товара ему не будет сделана?

Оценка: 1,0 — 0,4.

Даны три сплава следующего состава по весу:

1) золота 5 частей, серебра 2 части, свинца 1 часть;

2) золота 2 части, серебра 5 частей, свинца 1 часть;

3) золота 3 части, серебра 1 часть, свинца 4 части.

Сколько каждого из трех сплавов надо взять, чтобы получить после переплавки их 9 г сплава, содержащего золото, серебро и свинец в равных количествах?

Оценка: 2,2 — 0,0.

Ответы были получены от трех преподавателей физики, двух преподавателей химии, двух преподавателей экономики, двух преподавателей психологии и одного преподавателя социологии. Оценка задач производится теми же способами, как и ранее. Полученные результаты в общем совпадают с изложенными выше в отношении алгебраических примеров. Преподаватели физики и химии признали все задачи полезными для занятий соответствующими предметами, давая в некоторых случаях наивысшую оценку задачам с маловероятными данными, но требующим для решения известной сметливости, и наинизшую отметку — задачам, содержащим данные экономического порядка. Общее мнение преподавателей социально-экономических дисциплин сводится к тому, что задачи эти не имеют сколько-нибудь существенного значения для преподаваемых ими предметов. При этом трое из них оценили отметкой „нуль“ все девятнадцать задач, один из них признал некоторое значение лишь за пятью наиболее простыми и естественными задачами и лишь один из преподавателей экономики дал этим задачам более высокую оценку.

**Применения
алгебры в учеб-
никах, пред-
назначенных
для школ по-
вышенного ти-
па.**

Чтобы получить хотя бы приблизительное, но беспристрастное суждение о том, какие именно алгебраические навыки и в каком объеме нужны для изучения различных предметов, преподаваемых в школах повышенного типа, автор изучил свыше 40 общепринятых в САСШ руководств, от 2 до 4 по каждому предмету. Всего им было изучено свыше 17,5 тыс. страниц печатного текста, из которых на долю алгебраических выражений всякого рода приходится всего около 420 страниц, или около $2,4\%$ текста, если не считать химических формул, занимающих еще около 360 страниц, или около $2,1\%$ текста. Алгебраические выражения встретились при этом автору приблизительно в 8000 случаях, химические формулы — в 1800 случаях, т. е. первые в среднем 7,2 раза в каждом печатном листе и вторые — 1,6 раза. Чаше всего алгебраические выражения (включая графические изображения) встречаются в черчении, физике и химии; в остальных предметах они встречаются весьма редко — от 0 до 0,2 раза в каждом печатном листе учебников по таким предметам, как обработка дерева, ботаника, зоология, психология, поднимаясь до 0,6—0,7 раза на один печатный лист в учебниках по экономике, биологии, истории Америки.

Далее автор попытался выяснить степень использования при преподавании различных предметов в школе повышенного типа следующих пяти основных разделов алгебры:

- 1) действия над многочленами;
- 2) составление и решение тождеств и уравнений;
- 3) составление и применение формул;
- 4) развитие и применение понятий о функциях;
- 5) построение и применение графических изображений:
 - a) статистических данных,
 - b) функций.

Оставляя в стороне изложение результатов, полученных автором в отношении каждого отдельного предмета, приведем общие выводы.

1. Если не касаться курсов математики, то ни один из предметов, преподаваемых в школах повышенного типа, не требует сложных манипуляций над многочленами.

2. Современные учебники совершенно не используют общего математического понятия функции.

3. За исключением химии, физики и отчасти агрикультуры, предметы, преподаваемые в школе повышенного типа, вовсе не используют теории уравнений.

4. От обучающегося в школе повышенного типа практически не требуется умения составлять формулы.

5. Понимание формул и умение их применять требуются только в курсах физики и химии и разделах других курсов, базирующихся на тех же дисциплинах.

6. Графическое изображение математических выражений, за исключением графического пояснения некоторых формул и основных понятий о функциях, практически не применяется при занятиях в школах повышенного типа; даже в курсах физики оно находит применение лишь при изучении сложения и разложения сил.

7. Графическое изображение статистических данных применяется в большей или меньшей степени в подавляющем большинстве предметов, преподаваемых в школах повышенного типа, причем ему отводится по числу строк и страниц текста вдвое больше места, чем всем другим видам алгебраических выражений, вместе взятых.

Изложенные выводы нуждаются в некоторых пояснениях, которые охарактеризовали бы действительный объем алгебраических познаний, требуемых различными курсами.

Что касается графических изображений, то читать их могут учащиеся школ повышенного типа и не занимающиеся алгеброй. Диаграммы и картограммы стали нераздельной частью текста даже газетных и журнальных статей. Однако построение их представляет столь значительные трудности, что справиться с ними без специальной подготовки могут лишь исключительно одаренные дети. Еще менее можем мы рассчитывать на способность детей критически относиться к графическим изображениям и находить в них ошибки и дефекты, если мы не сделаем с ними соответствующих упражнений.

Далее, формулы, применяемые в химии, отнюдь не равнозначущи алгебраическим формулам. Это вытекает из самой сущности понятий о молекулах и атомах и условного обозначения их, принятого в химии. К тому же в современных курсах химии для обозначения течения реакций весьма часто применяются стрелки вместо знака равенства, который был принят ранее. Так, если ранее писали: $\text{NaCl} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{NaHSO}_4 + \text{HCl}$, то теперь пишут: $\text{NaCl} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{NaHSO}_4 + \text{HCl}$, причем учащиеся предлагают читать эту формулу следующим образом: „ NaCl и H_2SO_4 дают NaHSO_4 и HCl “. Если реакция может протекать в обоих направлениях, то ее обозначают так: $2\text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{N}_2 + 3\text{H}_2$. Отсюда видно, что химические формулы значительно отличаются от математических уравнений. Первые являются лишь кратким выражением экспериментальных данных и не могут быть составлены и написаны до тех пор, пока не будет установлено, что данная реакция протекает так-то. Поэтому учащийся, привыкший при изучении алгебры смотреть на уравнения как на выражение идентичности, должен, приступая к изучению химии, усвоить новую точку зрения на них как на выражение известных условий.

Единственный круг вопросов, в которых знание элементарной алгебры помогает изучению химии, — это решение химических задач. Последние сводятся в преобладающем большинстве случаев к составлению пропорций, три члена которых выражены известными числами. Правда, составление таких пропорций доступно и тем из учеников, которые не проходили алгебры, но хорошо усвоили пропорции при изучении арифметики. Однако несомненно, что знание алгебраических уравнений позволяет учащимся решать соответствующие задачи гораздо быстрее, проще и с меньшим количеством ошибок.

Примерно то же можно сказать и в отношении задач, которые встречаются в курсах по агрикультуре; последние аналогичны алгебраическим задачам на смеси и сплавы, и для решения их достаточно знания пропорций.

Основное требование, которое предъявляется к алгебраическим познаниям учащихся в школах повышенного типа со стороны курса физики,

заключается в умении понимать формулы и пользоваться ими. Типичными формулами являются:

$$P_1:P_2=D_1:D_2; \quad S=\frac{1}{2}gt^2; \quad J=E:\left(Re+\frac{Ri}{n}\right); \quad V=\sqrt{2aS};$$

$$E=\frac{R}{n}; \quad (P_1V_1):(P_2V_2)=T_1:T_2.$$

Для понимания подобных формул от учащегося требуется только знание общего метода изображения количеств буквами, наряду с цифрами, алгебраического способа обозначения умножения, применения скобок, показателей и знака радикала, а также знаков $+$, $-$, $=$ и дробной черты, как горизонтальной, так и наклонной.

Учащийся, получивший хорошую подготовку по арифметике, обладает уже почти всеми теми знаниями, которые необходимы для понимания этих формул, хотя бы он и не приступал еще к изучению алгебры; новым для него будет, пожалуй, только широкое применение буквенных обозначений и алгебраический способ обозначения умножения. Но, конечно, от него нельзя требовать той ясности и живости представления содержания формул как от учащегося, уже знакомого с алгеброй.

Что касается пользования теми же формулами, то с точки зрения алгебраических действий оно сводится, вообще говоря, к замене некоторых буквенных выражений числовыми величинами и выполнению заданных операций. Отыскание ответа производится обычно путем комбинирования лишь простейших алгебраических действий — сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в квадрат и извлечения квадратного корня. Выполнение этих действий не требует большого мастерства в алгебраическом счислении; однако несомненно, что знание алгебры позволит учащемуся избежать целого ряда грубых ошибок и работать с надлежащей быстротой. Так, учащийся, незнакомый с алгеброй, легко может при пользовании формулой $S=\frac{1}{2}gt^2$ перемножить g и t , поделить произведение на 2, а затем возвести полученный результат в квадрат. Но нужно сказать, что от таких ошибок его может предохранить весьма небольшое количество алгебраических занятий, если представить последние надлежащим образом.

Большее значение имеет знание алгебры для вывода из данных формул новых. Так, преобразование формулы $S=\frac{1}{2}gt^2$ в $g=\frac{2S}{t^2}$ или

$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$ не представляет никакого труда для ученика, знакомого с алгеброй, но оно абсолютно непосильно и непонятно для учащегося, не обладающего алгебраическими познаниями. Далее должно быть отмечено, что для занятий физикой полезно, чтобы учащиеся имели понятие о положительных и отрицательных показателях применительно к изображению чисел десятичной системы и о дробных показателях $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

и $\frac{1}{4}$ как заменяющих знак радикала.

В курсах физики и химии, преподаваемых в школах повышенного типа, встречается также большое число задач, решаемых почти исключительно при помощи формул, помещенных в тексте. Задача ученика сводится к выбору подходящей формулы, использованию некоторых данных и решению соответствующего уравнения. При этом обычно не приходится прибегать к более сложным действиям, чем освобождение пропорций от дробей, перенос членов из одной части в другую, приведение их и извлечение квадратного корня из числовых величин.

С точки зрения алгебраического счисления наибольшую трудность представляет пользование следующими формулами:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \text{ при определении } f \text{ по данным числовым величинам } p \text{ и } q;$$

$$K = \frac{l_2 - l_1}{l_1} (t_2 - t_1) \text{ при определении } t_2 \text{ по данным } K, l_1, l_2 \text{ и } t_1;$$

$$I = \frac{E}{r + r'} \text{ при определении } r' \text{ по данным } I, E \text{ и } r;$$

$$I = \frac{nE}{r + nr'} \text{ при определении } n \text{ по данным } I, E, r \text{ и } r';$$

$$f = \frac{mv^2}{r} \text{ при определении } v \text{ по данным } f, m \text{ и } r$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ при определении } g \text{ по данным } t \text{ и } l.$$

Как видим, алгебраические познания, требуемые в данном случае, значительно ниже тех, которые учащиеся приобретают в течение первого же года обучения алгебре.

Учитывая приведенные выше положения, можно установить следующие окончательные выводы:

I. Если оставить в стороне курс математики и судить о характере алгебраических познаний как подготовительных для усвоения различных предметов, по соответствующим руководствам, принятым в школах повышенного типа, то окажется, что алгебра нужна более всего для понимания графических изображений статистических данных и в значительно меньшей степени для составления этих изображений.

II. Для успешного усвоения курса физики требуется главным образом умение обращаться с формулами и выполнять преобразование их, принимая за неизвестную то ту, то другую из входящих в формулы величин. Эта последняя работа совершенно непосильна для учащихся, незнакомого с алгеброй.

III. Решение физических задач требует умения выбрать надлежащую формулу, произвести подстановку данных величин и решить соответствующее уравнение. В последнем случае необходим навык в освобождении равенств от дробей, переносе членов из одной части уравнения в другую, приведении их и извлечении квадратного корня из числовых величин.

IV. При решении химических задач весьма большую ценность имеет навык в правильном и быстром составлении пропорций. Поэтому из числа алгебраических упражнений наибольшее значение имеют в данном случае пропорции и задачи над сплавами и смесями.

Теперь невольно возникает вопрос: нельзя ли использовать алгебраические познания при преподавании различных предметов в школе повышенного типа в большей степени, чем это имеет место сейчас, и притом к выгоде как этих предметов, так и самой алгебры? — Рассмотрим этот вопрос в отношении каждого из пяти указанных выше разделов алгебры (многочлены, уравнения, формулы, функции, графические изображения).

Что касается многочленов, то сложение, вычитание, умножение и возведение в степень многочленов, содержащих большое число членов, извлечение из них квадратного и кубического корня с получением в ответе более двух членов, действия над многочленами, содержащими дробные показатели или радикалы и т. д., не находят сейчас применения в курсах, преподаваемых в школах повышенного типа (за исключением курсов математики), и едва ли могут найти применение в дальнейшем.

Более широкое применение составления и решения уравнений было бы весьма желательным в ряде курсов. При этом очень хороший навык в обращении с простыми уравнениями был бы значительно полезнее, чем некоторое умение составить и решить сложное уравнение. В особенности это относится к пропорциям; ряд физических и химических законов, составление планов, нахождение размеров в техническом черчении, изготовление моделей из дерева, работы по металлу, составление и изменение рецептов для приготовления различных блюд — все это требует применения пропорций.

Выше мы уже отмечали различие между уравнениями и формулами, встречаемыми в химии. Использование опытных данных для составления не только словесных правил, но и соответствующих формул, содержащих алгебраические символы и дающих весьма наглядное и легко запоминаемое выражение ряду фактов, было бы чрезвычайно желательным в целом ряде курсов. Так, при преподавании физической географии весьма интересно и полезно применить такую, например, приближенную формулу: $d = 113 \sqrt{h}$, где h обозначает высоту наблюдателя над уровнем моря в километрах и d — наибольшее расстояние предмета на море, который он может еще видеть, также в километрах. При преподавании прикладных предметов можно было бы составлять формулы, основываясь на таких, например, правилах, как „чтобы прожарить кусок мяса, надо держать его на огне по полчаса на каждый килограмм и сверх того 20 минут“ и т. д.

Что касается статистических диаграмм и картограмм, то они заволашевали себе прочное положение почти во всех курсах школ повышенного типа. Здесь необходимо только развить в учащихся умение критически подходить к пользованию графическими изображениями. В особенности это справедливо в отношении пространственных изображений. Переход от единиц объема или площади к линейным единицам не очень прост, и учащихся надо предостеречь от возможных ошибок и ложных выводов. Поэтому следует уделить внимание не только определению длины отрезков, пропорциональных данным величинам, но и соответствующим формулам, касающимся площадей, объемов и перспектив.

Преподаватели многих предметов согласятся, вероятно, с тем, что применение математических графических изображений различных законов и функций было бы для них весьма полезным. Наука стремится

формулировать свои выводы не в виде статистических данных, а в форме математических положений. К сожалению, в настоящее время подобного рода законы редко излагаются учащимся в математической форме. Вызывается ли это недостаточной подготовленностью учащихся или неспособностью авторов руководств придать изложению соответствующую форму — для нас безразлично. Факт тот, что ряд зависимостей в области экономики, соотношение между урожайностью и свойствами почвы в области сельского хозяйства, закон роста растений в ботанике, взаимная зависимость между животной и растительной жизнью в биологии, соотношение между временем, процентной ставкой и процентами на капитал, а также связь между ценообразующими факторами в практической жизни — все это могло бы быть изложено учащимся гораздо яснее, если бы были применены правильные и продуманные математические графические изображения.

Возможность использования указанных графических изображений для получения дополнительных данных путем экстраполяции и интерполяции едва ли надо особенно подчеркивать учащимся; скорее их надо предостеречь от необдуманных заключений, которые могут быть сделаны при пользовании соответствующим графическим материалом; возможные ошибки в выборе координат, возможность оптического обмана, неправильная оценка положения исходных точек — все это должно им быть объяснено.

Указанными графическими изображениями не следует все же чрезмерно увлекаться: здесь можно легко перешагнуть через разумный предел, обусловливаемый тем, что учащиеся школ повышенного типа еще слишком слабо вооружены для подлинных научных обобщений; однако некоторый объем подобного рода работы может явиться источником значительного прогресса.

Для преобладающего большинства учащихся в школах повышенного типа применение понятия функции в большем объеме, чем это требуется при пользовании математическими графическими изображениями, представляется сомнительным. Хотя это понятие и является одним из самых значительных и плодотворных приобретений человеческой мысли, все же для учащихся в школах повышенного типа оно является скорее шатким и неустойчивым, чем ясным и определенным.

Изложенные соображения приводят нас к следующим выводам в отношении расширения применения указанных выше пяти разделов алгебры.

I. Сложные упражнения над многочленами являются для учащихся школ повышенного типа ничем не оправдываемой потерей времени.

II. В интересах более широкого применения уравнений в различных курсах, преподаваемых в тех же школах, особенно в форме пропорций, необходимо, чтобы учащиеся приобрели основательный навык в обращении с пропорциями и простыми уравнениями.

III. Было бы желательно расширить области применения как составления формул, так и пользования ими.

IV. Необходимо развить в учащихся способность критически относиться к графическим изображениям.

V. Следует поощрять изображение различных законов при помощи математических графиков.

VI. Понятие функции следует применять в тех случаях, где это может быть полезно, однако с достаточной осмотрительностью.

**Алгебра как
подготовитель-
ная дисципли-
на для чте-
ния различных
сочинений.**

Чтобы составить себе некоторое представление о том, насколько глубоко алгебра и отчасти геометрия проникают в интеллектуальную и практическую жизнь лиц, обладающих той же степенью развития и количеством познаний, как и окончившие школы повышенного типа, автор произвел соответствующее исследование текста „Британской энциклопедии“ (Encyclopedia Britannica). Это последнее издание, рассчитанное как раз на указанный круг читателей, пользуется на Западе чрезвычайным распространением и действительно обладает рядом достоинств; отдельные статьи этой энциклопедии написаны видными учеными, стоят на уровне современных научных знаний и излагают вопросы с той степенью популярности, которая вообще возможна для данной темы. Поэтому выводы, полученные при изучении этих статей, могут быть распространены с достаточной степенью приближения и на соответствующую научно-популярную литературу западных стран вообще. Автор просмотрел по двести первых страниц каждого из 28 томов энциклопедии и нашел, что всякого рода математические выражения, формулы и т. д. встречаются в общей сложности в 269 статьях из общего числа просмотренных статей — 7551. Некоторые статьи (всего 19), как краткие (например посвященные математическим определениям), так и обстоятельные (например „бактериология“, „стекло“, „менделизм“ и др.) требуют для понимания не столько математических познаний, сколько общего понимания таких терминов и определений, как абсцисса, аксиома, цилиндрический, эллипсоид и пр. В них встречается также лишь небольшое число формул, могущих затруднить неподготовленного читателя. Ряд статей на разнообразные темы (всего 167) требует от читателя некоторого знания геометрии, однако весьма неглубокого. Статьи, излагающие биографии математиков (числом 32), сами по себе не требуют знания математики, но содержат ссылки на труды и достижения этих лиц, которые мало понятны для тех, кто не занимается математикой. Семь статей (в том числе „применения электричества“, „солнечный свет“ и др.) требуют знания только алгебры; без понимания формул и графических изображений чтение их затруднительно. Наконец, 44 статьи, посвященные отдельным вопросам техники и физики, астрономии, механики, требуют для своего понимания знания не только элементарной математики, но и анализа, аналитической геометрии, проективной геометрии, дифференциальных уравнений и т. д.

Интересно отметить тот факт, что хотя общее число статей, в которых математика находит себе применение, составляет всего $3,57\%$ общего числа статей, объем их составляет $18,55\%$ общего количества просмотренного текста; подобным же образом число статей, требующих для чтения больших знаний математики, чем даваемые элементарным курсом, составляет всего $0,58\%$ общего числа статей, объем же их равен $6,64\%$ всего просмотренного текста.

Эти данные позволяют сделать следующие выводы:

1. Разделами элементарной алгебры, завоевавшими себе прочное положение в сочинениях, рассчитанных на удовлетворение широкого круга интересов подготовленных читателей, являются графические изображения формул и особенно статистических величин.

2. Знаний элементарной алгебры недостаточно для усвоения статей, подобных помещенным в энциклопедии и посвященных прикладным

темам из области математики, физики, астрономии, химии, инженерного дела и других технических дисциплин; для этого нужно, вообще говоря, знание математики в объеме, преподаваемом еще в течение 3—5 лет, следующих за первым годом обучения элементарной алгебре.

3. Значение математики для понимания статей, имеющих общий интерес, значительно больше, чем это следует из частоты применений алгебры, поскольку между процентом числа статей и процентом занимаемого ими объема существует соотношение 1:11.

Общие выводы.

Приведенные выше соображения имеют прямое отношение к программе курса алгебры для первого года обучения.

1. Чтобы результаты обучения алгебре в течение первого же года могли найти широкое применение, следует обратить особое внимание на формулы и графическое изображение статистических величин.

2. Учащийся, который по своим способностям и склонностям, вероятно, посвятит себя в дальнейшем углубленным занятиям такими предметами, как физика, инженерное искусство, электротехника, авиация, химия, психология, социально-экономические науки и т. д., должен предварительно изучать не столько алгебру, сколько другие математические дисциплины, для которых алгебра как таковая является лишь необходимым преддверием и орудием.

Может показаться, что приведенные выше данные, сильно расходящиеся с общераспространенным утверждением, будто все, преподаваемое в обычном курсе элементарной алгебры, находит широкое применение в науке, свидетельствует о малой ее полезности. В действительности это не так. Если бы мы попробовали установить путем изучения руководств и энциклопедии, каково же применение знания прочих дисциплин, то убедились бы, что алгебра стоит в этом отношении едва ли не на первом месте. К тому же, поскольку количественные соотношения становятся все более и более важным элементом различных научных исследований, возрастает и значение умения оперировать с формулами и графическими изображениями. Достаточно вспомнить, например, какое видное место заняли в биологии, психологии, социологии и педагогике кривые повторяемости и корреляция, бывшие лет тридцать назад совершенно неизвестными.

Алгебра в целом является весьма полезным предметом, но полезность отдельных ее разделов колеблется в чрезвычайно широких пределах. В рассмотренных автором руководствах и на 5000 страниц энциклопедии мы встретимся с выражениями $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$ и даже $a^2 - b^2$ только в ничтожном числе случаев, если вообще мы с ними встретимся. Алгебраические навыки располагаются в ряд по убывающей полезности, причем наиболее высокое положение занимает умение оперировать с формулами и графическим изображением зависимости одной переменной величины от другой и наиболее низкое — знание сокращенных способов деления, основанных на применении особых равенств.

Простое знание алгебраических выражений имеет гораздо большее значение, чем думали педагоги, тогда как навык в алгебраическом счислении имеет значительно меньшее. Педагоги считали безрассудным обучать алгебраическим символам вне алгебраического счисления, забывая о том, что нам, вероятно, вдвое чаще приходится читать эти сим-

волы, чем оперировать над ними. Умение решать квадратные уравнения, задачи на прогрессии или бином Ньютона, которое так ценится при школьных испытаниях, имеет весьма незначительную практическую полезность.

Вообще говоря, ряд алгебраических навыков может быть разбит по степени их полезности на следующие пять групп или серий:

Группа 1.

Понятие об алгебраических символах, навык в обращении с выражением „пусть..... = числу.....“

Навык в обращении с простейшими формулами, включая знание положительных целых показателей и таких выражений, как $\sqrt{a}$ или $a^{1/2}$, $\sqrt[3]{a}$ или $a^{1/3}$, навык в обращении со скобками, умение обходиться без знака $\times$ и 1 как коэффициента.

Умение пользоваться формулами, в которых неизвестная величина является одним из членов уравнения, включая и такие задачи, в которых ответ является отрицательной величиной.

Умение обращаться с графическими изображениями зависимости одной переменной величины от другой, строимыми в различных четвертях круга (квантах); при этом предполагается, что самый характер переменных величин учащимся понятен.

Группа 2.

Умение обращаться с формулами, содержащими скобки в скобках и сложные дробные выражения. Это требует изучения алгебраического сложения и вычитания, а также умножения и деления на многочлен и знания некоторых элементарных свойств корней и иррациональных величин.

Умение преобразовывать формулы в тех случаях, когда искомое число имеет коэффициент или содержится в знаменателе, или встречается дважды, или же является одним из сомножителей в одном из членов уравнения, таким образом, чтобы эта неизвестная величина содержалась в формуле только один раз и притом с коэффициентом, равным единице. Умение производить это преобразование формул таким образом, чтобы по возможности было избегнуто деление многочлена на многочлен.

Группа 3.

Элементарное алгебраическое выражение зависимости одной переменной величины от другой, включая графические изображения.

Решение при помощи уравнений первой и второй степени жизненных задач, для которых желателен именно этот способ решения.

Системы уравнений первой степени.

Элементарные сведения, касающиеся повторяемости, средних величин и отклонений от последних.

Применение таблиц логарифмов, степеней, корней и обратных им величин, счетной линейки и других способов облегчения вычислений.

Приближенные и точные значения.

Группа 4.

Отрицательные и дробные показатели.

Общее учение о радикалах (возможно без мнимых величин).

Системы уравнений совместно первой и второй степени.

Элементы теории вероятностей.

Логарифмические кривые и теория логарифмов.

Корреляция.

Изучение обобщающих формул, в особенности бинома Ньютона и прогрессий.

Редко применяемые виды счисления, как умножение и деление многочленов и возведение их в степень.

Системы квадратных уравнений.

Буквенные уравнения, отличные от обычно применяемых формул.

Мнимые величины.

Уравнения более высоких степеней, чем квадратные.

Кривые наблюдений.

Само собою разумеется, что провести точную границу между указанными выше группами затруднительно и что одни из перечисленных в списке навыков могут оказаться более, а другие менее полезными, чем это вытекает из места каждого из них в ряду.

Навыки, которые входят в первую группу, нужны решительно всем учащимся, могут быть приобретены всего в течение 10—12 учебных дней (если только они не были уже приобретены при прохождении курса арифметики) и, вероятно, полезнее для учеников, чем навыки, входящие в четвертую группу, на приобретение которых часто затрачивается три месяца и более. Если бы мы умели точно измерять полезность того или другого навыка по числу часов, затрачиваемых на его приобретение, то, вероятно, нашли бы, что эта полезность убывает от первой группы к пятой пропорционально таким числам, как 32, 16, 8, 4 и 2. В этом нет ничего удивительного: немногие основные данные, на которых покоится механика, гидростатика или электротехника и которые усваиваются в течение какого-нибудь месяца, полезнее для учащихся в современных школах повышенного типа, чем сведения, приобретаемые ими в течение последующих двух или пяти месяцев или даже целого второго года обучения. Сказанное относится, конечно, только к рядовым ученикам; для высокоодаренных натур, которые, может быть, сделаются впоследствии всемирно известными учеными-математиками, последняя тысяча часов занятий этой наукой может оказаться наиболее продуктивной.

Разрабатывая наиболее желательную программу преподавания алгебры в школе повышенного типа, не следует игнорировать еще двух обстоятельств: первое, что алгебра не завоевала еще себе того положения в жизни, которое должно ей по праву принадлежать, и второе, — что расположение отдельных навыков по степени их непосредственной полезности не вполне совпадает с их значением для общего развития учащихся.

Заканчивая главу о применениях алгебры, мы считаем уместным коснуться еще одного вопроса. Известно, что очень многие знания, приобретаемые при школьных занятиях, весьма быстро утрачиваются, если не находят применения в последующем. Спрашивается, в какой мере это относится к знанию хотя бы простейших алгебраических фактов. В этом отношении можно привести некоторые данные, не претендующие на полноту, но могущие служить хорошей иллюстрацией. Студентам первого курса высшей юридической школы, окончившим соответствующий колледж, было предложено решить в течение 10 минут по пяти задач такого типа:

1. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$. Чему равно $a^2b^2c^2 - abc$?

2. $ax = bx + 1$. Чему равен x ?

3. $a = -4, b = 3, c = -2, d = 1$. Чему равно $b^2 - (2c)^2$?

4. $\frac{b}{x-1}=1$. Чему равен x ?

5. Если $5t=7$ и $3b=4\frac{1}{2}$, то чему равно $2bt-\frac{b}{2}$?

Число подвергшихся этому испытанию было равно 189. Точных данных о том, за сколько лет до этого момента испытуемые закончили занятия алгеброй, собрано не было. Однако для огромного большинства их этот срок был равен 4—5 годам. Результаты этих испытаний помещены в графе 1 приводимой ниже таблички, дающей процент испытуемых, правильно решивших от 0 до 5 задач. Для сравнения приводятся результаты разновременных испытаний, произведенных иными способами, но допускающих сопоставление с первыми (графы II и III); при этом данные графы II относятся к лицам, вступающим в колледж, а графы III — к учащимся, заканчивающим изучение алгебры. Как и следовало ожидать, наилучшие успехи обнаружила последняя группа испытуемых; сличение же результатов испытания первой и второй групп приводит к следующему выводу: после перерыва в занятиях алгеброй продолжительностью в 4—5 лет способность решать задачи понижается, грубо говоря, с 1—2 задач до 0, с 3 задач до 1, с 4 до 2 и с 5 задач до 3—4.

	I	II	III
0	8,5	1,5	—
1	14,8	2,5	—
2	19,0	6,0	—
3	21,7	16,5	5
4	22,8	22,0	36
5	12,2	51,5	59

Приведенные результаты показывают, что алгебраические познания утрачиваются не столь быстро, как это можно было бы думать. Интересно было бы также знать, сколько времени требуется для полного восстановления ранее имевшихся алгебраических познаний. К сожалению, по этому вопросу мы никакими материалами не располагаем.

ГЛАВА III.

СУЩНОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НАВЫКОВ.

Современное представление об алгебре как школьной дисциплине.

Не так давно при преподавании алгебры стремились научить учеников главным образом читать, писать, складывать, вычитать, умножать и делить отрицательные числа и буквенные выражения, обращаться с отношениями, пропорциями, степенями и корнями, „решать“ уравнения и системы уравнений первой и второй степени и применять приобретенные технические навыки к отысканию ответов в задачах. При этом некоторые из указанных навыков развивались чрезмерно, другие же совершенно недостаточно. Так, наряду с чрезвычайно большим количеством примеров на алгебраическое сложение длиннейших многочленов, мы лишь изредка встречали задачи над десятичными числами и почти никогда не встречали упражнений в сложении углов, хотя соответствующий навык чрезвычайно полезен при последующих занятиях геометрией.

Преподавание алгебры во многих отношениях уподоблялось преподаванию арифметики. Как там, так и здесь старались научить ученика решать любую головоломную задачу, которую только мог изобрести учитель, и привить ему мастерство в обращении с величинами безотносительно к их значению и действительной полезности при решении количественных задач из области физических дисциплин; графические способы изображения величин и их соотношений были одинаково в заgone как там, так и здесь. Основной целью обучения алгебре считалось умение найти некоторую величину, которая являлась бы „ответом“ к задаче, содержащей известное количество данных величин и связывающих их условий. То обстоятельство, что общее соотношение, связывающее некоторые величины, является гораздо более важным как ответ, чем то или иное конкретное число километров, пройденных паромом, или число рублей, которым может располагать фигурирующее в задаче лицо, и что это соотношение является наиболее подходящим мерилем действительных достижений в алгебре, — ранее редко привлекало к себе внимание педагогов.

В настоящее время положение, однако, изменилось. Программа преподавания алгебры основательно переработана, и хотя по отдельным вопросам полного единодушия среди современных педагогов еще не достигнуто, все же в основном считается необходимым закрепить в новой программе алгебры следующие основные отличия ее от прежней. Вычисления, которые встречаются вне курса алгебры весьма редко или не встречаются вовсе, исключаются сполна. Сложение, вычитание, умножение и деление сложных многочленов, изучение специальных случаев умножения, за исключением таких, как $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(ax+b)(cx+d)$, действия над дробями со знаменателем более сложным, чем $a(b+c)$, упрощение выражений, содержащих целую систему скобок, сложные и запутанные дробные выражения, преобразование выражений более сложных, чем содержащие $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a-b}$, отыскивание общего наибольшего делителя и общего наименьшего кратного за исключением тех случаев, когда последние находятся весьма просто путем непосредственного восприятия подходящих данных, — все это исключается из современных курсов алгебры, если только некоторые виды соответствующих навыков не требуются для изучения других наук или самой математики. Изучение отношений и пропорций приобретает совершенно иное основание. Надуманные и фантастические задачи заменяются реальными и встречающимися в действительной жизни, поскольку эти последние могут достаточно иллюстрировать применение основных алгебраических принципов. На действительное применение тех или иных алгебраических навыков в математике, физике, прочих научных дисциплинах и деловой жизни обращается самое серьезное внимание, и предпочтение отдается тем из них, кои наиболее полезны в этом отношении. Тот факт, что умножение $(2a^4 + 3a^3b^2c - 7bc^2d - 8d^4)(a - 3b^2)$ вообще может быть выполнено, еще не является доказательством того, что ученик обязательно должен выполнять его. Равным образом тот факт, что на основании некоторых данных можно составить задачу, еще не говорит за то, что учащийся вынесет пользу из решения последней.

Следуя этому пути, можно сберечь от четверти до половины времени, затрачивавшегося ранее на изучение алгебры по старым программам.

Это время расходуется в настоящее время для установления и развития следующих навыков: понимания формул, умения определить результат при замене некоторых из символических обозначений, входящих в формулы, определенными числами и количествами, умения преобразовывать формулу так, чтобы она иначе выражала зависимость между данными величинами, навыка в счислении с геометрическими величинами (отрезками, углами и т. д.), некоторыми отношениями и десятичными числами, понимания простейших графических изображений и умения построить последние по известным соотношениям или табличным данным, а также понимания системы координат и умения применять ее для графического изображения простейших случаев зависимости x от y .

Этим выдвигается на первый план значение алгебраического анализа, обобщения и символизма. Казалось бы, что программа преподавания алгебры, построенная на этих новых началах, совершенно ясна и точна. Если бы, однако, мы заставили следовать ей 100 педагогов, 100 психологов и 100 математиков, то мы, вероятно, получили бы 300 разных систем, среди которых не было бы и двух одинаковых. Это заставляет нас подробнее остановиться на анализе сущности алгебраических навыков и применения алгебры в математике, физических науках и практической жизни. В частности, нам надо исследовать, какое содержание вкладывается в выражения „способность понимать формулы“, „навык в обращении с уравнениями“, „навык в составлении и решении задач“, „умение понимать, составлять и применять графические изображения“; не меньшая ясность требуется также и в отношении понятий „анализа“, „обобщения“, „символизма“, „представления соотношений“ и „приведения в систему данных фактов и соотношений“, которыми характеризуется современная программа алгебры.

**Способность
понимать и
составлять
формулы.**

Способность понимать формулы может подразумевать простое знание того, что обозначают данные символы. Так, можно сказать, что ученик „понимает“ формулу $A = p + \frac{prt}{100}$, если он знает, что „конечный ре-

зультат равен сумме капитала и произведения его на проценты и время“ или что, „подставляя данные значения p , r и t , можно получить правильный результат“. Этим, однако, вопрос далеко еще не исчерпывается. Многие ученики, которые безошибочно применяют эту формулу, когда данные выражены в привычных для них величинах, совершенно теряются, когда речь идет о процентных деньгах не за год, а за месяц.

Вопрос о том, следует ли обучать учеников „читать между строк“ данных формул, соображать, в каких случаях они применимы, а в каких нет, а также выбирать подходящие единицы для того, чтобы ответ был правильным, служит еще предметом дискуссии. С одной стороны, утверждают, что подобное истолкование формул является делом физики, геометрии или практической жизни, но отнюдь не алгебры, и что соединение этого истолкования с чисто математическим мышлением вредно для этого последнего. С точки зрения алгебры вполне допустимо, например, вывести из двух данных равенств $A = p + \frac{prt}{100}$ и $I = \frac{E}{R}$ новое,

гласящее, что $AI = \frac{pE + \frac{prtE}{100}}{R}$. То, что капитал помножается в данном случае на силу тока в амперах, а прочие члены равенства — на напряжение тока в вольтах, кажется некоторым педагогам не имеющим значения с точки зрения алгебры как таковой.

Противоположная точка зрения защищает положение, что навык в алгебраическом счислении, оторванном от реальных величин (как то: длина, вес, рубли, года, амперы и вольты), совершенно бесполезен. Крайние сторонники этой точки зрения выдвигают два основных положения: „применяйте формулы так, как подсказывает вам здравый смысл и данные обстоятельства“, и „выбирайте такие единицы, чтобы ответ получился правильным“.

С точки зрения психологии учащегося приемлем и тот и другой путь, при условии внесения полной ясности в трактование вопроса. Так, следуя первому пути, мы должны внушить учащемуся, что каждое символическое обозначение, встречающееся в формуле, подразумевает количество, выраженное в таких-то единицах, и что оперирование с данной формулой резко отлично от выбора им подходящей формулы. Если он это усвоит, то он будет в ряде случаев отказываться от применения

формул в том виде, как они обычно даются. Формулу $I = \frac{E}{R}$ он сможет применить только в том случае, если будет знать, что I равно силе тока, выраженной в амперах, E — напряжению, выраженному в вольтах, и R — сопротивлению, выраженному в омах. Равным образом формула $F = \frac{1}{2} ah$ будет иметь для него значение только в том случае, если мы разъясним ему, что a равно длине основания треугольника в сантиметрах, h — высоте того же треугольника в сантиметрах и F — площади того же треугольника в квадратных сантиметрах. При наличии этих знаний правильный выбор формулы предопределит и правильный ответ, если, конечно, не будет сделано ошибки в самых вычислениях.

Избрав второй путь, мы должны внушить учащемуся, что большинство формул, как, например, $I = \frac{E}{R}$ или $S = at + \frac{1}{2} at^2$, является лишь средством облегчения правильного выбора и надлежащего расположения символов и чисел и что учащийся отвечает как за этот выбор, так и за правильность ответа, получаемого при пользовании формулами.

Первый путь обеспечивает более легкое приобретение алгебраических навыков и требует меньшего искусства в преподавании; второй путь лучше подготавливает учащихся к пользованию формулами в том виде, в каком они будут попадаться ему в научных и технических книгах; в последнем случае часть времени, отводимого на занятия алгеброй, посвящается, строго говоря, ознакомлению с другими дисциплинами.

Если избирается второй путь, то наиболее скользким местом при обучении алгебре является составление учащимися формул. В самом деле, если мы предложим им выразить при помощи формулы площадь прямоугольника в квадратном километре, когда длина и ширина его

выражены в метрах, и получим как ответ, что $F = \frac{ah}{c}$, то мы не можем еще быть уверенными в правильности этой формулы, если не знаем, что величина c , которую приходится „читать между строк“, выражает число квадратных метров в квадратном километре. Поэтому представляется целесообразным приучить учащихся требовать при составлении формул такой строгости и ясности данных условий, чтобы работа их сводилась к простой группировке чисел и символов, и в свою очередь требовать от них той же строгости и ясности в работе. Что касается чтения формул, то представляется целесообразным привить ему некоторый навык „читать между строк“, быть осмотрительным в выборе единиц измерения и применять формулы как ключ к решению определенных задач, а не как абсолютно точное и незыблемое правило.

При всех условиях полезно внушить ученику, что с момента приступа к пользованию формулой и до момента нахождения „ответа“ все величины, входящие в формулу, являются отвлеченными числами. Пока производятся действия, ученику не должно быть дела до сантиметров, рублей, годов, амперов и т. д. Что представляют собою данные величины, должно интересовать его до приступа к действиям при выборе формулы и после окончания действий — для правильного определения „ответа“. В процессе же действия равенство ампер = $\frac{\text{вольт}}{\text{ом}}$ равнозна-

чаще с равенством „ответ“ = $\frac{\text{число } a}{\text{число } b}$ или $x = \frac{a}{b}$.

При прочих равных условиях формулы, действительно встречающиеся в математике, физике и деловой жизни, предпочтительнее всех других. Но „прочие условия“ не всегда бывают равными. Указанные формулы отчасти слишком просты, отчасти требуют слишком длинных вычислений; к тому же их недостаточно для приобретения всех необходимых навыков. Поэтому учителя и составители руководств вынуждены прибегать к видоизменению действительных формул, используя существующие соотношения, но то упрощая, то усложняя эти формулы в зависимости от требований учебной жизни. В пользовании этими искусственными формулами нет ничего предосудительного. При обучении арифметике мы заставляем учеников в целях приобретения определенных навыков перемножать такие числа, как 9817 и 465, хотя и знаем, что такой случай умножения, вероятно, не встретится в жизни и одному из учащихся. Подобным же образом при преподавании алгебры мы пользуемся такими формулами, как $P = M^2N + \frac{M(O - N)}{N}$, хотя и знаем, что они едва ли могут встретиться учащемуся за пределами школы.

Навык в обращении с уравнениями.

Умение обращаться с уравнениями включает в себе две группы навыков, весьма несходных между собою с точки зрения психологии. Первые позволяют определить численное значение буквенного выражения, входящего в данное уравнение, или выразить одно из буквенных выражений при помощи других данных, т. е. „решить“ уравнение. Вторые позволяют „понимать“ уравнение как выражение известного соотношения, существующего между данными величинами, благодаря чему можно точно

сказать наперед, как изменится величина одного из элементов при изменении величины другого или других элементов.

Так, мы „решаем“ уравнение $\frac{Q}{2} = KR + 4$ в отношении Q , находя, что $Q = 2KR + 8$; мы „понимаем“ соотношение между величинами Q и R того же уравнения, если сознаем, что при постоянстве K первая величина находится в линейной зависимости от второй, что, принимая Q за ординату, а R — за абсциссу, мы получаем ряд точек на прямой, наклон которой зависит от величины K и которая пересекает ось Y в точке $+8$, и что всякое приращение R вызывает при равенстве прочих условий приращение Q на $2K$.

Развитию первых навыков до сих пор еще продолжают уделять главное внимание; между тем вторые имеют такое же, если не большее, значение, чем первые.

При „решении“ уравнений встречаются три случая. В первом ученик должен сперва привести в некоторую систему данные, достаточные и необходимые для получения ответа, а затем, сгруппировав известные величины в одной части уравнения, неизвестные же в другой и возможно упростив выражения, вычислить x , n или другую неизвестную величину. Иногда ему приходится иметь дело и более чем с одной неизвестной величиной. Соответствующие навыки полезны и применимы в жизни. Во втором случае ученик имеет дело с готовым уже уравнением (или формулой), например, когда он вычисляет радиус круга, пользуясь формулой $C = 2\pi r$. В третьем случае ученик решает уравнения вида $y = ax + b$ или $y = x^2 + ax + b$ в отношении a и b , пользуясь парными величинами x и y , или определяет два значения x для каждой данной величины y в уравнениях вида $y = ax^2 + bx + c$. Третий случай „решения“ уравнений весьма полезен, однако при условии приобретения известного навыка в „понимании соотношений“; без этого он может превратиться в чистую умственную гимнастику; ограничивать решение квадратных уравнений одним случаем, когда $y = 0$, как это делалось ранее при преподавании алгебры, не следует.

Понимание уравнений как выражения соотношений чрезвычайно полезно, так как оно стоит в тесной связи с наиболее существенным математическим представлением о количественной зависимости или функциональности и находит себе широкое применение во всех областях прикладной математики. Возражение, что научить ему гораздо труднее, чем простому „решению“ уравнений, не совсем справедливо; мы покажем в дальнейшем, как путем соответствующего подбора учебного материала можно значительно облегчить его изучение.

Навык в составлении и решении задач.

Упражнения в составлении уравнения или системы уравнений и нахождении необходимого ответа на основе данных, содержащихся в задаче, являются одним из самых полезных при изучении алгебры, если только задача является жизненной, а ответ доступен для понимания учащихся. Однако жизненные задачи обычно просты по условиям, не требуют длинных алгебраических вычислений и весьма часто не приводят к тем квадратным уравнениям, дробным показателям и сложным выражениям, которые уже изучены и ждут „приложения к задачам“. Поэтому учителя и составители руководств вынуждены изобретать такие задачи, при

которых использовались бы и более тонкие алгебраические технические операции. В качестве примера приведем две подобных задачи.

Земля и семь других планет обращаются около Солнца. Удвоенное число планет, расположенных ближе к Солнцу, чем Земля, плюс единица равно числу планет, расположенных дальше от Солнца, чем Земля. Найти число тех и других планет.

Даны два угла, из которых один на 5° больше, чем другой. Если число градусов каждого из этих углов умножить на число градусов дополнительного к нему угла, то произведение, полученное для большего из данных углов, превышает произведение, полученное для меньшего, на квадрат числа градусов меньшего из данных углов. Найти эти углы.

Должно ли умение решать задачи обозначать умение решать и такие примеры или же оно должно распространяться только на действительно полезные, жизненные задачи? Этому вопросу следует придать более общий характер. Должны ли задачи служить целям приобретения учениками навыков в алгебраическом счислении или же целям вооружения их теми алгебраическими познаниями, которые необходимы в жизни? Чем является умение решать задачи в настоящее время и чем оно должно быть на самом деле? — Ответ на эти общие вопросы мы дадим позже, после изучения психологических и педагогических проблем, возникающих в связи с решением задач. Пока же остановимся на некоторых частных вопросах.

До сих пор было принято выбирать и располагать задачи только с точки зрения тех алгебраических операций, которые необходимы для их решения; так, учитель или составитель руководства, изложив действия над алгебраическими дробями, обращался к поискам проблем, которые требуют для решения составления уравнений с дробными выражениями; какие именно жизненные факты и предметы при этом используются, не считалось имеющим особого значения. Между тем при расположении учебного материала следует обращать внимание и на природу данных жизненных явлений, и на существующую между ними логическую связь. Поэтому мы не видим оснований, почему нельзя привести на одной странице алгебраического учебника ряд задач, использующих данные, относящиеся к одной и той же области, например здравоохранению, и требующих для решения и составления уравнений первой степени и квадратных уравнений и действий над радикалами. Впрочем, расположение задач менее важно, чем их выбор. Количественные задачи обычно встречаются в жизни в связи с реальными предметами, явлениями и соотношениями; поэтому наиболее желательно развитие таких навыков, которые легче всего позволяли бы распознавать реальные, существующие соотношения.

Поскольку в школьных условиях мы лишены возможности представить учащимся целый ряд реальных положений в натуре, мы вынуждены описывать последние на словах. При этом может случиться, что иногда мы затрудняем, а иногда облегчаем учащимся понимание этих положений и решение соответствующих задач. Так, совершенно ясно, что если мы изложим условия задачи на мало понятном для учащихся языке, то мы крайне затрудним ее решение. С другой стороны, если мы спросим их: „через сколько лет отцу будет вдвое больше лет, чем его сыну, если отцу сейчас 40 лет, а сыну его 14“, то им легче будет решить эту задачу, чем ответить на обычный жизненный вопрос: „через

сколько лет твоему отцу будет вдвое больше лет, чем тебе*, потому что в последнем случае им не только надо будет устанавливать возраст отца и свой собственный, но и соображать, не приходится ли принимать здесь во внимание месяц и день рождения. Если следовать старой точке зрения, что решение задач имеет значение главным образом для „гимнастики ума“, то для нас безразлично, отличается ли словесное описание явлений от действительности или же нет, и мы вправе делать его и более легким, и более трудным для понимания, чем действительные явления. Однако такое положение совершенно неприемлемо, по крайней мере в отношении тех задач, которые используют данные из области науки, техники, промышленности и даже обихода. Если мы хотим использовать в задачах реальные факты и величины, чтобы научить учеников правильно обращаться с ними в жизни, то мы не должны применять взамен их неточных или неправильных словесных описаний.

Одним из существенных отличий действительных положений от описываемых на словах в задачах является далее избыточное или недостаточное число данных, необходимых для решения вопроса, которое весьма часто встречается в жизни, но в силу укоренившегося обычая почти никогда не попадает в школьных задачах. Привычка давать ровно столько данных, сколько требуется для решения задачи, укоренилась настолько глубоко, что в одном из распространенных американских учебников можно найти следующие утверждения: 1) каждая задача содержит отношения между несколькими неизвестными величинами; 2) число заключающихся в ней определенных положений равно числу неизвестных величин; 3) обозначьте одну из неизвестных величин буквой, а затем, используя все данные положения, кроме одного, выразите все прочие неизвестные величины при помощи первой; 4) составьте уравнение, используя оставшееся положение. Трудно согласиться с тем, что решение алгебраических задач должно сводиться только к преобразованию фраз в уравнения. Возможное несоответствие числа имеющихся данных с тем, которое необходимо для решения той или иной задачи, должно найти себе некоторое отражение при изучении решения алгебраических задач.

С точки зрения психологии подход ученика к преобразованию данных задачи в уравнение или систему уравнений, которые после решения их давали бы требуемый ответ, весьма различен в зависимости от того, является ли для него задача „оригинальной“ или же только одной из типовых, в решении которых у него имеется уже некоторый специальный навык. Поэтому возникает вопрос, как должны мы смотреть на задачи — как на серию оригинальных примеров или же как на собрание групп типовых упражнений, каждую из которых ученик должен изучать примерно так же, как вычитание отрицательных чисел или умножение x^a на x^b при помощи суммирования показателей. Большим распространением пользуется взгляд, что решение „оригинальных“ задач полезнее для учащихся. Однако многие опытные педагоги считают необходимым закрепить способность решать жизненные задачи при помощи таких шаблонных правил, как, „если ты можешь выбирать, то обозначай через x наименьшее число“, или „не забудь использовать все числа, которые тебе даны“, и стремятся развить в учащихся специальный навык в решении задач на сплавы, бассейны и т. д., иногда предпосылая изучению каждой группы их детальнейшее изложение хода

решения соответствующей типовой задачи. Мы полагаем, что этот вопрос должен быть решен в отношении алгебраических задач так же, как он уже решен в арифметике: решение некоторых групп задач (на площади, периметры, учет, сложные проценты) подготавливается там при помощи особых для каждой группы упражнений, решение же прочих задач представляется собственной изобретательности учащихся.

Навык в обращении с графическими изображениями.

В отношении изучения графических изображений при преподавании алгебры нам надо разрешить следующие основные вопросы: 1) нужно ли изучать элементарные данные, касающиеся всех простых и достаточно существенных графических изображений, или следует ограничиться изучением только тех графических изображений, которые выявляют зависимость двух переменных величин при помощи Декартовой системы координат, и соответствующих подготовительных данных; 2) если указанное ограничение целесообразно, то следует ли изучать графические изображения таких отношений, которые не связаны ни с одним из встречающихся ученикам уравнений, или следует ограничиться изучением только прямой линии, параболы, гиперболы и т. д. Первому вопросу можно придать следующую простую форму: какие из видов графических изображений, помещенных на фигурах 4—7, ученик должен научиться понимать, строить и применять.



Фиг. 4.

Графические изображения, которые мы назвали простыми и существенными, разделяются на группы: (I) поясняющие деление данной величины на части; (II) содержащие сравнение между собою двух или более величин; (III) содержащие сравнение двух или более величин, расположенных в порядке, соответствующем их отношению к некоторой общей характеристике; (III A) содержащие сравнение двух или более величин, выражающих повторность явления и расположенных в порядке, соответствующем их отношению к некоторой общей характеристике.

Фигура 4 иллюстрирует первую группу графических изображений, применимых в таких, например, случаях, как распределение расходов

семьи, распределение населения по национальностям или возрастным группам и т. д.

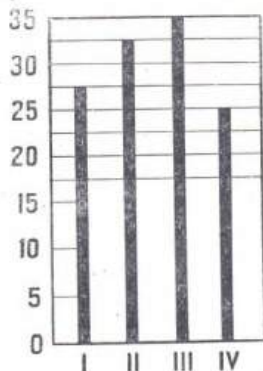
Фигура 5 характеризует вторую группу изображений, показывая в данном случае, какой предельный груз может выжать одной рукой каждый из четырех подростков. Этот метод изображения применим в отношении таких величин, как число мальчиков и девочек в различных школьных группах, цены различных продуктов и т. д. Если данные величины допускают расположение в определенном порядке в соответствии с каким-либо признаком, то это желательно отразить в их изображении. Так, если речь идет, например, о числе школьников различного возраста, то соответствующие колонки целесообразнее всего расположить в порядке возрастания числа лет.

Фигуры 6 и 7 относятся к третьей группе изображений. Первая из них, иллюстрирующая предельную скорость ходьбы подростка данного возраста (в м/сек), типична для изображения наиболее важного в этой группе случая, именно — зависимости одной переменной величины от другой; вторая, показывающая повторность явления (в данном случае температуры школьных помещений в градусах Цельсия за различное число дней), характерна для группы изображений III А, приобретающей все большее значение в общественных науках.

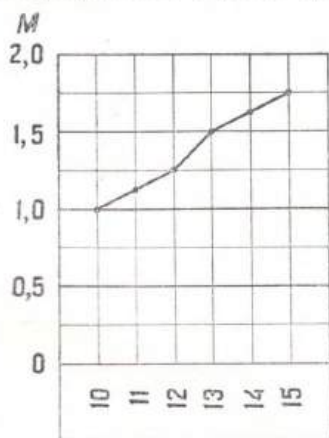
Графические изображения часто делят на статистические и математические, относя к первым группы I и II и те из изображений III группы, которые не допускают простого анализа зависимости y от x . Деление это имеет некоторые практические выгоды, но не является сколько-нибудь строгим или точным.

Возвращаясь к первому из поставленных нами вначале вопросов, необходимо отметить, что графические изображения, относимые к группам I и II, и часть простейших изображений группы III обычно уже известны учащимся из курса арифметики; приведенные выше фигуры 4—7 также заимствованы из арифметического руководства. Поэтому заниматься этими графическими изображениями в курсе алгебры необходимо только в том случае, если учащиеся не имеют соответствующей подготовки. При этом надлежит иметь в виду, что графические изображения I и II группы психологически полезны в

алгебре лишь в качестве вводных к изображениям группы III. С точки зрения учащегося в школе повышенного типа построение ряда колонок равнозначуще с построением кривой, соединяющей середины их верхних оснований. К тому же автор полагает, что попутное изучение построения графических изображений и на их основе изучение закономерностей функциональных рядов скорее затрудняет, чем облегчает

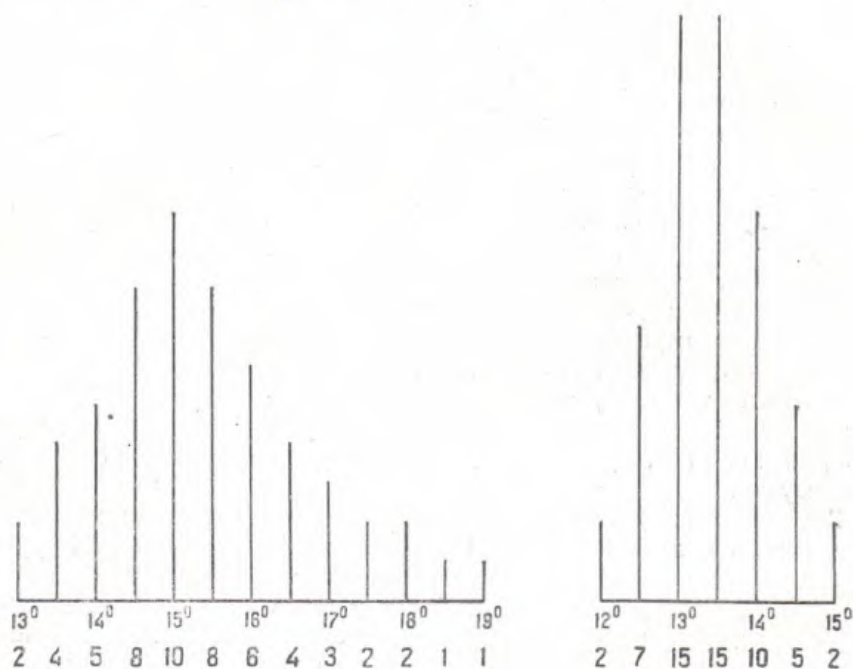


Фиг. 5.



Фиг. 6.

понимание первых. С точки зрения логики такой прием совершенно правилен; однако с точки зрения психологии следует предпочесть самостоятельное изучение систематизированных графических изображений, в которых данные следует располагать в определенном порядке по времени, числу объектов и т. д.; не следует упускать из вида, что выявление принципа, связующего факты и законы, важнее, чем выявление общих свойств графических изображений.



Фиг. 7.

Что касается элементарных сведений о кривых повторяемости, то им следовало бы уделить место в последние годы занятий в начальной школе, обучая учеников пониманию этих изображений и построению их на основе табличных данных. Изучение отношения этих кривых к кривой $y = e^{-x^2}$ и к коэффициентам разложения бинома следует, пожалуй, относить к концу курса алгебры. Изучение этих кривых параллельно с графическими изображениями простой зависимости одной переменной величины от другой может повести к недоразумениям, и его следует избегать.

На второй из поставленных выше вопросов приходится ответить следующее. Некоторая работа над соотношениями, не встречающимися в обычных уравнениях, должна быть проделана, чтобы ученики составили себе представление о разнообразии кривых и месте, занимаемом среди них кривыми, выражающими обычную зависимость. За этим исключением следует ограничиться изучением тех несложных кривых, математическая значимость которых может быть легко показана. Кривые, выражающие графически уравнения $y = ax$, $y = ax + b$, $y = x^2$, $y = x^2 + a$, $y = x^3$,

$y = x^3 + a$, $y = \frac{a}{x}$, $y = x^2 + ax + b$; $y^2 + x^2 = a^2$ и $y = a^x$, будут,

вероятно, достаточны по своему разнообразию для установления общих принципов. После изучения дробных показателей эти кривые следует пополнить кривыми, выражающими уравнения $y = x^{1/2}$, $y = x^{2/3}$, $y = x^{3/4}$, $y = x^{4/5}$, $y = x^{5/6}$ и т. д. При изучении теории логарифмов построение подобных кривых дает возможность выполнять прекрасные упражнения в счислении и приближенных вычислениях и с пользой применять значение дробных показателей. Следует также изучить основные данные, относящиеся к кривой $y = a^x$.

ГЛАВА IV.

ПСИХОЛОГИЯ УРАВНЕНИЯ.

Уравнения применяются для двух различных целей. С одной стороны, ими пользуются для такого расположения данных и действий, которое позволяло бы легко получать некоторый числовой результат или ответ на вопрос, побудивший составить данное уравнение. Так, $60 - x = x - 45$ является удобным расположением данных для получения ответа на вопрос, „какое число на столько же меньше 60, на сколько оно больше 45?“ В данном случае уравнение представляет собой выражение, которое надо *решить*. С другой стороны, ими пользуются для выражения зависимости одной переменной величины от другой или других переменных величин. В этом случае оно является выражением соотношения или закона, который надо *понять*. Таковы уравнения $y = kx$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = k^2$ и т. д.

Конечно, и в первом случае уравнение может выражать какой-либо общий закон, о котором надо составить себе представление, равно как во втором случае его, может быть, придется решить для определения специального значения переменных величин. Однако в огромном большинстве случаев превалирует одно какое-либо его назначение. В последнем легко убедиться, сравнивая между собою хотя бы два таких примера:

Сколько воды надо добавить к 3 л 20-процентного раствора карболовой кислоты, чтобы получить 5-процентный раствор ее?

— Если обозначить через u , v и r уменьшаемое, вычитаемое и разность, то какие уравнения можно написать, чтобы выразить зависимость между этими величинами?

Возможно, что ученики сознают различие в той работе, которую им приходится проделывать при решении того и другого примера; в этом их может также укреплять то обстоятельство, что в первом случае выражение $0,05(3 + x) = 0,20 \cdot 3$ обычно называется *уравнением*, тогда как во втором случае выражения $u - v = r$ и $u - r = v$ называются *формулами*. Однако, вообще говоря, почти все, чему их учат об уравнениях, затушевывает их представление об этой разнице. В самом деле, им приходится весьма часто иметь дело с буквенными уравнениями, подобными $(a - 1)x = a^2 - 1$, $a(a - x) = b(b - x)$ и т. д. Можно было бы думать, что эти последние выражают какую-то существенную зависимость между x , u или z и переменными величинами a , b и c и служат для установления некоторых обобщающих правил. Но в

действительности этого нет, и ученики должны только решать их совершенно так же, как числовые примеры.

Если представить себе теперь ученика, который твердо усвоил, что x всегда является одной неизвестной величиной в уравнении и что для определения x и y необходимо иметь два уравнения, то легко представить себе, какое смущение он должен испытывать, сталкиваясь при переходе к изучению Декартовой системы координат с уравнениями $y = x + 4$, $y = x$, $y = x - 4$ и т. д., которые никак нельзя преобразовать так, чтобы в одно уравнение не входили обе переменных величины.

С точки зрения математики и логики это затруднение может казаться детским и весьма маловажным. „Детским“ его можно еще, пожалуй, назвать, но когда мы обучаем детей, то мы должны стремиться избегать и таких затруднений. „Маловажным“ же оно отнюдь не является, по крайней мере с точки зрения психологии. В самом деле, наиболее прочными связями, которые сложились у учащихся в отношении x или y , являются связи последних с выражениями „неизвестная величина“, „найти“, „одно и только одно число является правильным ответом“. Наиболее часто применявшаяся и прочная связь выражения „определите оба неизвестных x и y “ образовалась у учащихся с выражением „надо составить два уравнения“. Поэтому навыки, приобретенные учащимися в отношении x и y , оказывают чудовищное сопротивление пониманию сущности уравнения $y = x + 4$. Несомненно, что понимание системы координат и линейных уравнений учениками, изучившими решение уравнений обычными способами, было бы значительно облегчено, если бы для обозначения осей координат применялись буквы NS и EW вместо YY и XX , а самых координат — буквы V_1 и V_2 вместо Y и X . Почти все, что до сих пор преподавалось ученику, препятствует пониманию им уравнения $y = ax + b$. Подобным же образом новые навыки, которые он должен приобрести, рассматривая y как переменную величину, значение которой зависит от значения, придаваемого x , и отказываясь от обычного „решения“ уравнений, находятся в резком противоречии с ранее приобретенными им привычками; ученик просто не знает, что ему надлежит делать с данным уравнением и что вообще оно обозначает.

Учитывая отчасти это более или менее ясное значение указанных затруднений, большинство учителей и руководств сохраняет докучный у только как необходимое зло, позволяющее объяснить основы системы координат и построение графических изображений уравнения, и быстро изгоняет его, заменяя „уравнение $y = 2x + 3$ “ „выражением $2x + 3$ “, а затем „уравнением $2x + 3 = 0$ “, которое может быть спокойно „решено“. Однако эта замена разрушает представление об $y = 2x + 3$ как выражении линейной зависимости между двумя переменными величинами, из которых одна всегда на 3 больше, чем удвоенная другая, и лишает возможности весьма легко и непосредственно основать изучение системы координат на ранее приобретенных знаниях свойств уравнений. К тому же, если y всегда обращается в 0, прежде чем что-либо сделано с уравнениями, то стоит ли вообще обращать на него внимание?

Таинственное появление и исчезновение y снова повторяется при переходе к квадратным уравнениям. Все, что ученик узнал до сих пор об уравнениях (за исключением, быть может, кратких сведений об уравнении $y = ax + b$), запрещает ему рассматривать y в уравнении

$y = ax^2 + bx + c$ иначе, как опечатку, по исправлении которой y должен превратиться в 4 или 7. После того как возобновленное краткое обращение к системе координат снова дает ему некоторое представление о том, что же выражают подобные уравнения, y исчезает опять, и он должен снова решать уравнения, приведенные к форме $ax^2 + bx + c = 0$. При этом вопрос осложняется еще тем, что значения x именуются теперь почему-то корнями. Заключительной частью всех этих недоразумений является изучение системы квадратных уравнений. Здесь y снова появляется, но не в качестве второй неизвестной величины, которую надо найти, как хотя бы в случае системы уравнений $3y - 4x = 2$, $y - x = 1$, но в качестве элемента системы координат (такое изложение вопроса часто встречается в настоящее время в курсах алгебры). Два квадратных уравнения являются при этом не только голыми компонентами системы уравнений, которые надо решить, но и реальными линиями, в отношении которых надо выяснить „пересекаются ли они и если да, то в какой точке или точках“.

При преподавании алгебры в прежнее время мы не встречались с подобного рода затруднениями; это объясняется просто тем, что уравнения не рассматривались ранее как выражение общей зависимости одной переменной величины от другой и не являлись основанием для изучения графических изображений и Декартовой системы координат; уравнения надо было только решать. Когда математики столкнулись с необходимостью ввести в курс преподавания формулы, представление об общей зависимости или функции и графические изображения, то перед ними были открыты два пути: сообщение новых сведений как естественного дополнения уже имеющихся или трактование их как темы, совершенно отличной от прежней, поскольку между взглядом на уравнение как на выражение соотношения между переменными величинами и на выражение, при помощи которого можно при надлежащем расположении данных определить значение некоторой неизвестной величины, существует весьма большое различие.

Пристрастие к сложившимся навыкам и поверхностные педагогические соображения побудили избрать первый путь. Однако психологический анализ убеждает, что гораздо правильнее следовать второму пути: двойное значение уравнений должно быть объяснено учащимся в самом начале и должно трактоваться отдельно в дальнейшем; этим двум значениям должны быть присвоены различные наименования, изучать же их следует в различное время и различными путями, давая им и различное применение.

Изучение уравнений, имеющих частное значение.

Изучение уравнений, которые надо „решить“, чтобы найти некоторую частную величину, должно начинаться при занятиях арифметикой, скажем, в III группе, в такой форме:

$$5 + \dots = 9, \quad 3 \times 9 = \dots, \quad 7 \times \dots = 21 \text{ и т. д.}$$

В последующем уравнения должны применяться при вычислениях во всех тех случаях, когда они являются наиболее удобной формой рассуждения, как хотя бы в следующих примерах:

$$\frac{3}{4} = \frac{\dots}{8}, \quad \frac{3}{4} = \dots \times \frac{1}{2}, \quad 24 \text{ руб.} = \dots \% \text{ от } 400 \text{ руб.}$$

Кроме того, их следует применять во всех тех случаях решения задач, когда они позволяют наиболее удобно располагать данные. Обозначения *отв.*, *?*, „число руб.“ и т. д. заменяют при этом многоточие или пропуск места, принятые для обозначения неизвестного числа в примерах. Аналогичные упражнения следует продолжать и при преподавании алгебры, вводя некоторые усложнения, которые представляются желательными. При этом отсутствующие числа ни в коем случае не следует обозначать буквой *x*, *y* или *z*. При пользовании уравнениями для упражнения в счислении и для определения неизвестного числа лучше всего применять буквы *O* (ответ) и *B* (вопрос), а также, например, букву *K*; буквы *n* и *N*, которыми часто пользуются в этих случаях, лучше сохранить для обозначения „любого числа“ или общего понятия числа. При решении системы уравнений неизвестные следует обозначать через *отв.*₁, *отв.*₂ и т. д., а при решении квадратных уравнений — через *отв.*² (или соответственно — *O*₁, *O*₂ и т. д. и *O*²).

Подобного рода равенства, составляемые для облегчения счисления или определения некоторого частного значения неизвестной величины по другим данным величинам, можно называть уравнениями. При изучении алгебры им в сущности можно было бы не давать никакого наименования. Но так как число обучающихся арифметике во много раз больше числа обучающихся алгебре, то название „уравнения“ за ними все же следует сохранить.

Изучение этого вида уравнений при прохождении курса алгебры должно быть организовано как подчиненное следующему принципу: „на всякий реальный вопрос, ответом на который является могущее быть найденным число, можно ответить, составив на основе данных подходящее уравнение и решив его, если только число данных достаточно для получения ответа“. Упражнения эти, как нам кажется, должны предшествовать систематическому изучению системы координат и линейных уравнений как таковых. Вопросы, требующие ответа, должны быть по преимуществу реальными. Количество уравнений, сложных по форме, может быть небольшим, так как они должны только иллюстрировать, что несмотря на сложность отношений и их можно решить, пользуясь обычной техникой решения уравнений.

Изучение уравнений, имеющих общее значение.

Представление об уравнении как выражении общей зависимости между переменными величинами приобретает при обучении арифметике двояким путем. Вначале учащиеся встречаются с такими правилами: „длина в *m* = (длине в *dm*) : 10“, „цена в коп. = (цене в руб.) $\times 100$ “ и т. д. Впоследствии они знакомятся с такими формулами, как $C = 2\pi R$ (длина окружности), $P = KTR$ (процентные деньги), $b^2 = a_1^2 + a_2^2$ (Пифагорова теорема) и т. д. Кроме того, современные курсы арифметики стремятся дать учащимся представление и о графическом изображении зависимости двух переменных величин, используя для постановки и решения задач диаграммы, иллюстрирующие зависимость между ростом и возрастом человека, изменения в составе населения и т. д.

При прохождении курса алгебры стремятся к тому, чтобы учащиеся научились читать и понимать любую формулу, правильно выражающую полезное соотношение, которое может быть ими понято, выражать подобные соотношения формулами и находить значение одной из перемен-

ных величин по данным значениям всех других. При „решении“ этих формул надо, как правило, требовать получения не одного значения какой-либо переменной величины, а нескольких, соответственно варьируя данные. Так, например, при пользовании формулой $\text{ампер} = \frac{\text{вольт}}{\text{ом}}$

для определения числа *ампер* мы даем для *вольт* и *ом* по четыре значения: а) 110 и 22, б) 110 и 25, в) 220 и 20, д) 12 и 2. Применять буквы *x*, *y* и *z* при изучении подобных формул не рекомендуется. Изучение графических изображений охватывает ознакомления с Декартовой системой координат, применение букв *y* и *x* для обозначения двух расстояний и понимание значения $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = x + 2$,

$y = x - 2$, $y = \frac{1}{x}$, $v = \frac{4}{x}$ и других полезных отношений. Далее следует систематическое изучение специально выбранных типов уравнений. Последние могут быть названы „уравнениями переменных величин“ или „уравнениями дробно-линейных отношений“. Это изучение должно охватить уравнения $y = cx$ и $y = \frac{c}{x}$, в связи с „прямой“ и

„обратной“ пропорциональностью, $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ в связи с таблицами квадратов и квадратных корней и соответствующей интерполяцией, а также квадратными уравнениями вообще. Для обозначения постоянных величин этих уравнений, повидимому, предпочтительнее пользоваться буквами c_1 , c_2 , c_3 или k_1 , k_2 , k_3 , чем буквами a , b , c .

Определение x при $y = 0$ должно рассматриваться только как специальный частный случай одного из многих возможных решений. Подходить к нему рекомендуется следующим образом. Сперва определяется значение y при различных значениях, даваемых x ; затем определяется значение x при изменяющихся значениях y , одним из которых является 0. Если графические методы решения проходятся, то изучать их следует до приступа к изучению методов решения при помощи счисления. Системы уравнений, содержащих x и y , изучаются главным образом как способы найти ответ на вопрос: „Пересекаются ли соответствующие линии, и если да, то в какой точке?“ „Если в линейном уравнении $y = c_1x + c_2$ координаты одной точки равны 7 и 4, а другой 13 и 6, то чему равны c_1 и c_2 ?“

В связи с изучением дробных показателей следует кратко просмотреть и сравнить между собой кривые, выражаемые уравнениями: $y = x^{\frac{1}{5}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{3}{5}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{3}{4}}$, $y = x^{\frac{5}{6}}$, $y = x^{\frac{5}{4}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{7}{5}}$. В число упражнений с логарифмами можно удобно включить вычисление данных, необходимых для построения некоторых из соответствующих кривых. Если позволит время, то следует остановиться на уравнениях $y = a^x$, $(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = c_3^2$ и некоторых других, также представляющих значительный интерес.

Наконец, можно изучить „функцию“ $ax + b$ или „функцию“ $ax^2 + bx + c$, как не содержащую „ y “, но такая „функция“ не является уравнением и не может носить этого названия.

При изложенном методе изучения уравнений современные упражнения над так называемыми „буквенными уравнениями“ заменяются двумя различными видами учебной работы: с одной стороны, пользуясь реальными формулами, ученики приобретают навык выражать любую из переменных величин при помощи всех других, т. е. решать формулу в отношении этой переменной величины; с другой стороны, пользуясь типичными формами отношений, они приобретают понимание значения постоянных величин в той же мере, как и значения двух переменных величин.

ГЛАВА V.

ПСИХОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Выше мы уже указали, что по вопросу о применении технических алгебраических навыков к решению задач среди педагогов существует некоторое различие во взглядах. В настоящей главе мы подробно изложим, что, по нашему мнению, надо понимать под решением задач, когда следует им заниматься и как его надо выполнять.

Прежде всего необходимо отметить, что упражнения, носящие общее название приложения технических алгебраических навыков к решению задач, распадутся на ряд групп, весьма отличных друг от друга как по требованиям, предъявляемым ими к ученикам, так и по влиянию их на последних, если подходить к ним с точки зрения психологии. Наиболее существенные из этих групп приведены в помещаемой ниже таблице. Все они отличны от простого счисления, чтения или построения графических изображений и решения уже составленных уравнений.

Психология упражнений группы I—1 совершенно ясна. Подобные упражнения при условии правильного выбора и удачного расположения весьма полезны для изучения значений и укрепления, расширения и проверки знания значений.

Упражнения группы I—2 применяются весьма редко; учителя обычно думают, что в приложении счисления к реальным фактам особой нужды нет и что подыскание жизненного материала, понятного для обучающихся первый год в школе повышенного типа, в целях использования его при алгебраическом счислении, весьма затруднительно. Первое соображение, конечно, неправильно. Хотя обучающиеся алгебре менее нуждаются, чем обучающиеся арифметике, во вводных жизненных и интересных задачах, которые требуют для своего решения применения новых действий или методов, все же и для них подобного рода задачи, наглядно показывающие, какого рода услуги приносит алгебраическое счисление, крайне полезны. Второе соображение справедливо, но лишь отчасти. Правда, далеко не весь материал, который мог бы быть использован для составления задач, понятен учащимся, выдуманные же задачи часто не облегчают понимания счисления; однако эти затруднения нельзя считать непреодолимыми.

Разнообразные упражнения, входящие в группу I—3, лежат на грани между тем, что мы обычно называем решением задач, и примерами на всякого рода математические выводы и заключения. Этой части алгебраических занятий уделялось до настоящего времени весьма мало внимания. Правда, точно оценить значение подобных упражнений весьма трудно, но не может быть сомнения в том, что они разнообразят

преподавание, облегчают нахождение способов решения „оригинальных“ задач и способствуют претворению алгебраических навыков, приобретенных учеником, в то, что за отсутствием более подходящего термина может быть названо „алгебраическим смыслом“, т. е. способностью распознавать алгебраические факты и оперировать над ними, пользуясь всем арсеналом алгебраических средств.

Упражнения, входящие в группу II — А, признаются преподавателями физических и социально-экономических дисциплин наиболее существенным вкладом алгебры в дело подготовки к изучению этих предметов. Их достоинством является то, что соответствующие данные сами по себе заслуживают внимания как выражающие естественные соотношения, а результаты получаются в том виде и таким путем, как это нужно; далее эти упражнения приучают к тому, что буквами можно пользоваться для обозначения любого числа из группы чисел, удовлетворяющих определенным условиям; наконец, они являются вводными к общему изучению зависимости одной переменной величины от другой.

В отношении учебной работы, связанной с этой группой упражнений, полезно сделать следующие замечания. Выбирая подходящие формулы

Группа I. Задачи, не требующие для решения знания или применения сложных уравнений или формул.

1. Задачи, связанные со знанием значений, как то: буквенных обозначений, отрицательных величин, показателей.

2. Задачи, связанные со знанием алгебраических действий.

3. Задачи, связанные с комбинированием значений и действий или с другими алгебраическими понятиями.

Если карандаши стоят по 6 коп. за штуку, то сколько стоят n карандашей?

Как обозначить, что данный пункт лежит на 24,8 м ниже уровня моря, принимаемого за 0?

Если $a \times a \times a \times a$ обозначается через a^4 , то как вы обозначите произведение n одинаковых сомножителей, равных a ?

Каков конечный результат вашей игры, если результаты отдельных игр таковы:
— 8, + 4, — 6, — 2, + 7?

При каких условиях $a = \frac{1}{a}$? Как изменяется величина b в выражении $b = p + \frac{q}{r}$ при увеличении r ?

Значение v_2 при $v_1 = 4$ было по ошибке пропущено в таблице. Чему, по вашему мнению, оно приблизительно равно?

Если $v_1 = 0$, то $v_2 = 4$
 „ $v_1 = 1$, то $v_2 = 5,02$
 „ $v_1 = 2$, то $v_2 = 7,96$
 „ $v_1 = 3$, то $v_2 = 12,98$
 „ $v_1 = 4$, то $v_2 = \dots$
 „ $v_1 = 5$, то $v_2 = 29,03$
 „ $v_1 = 6$, то $v_2 = 40,05$

Группа II. Задачи, при разрешении которых предполагается применение уравнений или формул.

А. Уравнение или формула является одной из группы известных формул.

1. Какая именно из этих формул нужна для решения задачи — также известно.

$$R = \frac{4}{5} C^{\circ}.$$

Если температура равна 25° по термометру Цельсия, то чему она равна по термометру Реомюра?

Вам известно значение формул:

$$V = at$$

$$S = \frac{1}{2} at^2$$

$$v = \sqrt{2aS}$$

$$V = gt$$

$$S = \frac{1}{2} gt^2$$

$$v = \sqrt{2gS}$$

$$g = 9,81$$

Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите пространство, пройденное в течение шестой секунды телом, которое брошено с высоты 1600 м.

2. Какая именно формула нужна — неизвестно; ученик должен выбрать формулу, а равно и относящиеся к ней данные.

В. Уравнение или формула неизвестна и должна быть составлена учеником.

1. Уравнение или формула является сперва выражением общего закона для всех случаев, охватываемых определенным соотношением.

Составьте уравнение для определения размеров прямоугольника, длина которого вдвое больше ширины, а площадь равна a квадратным дециметрам.

Найдите его размеры, если a равно 10, 20 и 100 дм^2 .

2. Уравнение (не всегда называемое формулой) является сперва способом расположения данных для получения ответа в каком-либо одном частном случае.

Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы при площади в 10 дм^2 длина его была вдвое больше ширины?

для упражнений, не следует без нужды обременять учеников изучением физики, астрономии или инженерного дела; наилучшими формулами являются такие, значение которых можно понять путем одного лишь внимательного чтения; следует избегать формул, содержащих непривычные термины, а также требующих сложных расчетов для определения размеров единиц. Упражнения с таблицами и диаграммами полезно сочетать с решением задач. Прежде чем данные формулы будут применены для решения задач, полезно использовать их для упражнения в чтении

и составлении формул и создания представления о соотношениях величин.

Материал для составления задач, который заимствуется из области теоретических дисциплин и инженерного дела и который удовлетворил бы разумного учителя в той же мере, как материал, касающийся привычных для ученика жизненных фактов и явлений, может в некоторых случаях оказаться довольно скудным. Это приводит к необходимости составления формул на основе упрощенного материала, как хотя бы в следующем примере:

Отец выдает дочери в дополнение к ее заработку половину того, что она зарабатывает в месяц. Пусть M равно ее месячному заработку. Чему будет равна сумма, которую она получает от отца? Пусть S равно всей получке ее в месяц. Составьте формулу для определения S . Сколько всего она получит, если зарабатывает в месяц 40 руб., 48 руб., 34 руб. 40 коп.? Каков ее месячный заработок, если всего она получила за месяц 69 руб.?

По поводу этого вида учебной работы необходимо отметить, что следует избегать составления формул для нереальных и слишком упрощенных фактов и положений.

Все упражнения группы II—В являются тем, что некоторые учителя только и считают достойным названия „решения задач“. При этом упражнения, входящие в группу II—В—2, встречаются гораздо чаще, чем входящие в группу II—В—1. В дальнейшем, если не будет сделано особой оговорки, мы будем подразумевать под „задачей“ одно из упражнений группы II—В—2, в котором требуется составить уравнение, используя данные задачи, относящиеся к какому-либо частному случаю, для получения ответа на один или более вопросов количественного порядка, относящихся к тому же частному случаю.

Закончив характеристику отдельных групп упражнений, обратимся к ряду весьма существенных частных вопросов, связанных с психологией решения задач.

Реальность задач.

Из числа задач, которые приходится решать сейчас ученикам, лишь весьма небольшое количество можно отнести к числу реальных. Прежде всего, многие из них содержат такие данные, которые правильнее было бы считать ответом, рассматривая последний просто как данную величину. Приведем пример: „Через десять лет возраст Ивана будет равен половине возраста его отца, а через двадцать лет — трем пятым. Сколько сейчас лет Ивану и его отцу?“ В обыденной жизни такой вопрос мог бы возникнуть только в том мало правдоподобном случае, когда кто-либо, зная, что сыну 10 лет, а отцу 30, составил указанные отношения, а затем, запомнив отношения, забыл исходные цифры возраста. Просмотрев два руководства, пользующихся весьма хорошей репутацией, автор обнаружил в них соответственно 57 и 52% общего числа задач, приходящихся на долю задач указанного выше типа, в которых ответ следовало бы знать наперед. Если и можно защищать подобного рода упражнения, то лишь с точки зрения умственной гимнастики и развития интереса к математическим загадкам. Но в таком случае лучше отказаться от претензий на реальность и придавать им отвлеченную форму, как хотя бы в следующем примере: „Я задумал число;

сумма половины и трети его на семь единиц больше четверти его; что это за число?»

Далее, многие задачи содержат положения или вопросы, не являющиеся реальными, потому что в действительности явление будет протекать иначе, чем это предполагается в задаче; а ответ будет найден не тем путем, какой вытекает из ее условий. Автор проанализировал с этой точки зрения задачи, содержащиеся в тех же руководствах, и отмечал нулем полное отсутствие реальности, десятью — полную реальность задачи во всех ее деталях и цифрами 1, 2, ..., 9 — промежуточные степени реальности; при этом отметку 4 получили следующие, например, задачи:

1. Трое решили собрать 105 руб.; первый согласен внести вдвое больше, чем второй, а третий — вдвое больше, чем первый. Сколько должен внести каждый?

2. Какой угол в пять раз больше дополнительного к нему угла?

3. Диагональ прямоугольника равна 102 см, основание же его втрое больше высоты. Чему равна длина основания этого прямоугольника?

Надо сказать, что степень реальности этих задач, получивших отметку 4, невелика. Первая из них содержит условия, которые едва ли встретятся когда-либо в жизни; вторая задача может быть и возникнет, но при таких обстоятельствах, которые, вероятно, допускают немедленное решение 180° минус $\frac{1}{6}$ от 180° ; в отношении третьей задачи трудно допустить, чтобы кто-либо, зная длину диагонали и отношение сторон прямоугольника, не знал длины его основания. Тем не менее, из числа 213 задач, содержащихся в одном из руководств и выдержавших первое испытание, 70 получили отметку за реальность ниже 4.

Ценность задач.

Если исключить задачи, ответы на которые следовало бы считать известными, а также задачи, реальность которых по оценке автора ниже 4, то окажется, что среди оставшихся задач имеется много таких, которые имеют ценность только для небольшого числа лиц и притом не очень высокую. По просьбе автора четверо психологов, из которых трое хорошо владели математикой, просмотрели задачи, содержащиеся в одном из руководств, с точки зрения их ценности. При этом давалась оценка и частоте применения и ценности задачи для тех, кто ею пользуется; общая ценность определялась как средняя из двух отметок, полученных по указанным разделам. В первом разделе нулем обозначалось полное отсутствие применения и десятью — применение не реже одного раза в месяц 95 процентами учащихся; отметки 1, 2, ..., 9 ставились для промежуточных значений частоты применения. Во втором разделе нулем отмечалось полное отсутствие ценности и десятью — абсолютная необходимость задачи; промежуточные значения отмечались цифрами 1, 2, ..., 9. Следующие примеры показывают, какие задачи получили за общую ценность отметку 3.

1. Разделите 108 руб. между A и B так, чтобы A получил в восемь раз больше, чем B .

2. Первый рабочий может выполнить работу в 10 дней; вместе со вторым рабочим он может выполнить ее в 8 дней. Во сколько дней мог бы выполнить ту же работу один второй рабочий?

3. ABC — равнобедренный треугольник, AD — его высота и BC — основание. Найдите AD , зная, что $AB = 18$ см и $BC = 15$ см.

Если исключить задачи, признанные имеющими меньшую ценность, чем приведенные выше, то из 143 задач останется 96. Среди этих последних много таких, которые легче решаются при помощи простого счисления, чем путем составления и решения уравнений. Если исключить и эти задачи, то их останется всего 61. Но среди остающихся имеются задачи, относимые нами к группам I и II — А — 1. Если мы исключим и их, то у нас останется всего 49 задач, или одна десятая первоначально взятого числа задач — 491. Производя подобный же анализ задач, содержащихся в другом известном руководстве, автор получил следующие числа задач, выдержавших аналогичный пятикратный отбор: 239, 181, 144, 59 и 53 при первоначальном общем числе задач 412. Необходимо отметить, что среди оставшихся 53 задач 18 не являются типичными упражнениями, относимыми к группе II — В, так как 10 из них касаются построения графических изображений, а 8 — применения простейших тригонометрических сведений, обычно, вообще не включаемых в курс алгебры.

Следующие примеры показывают, какого рода задачи входят в число 49, оставшихся после описанного выше пятикратного отбора.

Наибольшее число задач (всего 20) приходится на процентные вычисления разной степени сложности, например:

Какой капитал, приносящий 4 % в год, надо внести, чтобы иметь годовой доход, равный 600 руб.?

Через сколько лет капитал в 1000 руб. обратится в 1500 руб., если он приносит 5 % в год ($1500 = 1000 + 1000 \cdot 0,05 \cdot y$; определить y).

В течение 10 лет некто вносит 1 января каждого года по 100 руб., приносящих 5 простых процентов в год. Какой суммой будет он располагать по истечении десятого года?

Следующее место занимают задачи, касающиеся времени исполнения данной работы или части ее одним или двумя рабочими (всего 9 задач). Характер этих задач ясен из примера, помещенного в предыдущем разделе под № 2, поскольку он вошел в число 49 наилучших задач.

Четыре задачи характеризуются следующим типичным примером:

Мука, получаемая при перемолке хлопковых семян, содержит 7 % азота. Сколько этой муки надо высеять, чтобы внести в почву 15 кг азота?

Три задачи, аналогичные приводимой ниже, касаются смесей:

Сколько килограммов кофе, стоящего по 6 р. 50 к. и по 4 р. 50 к. за килограмм, надо смешать, чтобы получить 100 кг смеси стоимостью по 5 р. 30 к. за килограмм?

С геометрическими исчислениями связаны 4 задачи; одна из них помещена под № 3 в разделе „Реальность задач“, три остальных характеризуются следующим примером:

Найти высоту башни, пользуясь подобием треугольников; необходимые данные приведены на чертеже.

Прогрессиям посвящены две задачи; одна из них такова:

Если отец подарит сыну 10 коп., когда последнему минет пять лет, 20 коп. — через год, вдвое большую сумму еще через год и т. д. до достижения сыном 18-летнего возраста, то сколько всего денег получит сын от отца за эти годы?

Еще две задачи из числа 49 приведены под № 1 в предыдущем и настоящем разделах.

Остальные пять задач носят индивидуальный характер; они таковы:

Минимальная температура воздуха 2 февраля была — 11°, а максимальная — 6°. На сколько градусов колебалась в этот день температура?

Прямоугольный усадебный участок имеет 40 м ширины. Какова его длина, если окружающий его со всех сторон забор имеет 418 м длины?

Мальчик знает, что он может делать на лодке 9 км/час по течению реки и 4,5 км/час — против течения. У него имеются в распоряжении ровно 3 часа. Какое расстояние туда и обратно может он проехать на лодке за это время?

Черепица имеет размеры 15 см на 25 см, а шиферная плитка — 20 см на 30 см.

Если для покрытия данной кровли требуется 300 штук черепицы, то сколько потребуется для той же цели шиферных плиток?

Число столбов, потребных для устройства забора, изменяется обратно пропорционально расстоянию между ними. Если для устройства забора нужно 120 столбов при расстоянии между ними в 3 м, то сколько потребуется столбов при расстоянии в 4 м?

Приходится признать, что далеко не все из этих задач, признанных реальными и полезными, удовлетворяют тем относительно высоким требованиям, которые мы предъявляем к упражнениям в решении задач группы II—В—2; часть из них не учитывает обычной коммерческой практики (задачи на процентные вычисления), часть основывается на маловероятных положениях (например задача № 1 на взнос денег), часть дает такие методы отыскания требуемого числа предметов, какие мы едва ли применили бы в жизни при аналогичных обстоятельствах (две последних из только что приведенных задач), часть легче решается простыми арифметическими расчетами, уже известными ученикам, чем при помощи составления уравнений.

Скучное число реальных задач, вполне удовлетворяющих нашим требованиям, может рассматриваться некоторыми педагогами как аргумент в пользу вымышленных задач, которые давали бы достаточный практический материал для применения принципов и технических навыков. Но, спрашивается, следует ли развивать способность применять принципы и технические навыки на вымышленных задачах, если нет реальных задач, к которым они приложимы? Далее отнюдь нельзя считать доказанным, что мы уже собрали весь тот материал, который может послужить для составления реальных и полезных задач. Опыт последних лет и усилия отдельных авторов наглядно показали, что в этом направлении может быть сделано еще многое. Поэтому до тех пор, пока мы не исчерпаем всего возможного запаса реальных и полезных задач, мы не должны прибегать к вымышленным и грубо-упрощенным упражнениям.

В последнее время наблюдается усиленная тенденция сообщать учащимся ряд сведений по физике, технике, астрономии, судоходству и т. д., дающих материал для составления упражнений в приложении алгебры к решению реальных задач. Было бы весьма интересно знать, какое количество времени затрачивается на усвоение этих сведений и какое значение имеет их изучение для развития интереса к указанным отраслям знания. Дело в том, что опытные преподаватели этих предметов вначале весьма старательно избегают применения в соответствующих курсах алгебраических и вообще количественных упражнений; преподаватели химии, геологии, физической географии, биологии и экономических дисциплин пользуются только простейшими математическими выражениями, боясь затруднить учащихся более серьезным математическим материалом; даже в физике словесные описания применяются чаще, чем уравнения, а правила чаще, чем формулы. Поэтому при недостаточном осторожном выборе материала, имеющего отношение к указанным дисциплинам, для последующей его алгебраической обработки мы можем, с одной стороны, затруднить преподавание алгебры, а с другой — оказывать плохую услугу этим дисциплинам, сообщая учащимся, приступающим к занятиям в школе повышенного типа, наименее привлекательные для них элементы указанных предметов.

Насколько автору известно, вопрос о реагировании учеников на задачи, основанный на материале, позаимствованном из других предметов, совершенно еще не освещен. Что же касается оценки их тем же методом, каким были оценены алгебраические задачи, содержащиеся в руководствах, то по этому поводу можно сообщить следующее. Тем же четырем психологам автором было предложено оценить реальность, ценность, интерес, значение для понимания и приложения математических законов, точность формулировок и значение для других предметов 17 задач, из которых 11 касались закона рычага, 5 — свободного падения тел и 1 — закона Бойля-Мариотта; средняя отметка, полученная этими физическими задачами, была несколько выше, чем средняя отметка обычных задач.

Выбор упражнений для применения технических навыков.

Трудно найти какое-либо психологическое или педагогическое обоснование существующему обычаю заканчивать изучение каждого раздела алгебры рядом словесных задач, решение которых требует применения только что пройденных математических действий; по-видимому, здесь сказывается частью подражание арифметике, частью пристрастие к старой симметрии учебного плана, частью переоценка словесных задач как средства умственного развития и недооценка самой „чистой математики“. Позволительно, однако, усомниться, чтобы расположение задач, требующих применения для своего решения математической техники, которое уместно в отношении всех учеников от III до VI группы, было пригодно в отношении даже трети их в IX группе. К тому же расположение „техника — применение — техника — применение“ не является наилучшим и в отношении указанных групп. В настоящее время здесь все более прививается обычай нарушать это расположение введением упражнений, распределенных попредметно, например: „Заработок и расходы“, „План дома“, „Школьный сад“ и т. д. В VII и VIII группах в настоящее время широко применяются разделы специальных упражнений, касающихся вложения капиталов, страхования, заработной платы, накладных торговых расходов и т. д.

Поэтому возможно, что непосредственное применение каждого приобретенного технического навыка к решению соответствующих устных задач следует заменить изучением общего большого раздела, трактующего о решении задач, в котором мы могли бы показать учащимся, что каждое число или числа, которые можно определить на основе некоторых данных, могут быть найдены путем составления и решения уравнения или уравнений, использующих эти данные. Этот раздел следовало бы изучать после того, как ученики усвоили сложение, вычитание, умножение и деление буквенных выражений, включая действия над сложными дробями, и до того, как они приступили к систематическому изучению функции $y = ax + b$ или квадратных уравнений. При этом не было бы большой беды в том, что некоторые задачи приводили бы к квадратным или даже кубическим уравнениям; учащиеся могли бы составлять подобные уравнения, откладывая решение их до приобретения соответствующих технических навыков. К этому вопросу, равно как и вопросу о переоценке словесных задач и недооценке „чистой математики“, мы еще вернемся впоследствии.

Впрочем, все эти вопросы представляются нам имеющими меньшее

значение, чем общее положение, кажущееся бесспорным психологу, именно, что наибольшую педагогическую ценность при решении устных задач имеет составление подходящих уравнений, поскольку решение последних почти не отличается от решения аналогичных уравнений, встречаемых в готовом виде в руководствах. Если поэтому задачи даются в основном для того, чтобы научить учащихся правильно составлять уравнения, то нам не следует особенно заботиться о том, какие технические навыки необходимы для решения последних. К тому же, давать большое число задач на составление уравнений после изучения каждого отдельного технического навыка, в которых последний находил бы непосредственное применение, нежелательно, так как это заставляет учащихся предполагать, что в задачах будет встречаться какая-то одна формула уравнения, от которой они и будут стремиться исходить при решении задачи в большей степени, чем от ее данных. Наилучшие результаты дает обычно решение „смешанных задач“.

Во избежание недоразумений отметим, что составление уравнений и решение их хотя бы через месяц мы отнюдь не считаем педагогически равноценным одновременной работе над уравнениями; равным образом мы не утверждаем, что решение готовых уравнений столь же полезно, как составляемых самими учениками; мы хотели только подчеркнуть, что особая ценность словесных задач заключается в составлении, а не решении соответствующих уравнений и что при выборе и расположении их этим положением надо руководствоваться в большей степени, чем желанием показать на них применение различных видов алгебраического счисления.

Оригинальные и шаблонные задачи.

По вопросу о том, как надо подходить к решению задач, — пользуясь ли трафаретными методами, приложимыми к задачам определенного типа, или рассматривая каждую задачу как оригинальную, мы стоим на той точке зрения, что при прочих равных условиях второй подход полезнее. Изучение методов решения типовых задач желательно только в отношении некоторых из них, имеющих значительную ценность и безусловную реальность. Признавая за решением задач большое значение в деле общего развития способностей учащихся, мы считаем, что одним из лучших путей в этом направлении является решение задач как оригинальных, при условии оказания помощи тем из учащихся, которые испытывают в этом нужду и после затраты определенных усилий.

Переоценка словесных за- дач.

Одной из причин высокой оценки решения словесных задач является смешение их значения как учебной работы с их значением как тестов и непонимание того, что именно испытывается посредством этих задач. Способность использовать ряд данных для составления уравнения или системы уравнений, решение которых дает желаемый ответ, весьма близко соответствует общему развитию учащихся; школьники, хорошо выполняющие эту работу, обычно выделяются по своему развитию и учебным успехам. Отсюда можно как будто заключить, что занятие словесными задачами создает и укрепляет общее развитие. Однако такой вывод не совсем правилен. Способность подставлять недостающие слова в предложениях также является прекрасным тестовым материалом для оценки

общего развития; однако мы не вводим соответствующих упражнений в учебную программу как средства содействия общему развитию учащихся.

Многие защищают широкое применение словесных задач, исходя из того, что решение их требует не только навыка в алгебраическом счислении, но и понимания текста задач, каковое имеет большое значение для общего развития учащихся. Конечно, внимательное чтение тысячи кратких предложений и выполнение тысячи последующих вычислений имеет определенную педагогическую ценность. Но все же главное значение имеет не чтение и понимание текста как такового, а составление уравнений, решение которых давало бы требуемые ответы, причем это значение в весьма большой степени зависит от реальности и полезности предлагаемых ученикам задач.

Применение задач для обоснования необходимости введения некоторых приемов, ознакомления с ними, а также укрепления и испытания способности пользоваться ими.

При прочих равных условиях представляется желательным показывать ученикам необходимость введения новых, еще неизвестных им приемов и ознакомливать их с последними до приступа к систематическому изучению этих приемов; это способствует лучшему пониманию и большему интересу изучения их. Положение это считается в педагогике бесспорным и применяется в целом ряде учебных предметов, в частности в арифметике¹. Поэтому хорошим введением, например, к изучению в алгебре отрицательных чисел может явиться определение средней температуры за ряд дней, когда она была и выше и ниже нуля, а также средней отметки за успеваемость из положительных и отрицательных частных отметок. Введением к правилу: „—, деленный на —, дает +“ могут служить хотя бы такие упражнения:]

Четверо мальчиков получили следующие отрицательные отметки за физическую силу по сравнению со средней для их возраста:

Артур — 20,	Фрэд — 4,
Джон — 12,	Вилли — 8.

Представьте недостающие числа:

Отметка Артура в	раза ниже отметки Джона.
Отметка Артура в	раз ниже отметки Фрэда.
Отметка Артура в	раза ниже отметки Вилли.
Отметка Джона в	раз ниже отметки Фрэда.

Следует оговориться, что вводные упражнения не являются здесь задачами, обязательно требующими составления и решения уравнений, и относятся не только к группе II—B—2, но и группам I и II в целом.

Прочие условия, однако, не всегда бывают равными. Так, может не найтись жизненных и интересных задач, которые можно было бы использовать в качестве подготовительного материала; по мнению автора, это имеет, например, место при подходе к изучению дробных показателей. В других случаях отыскать такие задачи, вообще говоря, возможно, но объяснение их потребует затраты большего количества времени,

¹ См. Э. Л. Торндайк, Психология арифметики, перевод А. С. Долговой, под ред. Д. Л. Волковского, 1932 г., гл. XIV. В этом вопросе между арифметикой и алгеброй большого различия нет.

чем его будет сбережено при применении их. Иногда же прием сам по себе настолько внутренне ценен и интересен, что простое соприкосновение с ним дает желаемый педагогический результат. Так, способные ученики, вероятно, скорее усвоят, что $\sqrt{a} \sqrt{a} = a$, путем непосредственного рассмотрения выражений $(\sqrt{4} \sqrt{4})$, $(\sqrt{16} \sqrt{16})$, $(\sqrt{3} \sqrt{3})$ и т. д., чем путем решения вводных задач, иллюстрирующих необходимость знания, что произведение корня квадратного из какого-либо числа на корень квадратный из того же числа равно этому числу.

Критерии выбора задач.

Задачи решаются в школе для того, чтобы обеспечить решение их в жизни. При прочих равных условиях задачи, базирующиеся на реальных положениях, лучше, чем задачи, в которых положение описывается на словах; задачи, которые могут встретиться в действительной жизни, лучше, чем выдуманные и фантастические; задачи, требующие составления уравнений на основе положений, реальных или описываемых на словах, лучше, чем задачи, требующие по преимуществу решения готовых уравнений. Сказанное относится ко всем перечисленным ранее группам упражнений, а не только к задачам группы II—B—2.

Выше мы уже отмечали, что при выборе задач следует отдавать предпочтение тем из них, которые, требуя для решения алгебраических методов, имеют внутреннюю ценность сами по себе, и не очень заботиться о подыскании задач, которые обязательно иллюстрировали бы применение дробных уравнений, системы линейных уравнений и т. д. Если нет реальных и ценных задач, которые требовали бы составления и решения уравнений при помощи определенного технического приема, то можно или вовсе не применять их к решению готовых словесных задач, или пользоваться такими задачами, как „я задумал два числа“ и т. д., не претендующими на мнимую реальность.

В этом отношении весьма показательно изучение системы квадратных уравнений. В прежнее время последние прилагались к решению специально изобретаемых задач, в которых требовалось определять размеры поля, имеющего то одну, то другую площадь в зависимости от изменения этих размеров. В настоящее время мы начинаем изучение с определения постоянных величин квадратного уравнения по данным величинам x и y для некоторых точек кривой; следующим этапом является решение таких вопросов: „Пусть ... и ... — две кривые. Пересекаются ли они? Если да, то в каких точках?“ Нельзя сказать, чтобы подобного рода задачи часто встречались в жизни и были бы особенно нужны для обучающихся в школе девятый или десятый год, за исключением специализирующихся в области физико-математических дисциплин. Если поэтому реальные задачи, требующие для решения применения системы квадратных уравнений, в данный момент не могут представить интереса для учащихся, то можно отложить изучение этого применения до более подходящего времени.

Задачи как тесты.

Задачи, которыми мы пользуемся при обучении алгебре, должны быть реальными и применимыми в жизни; такими же задачами следует пользоваться и в тестах для испытания способности преобразовать данные условия в уравнения, дающие требуемый ответ. Это положение, ясное само по себе, подкрепляется

еще тем соображением, что характер испытаний оказывает значительное влияние на весь ход преподавания предмета. Последнее обстоятельство заставляет нас также с осторожностью относиться ко включению в тесты таких допустимых, вообще говоря, „оригинальных“ алгебраических задач, как определение расположения стрелок часов, нахождение числителей и знаменателей по различным комбинациям их суммы, разности, произведения, частного и т. д., которые мы исключаем из курса как средство обучения математике, если можем найти лучший учебный материал.

Действительные и изображаемые положения.

Выше мы уже отметили, что способность решать задачи, встречающиеся в жизни, не обязательно совпадает со способностью решать аналогичные задачи, приводимые в руководствах. Весьма часто данное положение, совершенно ясное и понятное для человека, имеющего соответствующий опыт, становится запутанным и туманным при словесном описании его; с другой стороны, реальные положения часто сбивают с толка учеников, привыкших решать соответствующие задачи в упрощенной формулировке. Поэтому на подыскание действительных положений, в которых алгебра находит применение, следует обращать самое серьезное внимание. Так, наряду с решением словесных задач о дополнительных углах следует предложить учащимся провести две пересекающиеся прямые и определить величину всех четырех углов путем изменения одного из них. Подобные упражнения не только подготавливают учащихся к решению задач в том виде, в каком они действительно встречаются в жизни, и страхуют от излишних словесных толкований, но часто способствуют возрастанию интереса и уважения к алгебре.

Рекомендуя эти упражнения, мы должны, впрочем, ввести некоторые оговорки. На черчение, измерение, взвешивание и т. д. не следует затрачивать слишком много времени. Вместо „реальных положений“ мы часто вправе применять заранее вычерченные планы, таблицы уже измеренных величин, записи уже произведенных наблюдений и т. д. Далее в алгебраических задачах гораздо чаще, чем в арифметических, встречается предсказание того, что произойдет, если данные условия будут выполнены, или указание того, что надо сделать, чтобы процесс протекал так, как это требуется; в этих случаях развитие ясного понимания словесных описаний является вполне жизненной задачей; таковы, например, задачи на смеси и сплавы, отыскание величины d , которая относилась бы к c , как b относится к a , построение прямоугольников по данной площади и соотношению размеров и т. д.

Отдельные и сгруппированные задачи.

Группирование задач по зависимости их от каких-либо научных, технических, промышленных и других факторов в особые разделы, например, *падение тел, сплавы, скользящая шкала заработной платы* и т. д., имеет большие достоинства: 1) положения однородны и потому легче для понимания; 2) логичность и реальность задач обеспечены; 3) данные, необходимые для решения всех задач, могут быть даны все сразу, так что при решении каждой задачи ученик должен сам выбрать данные, необходимые для составления соответствующих уравнений. При

преподавании арифметики отдельные, обособленные задачи сохраняются только в тестах, обзорах пройденного и упражнениях в живости и находчивости. Повидимому, при достаточном внимании и искусстве арифметические задачи можно группировать указанным образом без какого-либо ущерба для чисто арифметических навыков. По тому же пути следовало бы идти и при преподавании алгебры, так как от него можно ожидать хороших результатов.

Задачи, требующие выбора данных.

Возможность выбора учащимися данных, необходимых для составления и решения задач, мы только что отметили как одно из существенных достоинств группирования задач; преимущество же этого выбора по сравнению с составлением задач на основе ровно того количества данных, которое достаточно и необходимо для этого процесса, нами уже было указано выше. Поэтому здесь нам остается только подтвердить, что упражнения, при которых учащимся приходится самим выбирать данные, гораздо поучительнее и жизненнее, чем составление уравнений, при котором используются только готовые уже данные.

Задачи, требующие отыскания недостающих данных.

Многие задачи, которые приходится решать ученикам, не содержат некоторых данных, которые должны быть известны учащимся наперед, как хотя бы тот факт, что $1\text{ м} = 100\text{ см}$, а квадрат ограничен четырьмя равными сторонами, или должны быть отысканы в таблицах, помещенных в конце учебника алгебры, других руководствах или таблицах соответствующих измерений и наблюдений. Оставляя в стороне данные первого рода, остановимся на вторых. Конечно, отыскание их представляет известные затруднения; однако оно приближает условия, при которых задачи решаются в школе, к тем условиям, которые фактически существуют в науке, промышленности и торговле. Если мы организуем занятия таким образом, что будем спрашивать учащихся, „какие еще данные нужны вам для решения задачи“, и будем распределять работу по отысканию их между ними, то результаты будут полезны для всех, занятия же не потребуют затраты большого количества времени. Покончив с этого рода занятиями, связанными со словесными задачами, мы можем двигаться далее без каких-либо затруднений.

Задачи, требующие общего решения.

С точки зрения психолога современное изучение решения алгебраических задач грешит преобладанием задач, в которых требуется установить какой-либо частный случай на основе данных частных положений, над задачами, в которых ищется общее соотношение между изменениями одной данной величины и изменениями других величин, как-либо связанных с первой. Мы уже неоднократно указывали, что главным достоинством алгебраических занятий является возможность научить учащихся составлять общие правила для получения ответа к *любой* задаче данного вида и выражать эти правила, пользуясь буквенными обозначениями, с исключительной краткостью и ясностью. Что же мы наблюдаем при обучении алгебре в настоящее время? Обычно после затраты больших усилий на усвоение учащимися, что под каждой буквой подразумевается *любое число*, и на развитие навыков в алгебраическом счислении принимаются за задачи,

в которых буквенные обозначения почти не встречаются и которые отличаются от арифметических задач только наличием отрицательных чисел и буквы x вместо словесной формулы „то, что я должен найти“. Равным образом, после немногочисленных упражнений в применении букв для обозначения „таких-то и таких-то чисел“, чтении и составлении формул учащиеся снова обращаются к чистому алгебраическому счислению над буквами, при котором значение последних как символов отходит совершенно на задний план. Неудивительно поэтому, что учащиеся часто считают алгебраическое счисление простой игрой в $a, b, c, d, +, -, \times, : и ()$.

Мы полагаем, что было бы весьма целесообразно придавать задачам указанной выше группы II—B—2 ту форму, которую имеют задачи группы II—B—I, побуждая учащихся составлять общие уравнения или формулы, позволяющие решать любую задачу данного вида и находить соответствующие частные ответы при данных частных условиях; задача, приведенная в схеме как пример упражнений группы II—B—I и группы II—B—2, поясняет сказанное. Этот переход от одного вида задач к другому является столь же естественным, как переход от чисел к буквам или от выражений $2 \times 2 = 2^2$, $3 \times 3 = 3^2$ и т. д. к выражениям $a \times a = a^2$, $a(b + c) = ab + ac$ и т. д. Среди задач, требующих общего решения в виде буквенных формул, особенно важное значение имеют задачи на прямую и обратную пропорциональность, задачи, в которых одна из величин пропорциональна квадрату или квадратному корню другой величины, и другие задачи, касающиеся линейной и квадратной зависимости.

Задачи-загадки и головоломки.

Задачи, которые ранее давались учащимся, носили обычно характер загадок и головоломок. Примером может служить определение возраста Диофанта по следующей эпитафии: „Одна шестая жизни Диофанта приходилась на его детство, одна двадцатая — на юность и одна седьмая, сверх того, на период до его женитьбы; через пять лет после женитьбы у него родился сын, который умер за четыре года до смерти отца в возрасте, составлявшем половину возраста последнего в момент его смерти“. Нельзя отрицать, что подобного рода задачи отвечают некоторым человеческим интересам. В самом деле, удовольствие от того, что мы делаем что-то хорошо и лучше, чем другие, часто бывает сильнее удовольствия от того, что мы можем впоследствии воспользоваться плодами наших трудов. К тому же многим задачам этого вида можно придать форму, хорошо стимулирующую мышление. При преподавании алгебры подобного рода задачи гораздо более уместны в отношении избранной группы успевающих учеников, перед которыми открывается дорога для продолжения образования, чем при преподавании арифметики, когда ими приходилось бы заниматься всем ученикам. Однако обычные применения алгебры в науке, технике, промышленности и обыденной жизни все же лучше обеспечивают прохождение курса алгебры и вселяют в учащихся большее расположение и уважение к математике, чем интерес, возбуждаемый загадками и головоломками.

При пользовании задачами-загадками лучше всего придавать им отвлеченную форму, например: „Когда a^2 меньше a^2 “, „Когда l , деленное на a , больше a^2 “, „При каком условии $\frac{a}{b}$ равно $\frac{b}{a}$ “, „При каком

условии abc равно a^2 ?" Одним из наилучших способов использования интереса к таинственным вычислениям является побуждение учащихся составлять формулы для разгадки таких, например, математических фокусов: „Задумайте любое число, а я вам его назову. Задумайте число; прибавьте к нему 3; умножьте результат на 7; вычтите 20; скажите мне результат. Вы задумали число...“ (Число находится путем вычитания из объявленного результата единицы и деления разности на 7). Далее можно показать применение формулы $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ для быстрого перемножения таких чисел, как 2998 и 3002 или 4980 и 5020. Формула для определения суммы членов арифметической прогрессии может быть применена для быстрого определения этой суммы как в случае полных рядов, так и рядов с недостающими членами, например: „Найдите сумму натурального ряда чисел от... до..., в котором нет... и...“ Впрочем, для применения формулы $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$ можно найти лучший материал.

Как уже было отмечено выше, главным недостатком подобного рода задач является то, что описываемые условия и явления придают им характер жизненных задач, каковыми они в действительности не являются. Если же показать ученикам их действительную сущность и предоставить учащимся право выбора решения задач-загадок или же реальных задач, то повредить они не смогут.

Выбор задач учащимися. Многие затруднения, возникающие при прохождении решения задач, могут быть значительно ослаблены, если мы предоставим учащимся право самим выбирать задачи для решения, давая им, например, в пять раз большее число задач, чем должен решить каждый учащийся. Мы только что отметили целесообразность предоставления учащимся возможности делать выбор между жизненными задачами и задачами-загадками; выше мы указывали, что задачи, почерпнутые из области физики, имеют весьма различную ценность, в зависимости от того, изучает ли учащийся специально физико-математические дисциплины или же нет. Все это говорит за то, что учащимся следует разрешать выбирать более легкие задачи, иногда же и побуждать их к этому хотя бы в такой форме: „Выберите десять наиболее трудных задач, решение которых вы считаете для себя посильным“.

Выводы. Преобразование данных существенных положений, требующих количественного определения, в уравнения и решение последних представляют собою ценное знание; не менее полезно также знать, что любой количественный вопрос, как бы сложен и запутан он ни был, может быть выражен уравнением, если только имеются подходящие данные. Однако педагогическая ценность соответствующей работы даже при условии внесения в нее улучшений, изложенных в настоящей главе, значительно уступает ценности работы по составлению общих уравнений или формул для решения *любой* задачи данного вида. Уметь обозначить через x или q неизвестную величину и выразить данные, пользуясь соотношениями их с первой величиной, полезно; но еще полезнее уметь выразить в общей форме ряд данных соотношений; последнее знание, насколько может предвидеть психолог, будет более содействовать и развитию других способностей. Алгебраические

задачи достигнут полной педагогической ценности лишь тогда, когда они будут превосходить арифметические задачи настолько же, насколько алгебраическое счисление превосходит арифметическое.

ГЛАВА VI.

ИЗМЕРЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ.

Изложение этого вопроса мы начнем с рассмотрения тех инструментов, которые применяются в настоящее время для измерения алгебраических способностей, т. е. тестов, и остановимся в первую очередь на тестах Рогга-Кларка (Rugg and Clark, 1917) и Гоца (Hotz, 1918). Первые из них предназначены для измерения способности в счислении, включая решение простейших квадратных уравнений, и построены следующим образом.

Тест 1. Приведение членов.

6 серий по 4 примера; на решение каждой серии дается 4 минуты.

1. $5x^2 + 3 - 3x^2 - 2 - 7x^2 - 5$. 3. $-6y^3 - 8y + 4y^3 + 3y + 2y^3 + 7y$.
2. $2a + b - 6a - 5b - 3a - 2b$. 4. $-3mn - 2p + 7mn + 5p + 4mn + 3p$.

Тест 2. Подстановки.

4 серии по 5 примеров; 4 минуты.

1. Если $x = 4$ и $y = 2$, то чему равно $2x^2 - 3xy$?
3. Если $a = 2$ и $b = 5$, то чему равно $ab^2 - 2ab$?
5. Если $x = 3$ и $y = 5$, то чему равно $x^2 + 2x^2y$?

Тест 3. Вычитание.

7 серий по 3 примера; 4 минуты.

1. От $2a + 3b$ отнимите $5a + 4b - 8$.
2. Отнимите $4x + 2y$ от $2x - y + z$.
3. Вычтите $3r - 5s + 10t$ из $r + s + 4t$.

Тест 4. Простейшие уравнения.

5 серий по 5 примеров; 4 минуты.

1. $2x + 3 = 11$. 3. $5x - 3 = -20$.
2. $4c = 6c + 12$. 5. $12x - 7 - 15x = 10$.

Тест 5. Скобки.

7 серий по 6 примеров; 2 минуты.

1. $6(3x + 8)$. 4. $-4(3x - 4)$.
2. $5(4x - 2)$. 5. $9(-7x - 1)$.
3. $-3(8x - 3)$. 6. $-8(-4x - 7)$.

Тест 6. Особые случаи умножения.

6 серий по 4 примера; 3 минуты.

1. $(2x - 3)^2$. 3. $(a - 4)(a + 5)$.
2. $(3m + n^2)(3m - n^2)$. 4. $(5x + 1)(x + 3)$.

Тест 7. Степени.

6 серий по 6 примеров; 2 минуты.

1. $a^3 \cdot a^5$. 3. $(n^2)^3$. 5. $(ba^3)^4$.
2. $5x^7 \cdot 6x^5$. 4. $\frac{c^3}{c^2}$. 6. $x^7 \cdot x$.

Тест 8. Разложение на множители.

5 серий по 5 примеров; 4 минуты.

1. $5x^2 + 15x^3$.
2. $a^2 - 64$.

3. $y^2 - 6y + 9$.
4. $b^2 + 1b + 28$.

Тест 9. Освобождение от дробей.

14 серий по 4 примера; 5 минут.

Освободите уравнения от дробей, но не решайте их.

1. $\frac{x-3}{x-4} = \frac{x+2}{x+7} + \frac{3x}{x^2+3x-28}$.
2. $\frac{5}{x-4} - \frac{x-4}{4} = 0$.

3. $\frac{2x-7}{5} - 2 - \frac{3x-8}{3x} = 0$.
4. $4a - \frac{2a-5}{9} = -7$.

Тест 10. Дробные уравнения.

5 серий по 4 примера; 9 минут.

1. $\frac{4x+2}{3} - \frac{x-3}{4} = 0$.
2. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{5}{3}$.

3. $\frac{4}{3+x} - \frac{2}{1+x} = 0$.
4. $\frac{x+8}{x+9} = \frac{x-5}{x-7}$.

Тест 11. Формулы.

4 серии по 6 примеров; 5 минут.

1. $P = ahw$, определить h .
2. $c = \frac{s}{R}$, определить R .
3. $E = \frac{PL}{K}$, определить P .

4. $L = \frac{Mt-g}{t}$, определить M .
5. $J = \frac{bd^3}{3}$, определить b .
6. $E^2 = \frac{JWhr}{t}$, определить h .

Тест 12. Квадратные уравнения.

7 серий по 4 примера; 7 минут.

1. $x^2 - 81 = 0$.
2. $y^2 + y = 6$.

3. $n^2 - 7n = -12$.
4. $x^2 + 5x = 6$.

Тест 13. Системы линейных уравнений.

5 серий по 3 примера; 12 минут.

1. $2x + y = 10$;
 $3x - 2y = 1$.

2. $2x = 3y + 3$;
 $5x + 3y = 9$.

3. $4n - 2r = 0$;
 $3n + 5r = 13$.

Тест 14. Корни.

7 серий по 3 примера; 3 минуты.

Придайте корням простейший вид:

1. $\sqrt{8}$.
2. $\sqrt{a^3b^4}$.
3. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Поскольку в каждом из этих тестов однотипные примеры повторяются от 4 до 7 раз, имеется полная возможность отличить случайные ошибки, обусловливаемые небрежностью, от действительного незнания приема и неспособности выполнить данную работу; в отношении каждой серии примеров указано время, даваемое на решение их. Таким

образом эти тесты предназначены в основном для определения быстроты и точности в алгебраическом счислении. Можно, конечно, и увеличивать время, предоставляемое для решения каждой серии примеров, требуя одновременно наибольшей точности решения, и устанавливать этим путем желательное соотношение между быстротой и точностью в работе.

Интересно отметить, какие виды упражнений не включены в эти тесты. Таковыми являются между прочим: скобки в скобках, деление на многочлен, умножение многочленов, отличное от вида $(ax + b)(cx + d)$, разложение на множители алгебраических выражений, отличных от одночленов $x^2 - y^2$ и произведений $(ax \pm b)(cx \pm d)$, сложные дроби. Таким образом эти тесты предназначены в большей степени к измерению навыков в применении некоторых алгебраических приемов к простейшим случаям, чем к оценке всего запаса навыков в счислении или способности учащегося надежно применять эти навыки к выполнению длинных упрощений или же проявлять остроумие в выполнении сокращений.

Здесь уместно поставить вопрос: в какой мере способность выполнять примеры в том виде, как они даются в тестах Рогга-Кларка, соответствует способности учащегося выполнять те же по существу примеры, но данные в несколько измененной или усложненной форме? Так, например, если ученик правильно решает примеры $(3m + n^2)(3m - n^2)$ теста 6 или $6(3x + 8)$ и $-3(8x + 3)$ теста 5, то решит ли он правильно примеры $(3m - n^2)(n^2 + 3m)$ и $6(3x + 8) - 3(8x + 3)$? Мы знаем, что вообще всякое изменение положения, как бы незначительно оно ни было, оказывает некоторое неблагоприятное влияние на связь между этим положением и реакцией на него. Так, например, способность сложить числа 6, 8 и 3, написанные в виде столбца, не гарантирует способности выполнить сложение $3 + 8 + 6$. Знание того, что $9 \times 7 = 63$, $6 \times 7 = 42$ и $42 + 6 = 48$, не обеспечивает умения выполнить умножение $69 \times 7 = 483$; ученик может оказаться неспособным найти 42, будучи смущенным новой помехой в виде необходимости удерживать в уме число 6, которое надо к чему-то прибавить. Чтобы тест являлся действительно совершенной описью способностей, повидимому, необходимо, чтобы каждая способность испытывалась не только изолированно, но и в некотором обычно встречающемся сочетании, если это сочетание может оказывать неблагоприятное влияние на способность. Сказанное не следует понимать как критику тестов Рогга-Кларка; автор считал необходимым предостеречь читателей от возможных неправильных выводов и привлечь их внимание к одному из основных принципов измерения способностей.

Второй общий принцип связывается с указаниями, даваемыми учащимся при выполнении теста, и заголовками, содержащими такие указания. Тесты Рогга-Кларка измеряют совокупность некоторых алгебраических навыков и понимания некоторых условных словесных выражений, принятых в алгебре. Так, в тесте 1 требуется понимание выражения „приведение членов“, в тесте 11 требуется знать, что „определить h “ обозначает „найти, чему равно h “, в тесте 13 надо знать, что заголовок „системы линейных уравнений“ выражает требование найти значения x и y для каждой пары помещенных ниже уравнений и т. д.

Вообще говоря, измерение способности в счислении желательно возможно резче отграничить от измерения знания условных терминов

и выражений. В самом деле, все мы, вероятно, признаем, что выражение „преобразуйте формулу $P = ahw$ так, чтобы она была удобна для вычисления h “, может сбить с толку многих учеников, способных прекрасно выполнить самый прием, хотя по существу оно ничем не хуже, чем выражение „определите h “. При применении навыков пользование ради краткости терминами вроде „упростить“, „решить“ и т. д., конечно, совершенно законно, равно как и предположение, что ученик знает, что ему надо делать, скажем, с системой линейных уравнений. Однако в тестах, предназначенных для измерения тех же навыков, где краткость имеет гораздо меньшее значение, чем ясность, и где сравнению подвергаются учащиеся, могущие иметь различную подготовку в отношении терминов и приемов, испытание способности в выполнении действий желательно проводить отдельно от способности понимать, какое действие требуется выполнить.

Переходя к тестам Гоца, отметим, прежде всего, что они предназначены для измерения элементарных алгебраических способностей в целом, включая наряду со счислением решение уравнений и обращение с графическими изображениями. Ниже приводятся примеры, характеризующие эти тесты.

Тесты Гоца.

Сложение и вычитание:

1. $4r + 3r + 2r$.
5. $7x - x + 5 - 4$.
10. $8c - (-6 + 3c)$.

15. $\frac{1}{a-x} - \frac{3x}{a^2 - x^2}$.
24. $\frac{a}{a-2} - \frac{a-2}{a+2} + \frac{3}{4-a^2}$.

Умножение и деление:

1. $3 \cdot 7y$.
5. $\frac{2}{3}$ от 9 m .
10. $\frac{4x^4}{5} : 2x^2$.

20. $\frac{p^2 + 4p - 45}{p^2 + 2p + 4} \cdot \frac{p^3 - 8}{p^2 - 81} \cdot \frac{1}{3pr - 15r}$.
23. $\frac{3\sqrt{6a}}{2a\sqrt{18}} \cdot \sqrt{12a}$.

Уравнения и формулы:

1. $2x = 4$.
5. $7n - 12 - 3n + 4 = 0$.
10. $\frac{2x}{3} = \frac{5}{8}$.

15. $\frac{4}{3-x} = \frac{2}{1+x}$.
20. $\frac{2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{3}{x^2 + 3x + 2}$.
25. $\sqrt{x^2 - 1} - x = -1$.

Задачи.

1. Если один костюм стоит x руб., то сколько стоят 3 костюма?
5. Расстояние по железной дороге между Нью-Йорком и Чикаго равно 1570 км. Во сколько времени проходит это расстояние поезд, идущий со скоростью v километров в час?

10. Вышка отбрасывает тень длиной в 6 м; в то же самое время человек ростом в 1,75 м отбрасывает тень длиной в 0,81 м. Найти высоту вышки.

14. Коробка без крышки сделана из квадратного куска картона путем вырезывания по углам квадратов со сторонами по 5 см и соответствующего сгибания картона. Каковы размеры взятого куска картона, если вместимость коробки равна 180 см³?

Графические изображения.

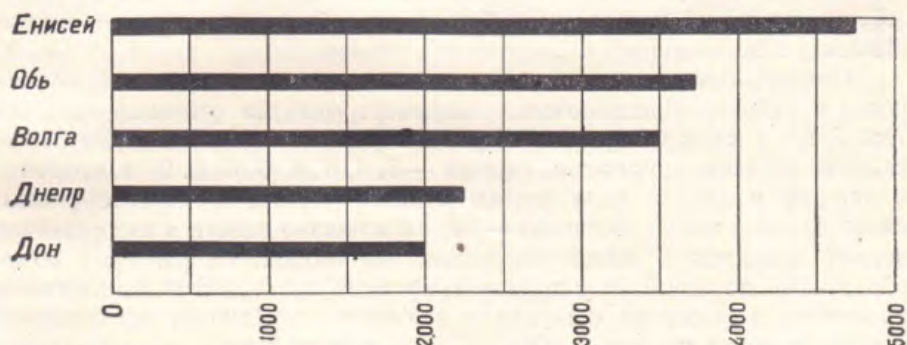
1. Следующая диаграмма показывает в километрах длину некоторых рек. Какова приблизительная длина в километрах Енисея, Волги и других рек?

2. Один рабочий поступил на жалование в 12 руб. за первую пятидневку и получает прибавку по 25 коп. каждую пятидневку; другой рабочий поступил на жалование в 9 руб. за первую пятидневку и получает прибавку по 50 коп. каждую пятидневку.

Пользуясь клетчатой бумагой, составьте диаграмму, показывающую жалование того и другого рабочего в начале каждой из пятнадцати недель.

Пользуясь вычерченной диаграммой, найдите, когда сравняется жалование обоих рабочих.

Тесты Гоца отличаются от тестов Рогга-Кларка как по видам упражнений, ими охватываемых, так и по характеру примеров: первые содержат одновременно и более легкие и более трудные примеры, чем вторые. Расположение примеров по степени их трудности базируется



Фиг. 8.

на эмпирических данных: трудность эта определяется процентом учащихся данной группы, не могущих решить того или иного примера. Следует заметить, что относительная трудность является функцией как принятой системы преподавания алгебры, так и сущности самого упражнения. Поэтому и расположение примеров по степени их трудности со временем должно меняться. Так, например, когда Гоц стандартизировал свои тесты, то его пример 14: „ $3m + 7n = 34$; $7m + 8n = 46$ “ был значительно легче, чем пример 17: „определите величину M , пользуясь формулой $RM = EI$ “; в настоящее же время ученики, проходившие алгебру по книге I „Упражнений“ Нонна, конечно, сочтут второй пример более легким, чем первый.

Несмотря на некоторую условность, распределение упражнений по степени их трудности имеет большое значение, и соответствующие „тесты-лестницы“ обладают существенными достоинствами. Прежде всего, они позволяют определить, какой степени трудности работу может достаточно надежно выполнять данная группа или отдельный ученик. Так, предположим, что при выполнении группой теста в сложе-

нии и вычитании были получены следующие проценты правильных ответов для отдельных примеров:

№ примеров	Проценты	№ примеров	Проценты
1	95	13	95
3	90	15	80
5	100	18	75
9	95	22	65*
10	95	23	45
12	100	24	20

Совершенно ясно, что группа обладает надежным знанием сложения и вычитания в пределах первых тринадцати примеров. Между знанием $\frac{n}{2}$

вещей и полужнанием n вещей существует большая разница; „тесты-лестницы“ указывают нам, сколько и каких именно вещей знает группа.

Далее они позволяют нам непосредственно и с небольшой затратой времени определять знания, колеблющиеся в широких пределах. Известно, что индивидуальные способности и достижения учащихся, изучающих алгебру, весьма различны. Если поэтому мы дадим им десять примеров приблизительно одной и той же степени трудности, то некоторые из учеников решат правильно все их, тогда как другие не осилят ни одного. „Лестницы-тесты“ позволяют избежать подобных недифференцированных оценок „совершенного“ и „нулевого“ знания.

Наконец, они помогают нам отличать отсутствие знания от небрежности в работе. Предположим, например, что два ученика, выполняя тест Гоца в сложении и вычитании, получили при пяти примерах на каждую ступень трудности: первый — 5, 3, 4, 4, 5, 4, 5, 0, а второй — 6 пятерок и два 0. Хотя сумма отметок у того и другого ученика равна одной и той же величине — 30, но качество работы у них различно: первый значительно менее аккуратен, чем второй. Небрежность можно обнаружить по ошибкам в примерах, которые легче других, выполняемых правильно, а также по ошибкам в примерах, одинаковых по трудности с выполняемыми правильно. Оба признака существенны: „тесты-лестницы“ используют преимущественно первый из них, а тесты Рогга-Кларка — второй.

В отношении некоторых задач в тестах Гоца должна быть отмечена нереальность положений; таковыми мы считаем, например:

$$\frac{3-2x}{(x-1)^3} + \frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1};$$

$$\frac{6x-2}{x+3} - 3 = \frac{3x^2+13}{x^2-9};$$

$$\frac{c^3-d^3}{(c-d)^2} \cdot \frac{c-d}{c^2+d^2};$$

$$\sqrt{x^2-1} - x = -1.$$

Золотые часы стоят в 10 раз дороже, чем серебряные; те и другие часы стоят вместе 528 руб. Сколько стоят каждые часы?

На представление в цирке было продано всего 836 билетов. Число билетов, проданных взрослым, было на 136 меньше удвоенного числа билетов, проданных детям. Сколько тех и других билетов было продано?

Площадь прямоугольника равна площади квадрата. Основание прямоугольника на 12 см длиннее, а высота на 4 см короче стороны квадрата. Определить размеры обеих фигур.

При применении тестов мы должны, вообще говоря, стремиться к тому, чтобы измерять способность в счислении и решении задач при помощи таких примеров и задач, которые встречаются в реальной жизни.

Ценность тестов, применяемых для измерения алгебраических способностей, значительно возрастает, если они составляются в некотором числе различных форм, приблизительно равных по трудности, так, чтобы ими можно было измерять и уровень познаний и успехи, достигнутые по сравнению с прошлым. В тех случаях, когда измерение алгебраических способностей служит одновременно целям определения успеваемости, проставления отметок и т. д., необходимо и большое число соответствующих сходных форм. Тесты 1—14 Рогга-Кларка легко допускают подобного рода расширение, тесты Гоца требуют для той же цели гораздо больше изобретательности и затраты труда.

В качестве третьего вида тестов мы рассмотрим одну из многочисленных сходных форм, каждая из которых:

1) включает измерение почти всех алгебраических способностей, 2) имеет почти одинаковую трудность со всеми прочими формами, 3) дает абсолютно объективную оценку и 4) позволяет проводить испытания, совершенно отвлекаясь от руководств или, наоборот, полностью примыкая к ним. Эти формы были разработаны как опытные Институтом по изучению вопросов образования при Учительском колледже; каждая из них дает приблизительную оценку почти всем существенным способностям, но никакие две из них не содержат оценки в точности одних и тех же способностей. Они особенно удобны для определения не особенно высоких способностей и не предназначаются для точной оценки очень хороших способностей и математических дарований; однако и эти последние они оценивают лучше, чем может показаться с первого взгляда. Для выполнения каждого теста из двух частей дается 180 минут; нормой является полусумма отметок, исчисляемых по следующей схеме для 40 примеров первой части теста и 20 примеров второй:

Отметка	Часть и № примера
1	I — 1, 8, 10 и 15
2	I — 9, 11 — 14, 16 — 27 и II — I
3	I — 28, 33, 38 и II — 2, 3, 4
4	I — 29, 31 — 32, 34
5	I — 35, 36, 37, 39 — 40 и II — 5
6	I — 30 и II — 6, 11 — 13
7	II — 8, 9
8	II — 7, 14 — 20

Пример 10-й получает отметку 6,3 или 0, в зависимости от получения соответственно трех, двух, одного (или ни одного) правильного решения.

Алгебраические тесты Института.

Часть I; форма А.

90 минут.

- | | |
|---|--|
| 1. $(5a^2 + 4 - 3a^2) + (a^2 - 2 - 7a^2 - 5)$. | 10. $4e^2 + e(-4e - 3)$. |
| 2. $(-2a^3 - 10a - 4a^3) + (5a + 3a^3 - 4a)$. | 11. $5np - 3p(4n + 3p)$. |
| 3. Из $3a + 4b$ вычтите $5a - 9b - 3c$. | 12. $m + \frac{8m^2n^2}{mn}$. |
| 4. Из $5a - b - 2c$ вычтите $3c - 3a$. | 13. $4m + \frac{2m^2np^3}{mp}$. |
| 5. $8a + 8b - (3a + 6b)$. | 14. $\frac{m^2np}{mn} - \frac{m^2n - mp}{m}$. |
| 6. $(5d - e) - (7e + 2f)$. | 15. $(m^3n)(m^2n^3)$. |
| 7. $7d \times 2de^2$. | 16. $(2a - 7)^2$. |
| 8. $de^2 \times d^2e$. | |
| 9. $8 - 5(d + 2)$ | |

17. Если $a=2$ и $b=3$, то чему равно $5a^2 - 2ab$?
18. Если $a=0,7$ и $b=1,2$, то чему равно $2a^2 - 5ab$?
19. Если $a=1$, $b=2$, $c=0,4$ и $d=100$, то чему равно $a^2 - b + cd$?
20. Если $a=12$, $b=6$, $c=5$, $d=3$ и $e=1$, то чему равно $\frac{22}{7} [ab + c(d-e)]$?
21. Если $d=2$, $e=3$ и $f=4$, то чему равно $\frac{df}{d+e}$?
22. $d = \frac{ef}{g}$. Чему равно f ?
23. $\frac{e}{W} = \frac{r}{R}$. Чему равно W ?
24. $\frac{PV}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$. Чему равно V ?
25. $4q = 7q - 5$. Чему равно q ?
26. $15 = 7w - 4$. Чему равно w ?
27. $\frac{V}{4} = a - 2$. Чему равно V ?
28. $\frac{6}{2-u} - \frac{11}{3-u} = 0$. Чему равно u ?
29. $P = \frac{b_1 b_2}{c_1 + c_2}$. Все величины b_1 , b_2 , c_1 и c_2 — положительные. Напишите „увеличивается“, „уменьшается“ или „не знаю“.
- Если b_1 увеличивается, то P ...
- То же в отношении b_2 , c_1 и c_2 .
30. $N = \frac{ab}{c} - d(e-f) + \frac{1,414}{g + \frac{1}{h}}$. Все величины a , b , c , d , e , f , g и h — положи-

тельные.

Напишите „увеличивается“, „уменьшается“ или „не знаю“.

Если a увеличивается, то N ...

То же в отношении b , c , d , e , f , g и h .

31. Зная, что $a=1$, $b=10$ и $c=100$, выразите 216 в числах и буквах.

Выразите в числах и буквах 2,16.

32. Если удвоить некоторое число и прибавить к нему 2, а затем утроить его и вычесть 7, то получатся одинаковые величины. Найти это число.

Для решения примеров 33, 34 и 35 пользуйтесь данной вам клетчатой бумагой, обращая внимание на знаки координат в 4 квадрантах.

33. Поставьте маленький крестик (x) в точке, для которой $x=2$ и $y=3$.

Поставьте маленький кружок (o) в точке, для которой $x=-4$ и $y=1$.

Поставьте маленький треугольник (Δ) в точке, для которой

$$x = 1\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y = -4.$$

34. Изобразите графически $y = 1\frac{1}{8}x - 5$.

35. Изобразите графически $y = \frac{1}{x} + 8$. Проведите линию такой длины, чтобы не было сомнений в понимании вами задачи.

36. Найдите два таких числа, чтобы сумма удвоенного первого числа с утроенным вторым равнялась 2, а сумма 6 раз взятого второго числа с 10 раз взятым первым равнялась 7.

37. Какова длина диагонали прямоугольника, стороны которого равны 8 м и 6 м?

38. Умножьте $\sqrt{\frac{a}{b}}$ на $\frac{b}{\sqrt{a}}$.

39. Отметьте знаком + или — правильность или неправильность следующих равенств:

$$\sqrt{\frac{ab}{cd}} = \frac{\sqrt{abcd}}{cd}; \quad \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c} = \sqrt{a+b+c}; \quad a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a};$$

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2}}; \quad \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

40. При каких условиях $a + b + c = abc$? Напишите эти условия словами или знаками: $a + b + c$ будет равно abc , если...

Часть II; форма А.

90 минут.

1. Помножьте g^3hi^{-4} на g^5hi^{-6} .

2. Разделите $pq^{\frac{2}{3}}$ на $p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{2}}r$.

3. Напишите $7,03 \times 10^8$ обыкновенным способом.

4. Возведите в квадрат $p^{-3} + 6q^{\frac{1}{3}}$.

5. На какие множители разлагается трехчлен $6x^2 - x - 12$?

6. Решите уравнение $x^2 - 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$. („Решить уравнение“ — значит найти его корни или значения x , удовлетворяющие данному равенству.)

7. Решите уравнение $\frac{x^2}{c} + \frac{x}{2} + d = 0$.

8. Напишите средний член разложения бинома $(m + 0,2n)^6$.

9. Напишите средний член разложения бинома $\left(\frac{m}{2} + n^{\frac{1}{2}}p^{-3}\right)^6$.

10. Рассмотрите каждый из помещенных ниже рядов. Если он является арифметической прогрессией, то пометьте его буквой А; если — геометрической прогрессией, то поставьте букву G; если ни той, ни другой, то проставьте букву N.

8,4	7,6	6,8 ...
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{x}$	$1\frac{11}{16}$...

$$5f - g + 3h; \quad f + 3h; \quad g + 3h - 3f \dots$$

11. Найдите сумму шести членов ряда $1, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}$ и т. д.

12. Умножьте $3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}$ на $\sqrt{a} + 5\sqrt{b}$.

13. Если $p - 3\sqrt{p} + 2 = 0$, то чему равно p ?

Из последующих примеров 14–21 решите 4 любых.

14. Свободно падающее тело проходит 4,9 м в первую секунду, в 3 раза большее расстояние во вторую секунду, в 5 раз большее расстояние в третью секунду и т. д. Какое расстояние пройдет оно в течение минуты?

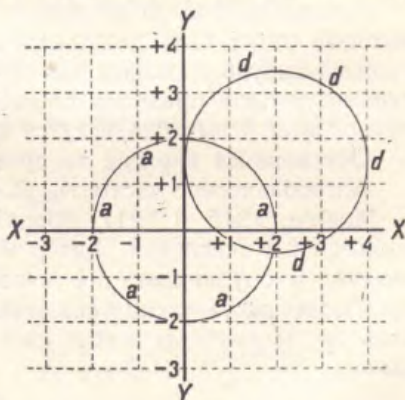
15. Отец давал дочери в течение года столько же рублей, сколько она зарабатывала, а в конце года дал ей еще квадрат числа рублей, которые она скопила. Если она скопила одну десятую того, что заработала (но не получила от отца) в течение года, а общий приход ее за год составил 800 руб., то сколько она заработала за год? Найдите ответ с точностью до 1 руб.

16. Если $x^2 + y^2 = 4$ есть уравнение круга $aaaa$, то каково уравнение круга $dddd$, координаты центра которого равны $+2$ и $+1\frac{1}{2}$?

17. Рассмотрите уравнения $y + \frac{4}{x} = 0$

и $y = \frac{x}{4} + 2$.

Если имеются такие действительные значения x и y , которые удовлетворяют обоим уравнениям (т. е. если две линии пересекаются), то напишите „да“ и определите приблизительно эти значения. Ответ будет признан правильным, если он будет отличаться от точного ответа не более, чем на 10 %. Если таких



Фиг. 9.

Тест E: 3 минуты. Приведение членов таких выражений, как $-5x + 6x - 11x + 8 - 3 - 9$.

Тест F: 12 минут. Решение 13 уравнений, из которых 1, 4, 7 и 13 таковы:

$$\frac{-3x-2}{4} = \frac{x+2}{6}; \quad \frac{-3(2x-5)}{5} + \frac{-2(3x+4)}{1} = 0;$$
$$1 - \frac{x+5}{6} = \frac{-4x+9}{8}; \quad \frac{2x+3}{10} - \frac{1+2x}{12} + \frac{-4x-5}{15} = 1.$$

Далман (Dalman, 1920) составил тесты, каждый раздел которых содержит примеры четырех степеней трудности для измерения градаций алгебраических способностей и успеваемости. Тесты распадаются на две серии, из которых одна применяется в течение первого, а другая — второго полугодия. Проведение различия между знанием половины предмета и полужнанием всего предмета, как и следовало ожидать, имело благотворное влияние на преподавание. Помимо этого удалось избежать многих затруднений и дефектов в распределении способностей по степеням или значительно их уменьшить. Необходимо, впрочем, отметить, что некоторые упражнения не вполне удовлетворительны с точки зрения современных стандартов; так, в тесте A для второго полугодия мы встречаемся, например, со следующими заданиями:

Разложение на множители:

2. $2x^3 - 8$.

4. $6b^2c^2 - 25bc - 14$.

6. $y^4 + 3y^2 + 4$.

8. $27y^6 + 64m^3$.

Упрощение выражений:

$$2. \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} + \frac{2b^2}{a^4+a^2b^2+b^4}.$$

Дробные уравнения.

2. Возраст A составляет одну треть возраста B; 6 лет назад возраст A составлял одну пятую возраста B. Сколько лет A и B в настоящее время?

Системы линейных уравнений.

2. Сумма цифр некоторого числа равна 14; если вычесть из этого числа 18, то разность будет равна числу, написанному теми же цифрами, что и первое, но в обратном порядке. Найти число.

Квадратные уравнения.

2. Найти размеры прямоугольника, площадь которого равна 720 м^2 , а сумма основания и высоты 54 м .

Алгебраические тесты Университета в Воминге, составленные Стромквистом (С. Е. Stromquist), распадаются на семь частей, характеризующихся следующими примерами.

I. Применение формул.

4 минуты.

1. $v = gt$. Определите t .

16. $T = \frac{1}{2} a (b + b')$. Определите b .

II. Деление.

4 минуты.

1. $2ac - 6ad + 5bc - 15bd \mid c - 3d.$
12. $6a^3 + 17a^2b + 8ab^2 - 14ab^2 + 18b^3 \mid 2a^2 + 7b.$

III. Простейшие уравнения с одним неизвестным.

4 минуты.

1. $5x - 12 = x + 23 - 3x.$
12. $1,5 - 0,3x = 0,3 - 0,6x.$

IV. Простейшие системы линейных уравнений.

4 минуты.

1. $\begin{cases} 3x + y = 5; \\ 2x + y = 2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 7x + 2y = 8; \\ 8x + y = 9. \end{cases}$

V. Разложение на множители.

5 минут.

1. $36tx + 48ty.$
12. $15x^2 + x - 6.$

VI. Подстановка чисел.

5 минут.

1. Чему равняется $5a + 3b - 4c$, если $a = 3$, $b = 2$ и $c = -\frac{1}{2}$.
10. Чему равняется $-b + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если $a = 3$, $b = -11$ и $c = +$

VII. Составление уравнений.

10 минут.

Составьте уравнения для решения помещенных ниже задач, но не решайте их. Прежде всего отметьте, что вы обозначаете выбранной буквой.

1. Сумма удвоенного числа с его третью равна 28. Найти число.
10. Площадь пола двух комнат равна $36,45 \text{ м}^2$; в первой из них пол имеет форму квадрата, а во второй — прямоугольника, причем длина этого прямоугольника равна стороне квадрата, а высота равна $3,6 \text{ м}$. Найти длину второй комнаты.

Тесты Дугласа по существу своему близки к тестам Гоца, но не содержат упражнений с подстановками, формулами, графическими изображениями и словесными задачами.

„Они распадаются на 4 части по 10 примеров, предназначенных для испытания четырех основных разделов элементарной алгебры в том виде, как они обыкновенно проходятся в течение первого года занятий ею; разделы эти были выбраны после соответствующей экспертной оценки как наиболее существенные и фундаментальные. Примеры были подобраны так, чтобы можно было производить испытания всех основных учебных тем в различных фазах их изучения и в то же время пользоваться заданиями весьма различной степени трудности. В первом можно убедиться, просмотрев несколько руководств по обучению элементарной алгебре, а во втором — ознакомившись с опубликованными данными об относительной трудности решения приводимых примеров. Тесты следует давать в естественных условиях, применяя всегда одну и ту же процедуру. В отношении измерения скорости решения от этих тестов нельзя требовать большего, чем простого установления факта

такой медленности решения, с которой необходимо бороться; результативные отметки должны определять лишь способность решения, а не скорость его. Каждый пример имеет свой удельный вес, который стоит в прямой зависимости от относительной трудности задания и помечен в таблицах испытаний" (Douglass, 1921, стр. 33).

Ниже приводятся по два первых и по два последних примера каждого из четырех тестов Дугласа.

Тест 1.

1. Сложите:

$$15m$$

$$12m$$

2. Сложите:

$$8ba$$

$$-7ab$$

$$-5ab$$

$$2ab$$

Приведите подобные члены:

9. $a^2 + 8a + 7a^2 + x + 7 - 9x + 4 + 3a$.

10. $2x - xy + 3y - 3x + 2xy + 7y + 8$.

Тест 2.

1. Умножьте:

$$9m$$

$$2$$

9. Умножьте:

$$3a^2bc + 5b^2cd$$

$$-4ax + 2$$

2. Умножьте:

$$4x^2$$

$$3x^2$$

10. Умножьте:

$$7by^2z - 4a^2cx^2 + 9ab^2y$$

$$9byz^2 + 8a^2bc^3$$

Тест 3.

1. Разделите $12a^4$ на $2a^3$.

2. Разделите $16x^3$ на $-4x^2$.

9. Разделите $6a^3 - 18a - 11a^2 + 20$ на $2a - 5$.

10. Разделите $r^3 - 19r + 84 - 6r^2$ на $r - 7$.

Тест 4.

1. $4x = 12$. Определите x .

2. $4a = 3$. Определите a .

9. $\frac{2x}{3} + 8 = \frac{3x}{2} + \frac{x}{6} + 14$. Определите x .

10. $\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{7x}{10} = \frac{1}{2} + 2x$. Определите x .

При всех этих тестах обычно указывается предельное время, даваемое на их выполнение, и мы всегда сталкиваемся с вопросом о сравнительном значении качества работы и времени, потребного на ее выполнение; даже в тех случаях, когда времени совершенно достаточно, чтобы каждый ученик мог выполнить все, что он умеет, этот вопрос не снимается, так как некоторые ученики успевают окончить работу ранее истечения срока, и требуется решить, следует ли ставить им за это повышенную отметку. В этих случаях следует руководствоваться правилом, что повышение отметок за скорость надлежит производить лишь в той мере, в какой последняя свидетельствует о наличии умения. Сама по себе скорость не имеет большой цены. Алгебраическое счисление применяется в жизни настолько редко, что экономия времени, получаемая благодаря быстрой в вычислениях, почти не имеет значения по сравнению с самой способностью их выполнять. В этом отношении алгебру не следует уподоблять чтению, письму или простому арифметическому счислению, где скорость в работе обуславливает значительную ежедневную экономию времени.

На вопросе о скорости в работе как признаке умения следует несколько остановиться. Если ученик твердо знает, например, как надо изменять знаки при открытии скобок, то примеры вида $4a - (2 - a)$ он решает не только совершенно правильно, но и быстро. Далее, если один ученик может выполнять более трудную работу, чем другой ученик, то решение более легких задач, посильное и этому последнему, он выполняет быстрее. Корреляция между степенью трудности работы, которую ученик может выполнить, и скоростью, с которой он ее выполняет, довольно близка, так что даже весьма высокие отметки за скорость не являются несправедливыми и не влияют значительно на порядок, в котором учащиеся данной группы могут быть расположены по их знанию алгебры.

Тесты Рогга-Кларка, Гоца и Института по изучению вопросов образования значительно отличаются от обычных программ всякого рода приемных испытаний в школах, колледжах и т. д., так как они включают значительно большее число заданий, в том числе и более легких. Что выигрывается и что теряется, когда мы заставляем учащихся затрачивать время на решение 60 или более заданий, в том числе весьма „легких“, вместо 8 или 10 более сложных и трудных заданий?

Первое, что мы выигрываем, — это объективность оценки. Если дается всего 10—12 заданий, то становится практически необходимым ставить дробные отметки за работу, выполненную частично неправильно. При этом неизбежно влияние личного усмотрения со стороны тех, кто дает оценку, и как следствие — различие в отметках за работу одинакового качества. Мы можем рассчитывать получить объективные результаты только в том случае, если заранее разработана подробная и единообразная схема отметок за выполнение каждого отдельного задания.

Далее мы выигрываем в надежности оценки знаний учащихся. Влияние непонимания какого-либо слова, случайной ошибки при списывании, решения того же примера и пр. распределяется между учащимися в случае 60 заданий гораздо более равномерно, чем в случае небольшого числа последних. Едва ли кто-либо станет защищать решение всего одной задачи как способа измерения сравнительного знания учащихся. Но 60 заданий имеют столько же преимуществ перед десятью, сколько 10 перед одним заданием. Это обстоятельство серьезнее, чем привыкли думать экзаменаторы. Вуд (Wood, 1921), выполняя работу для Бюро приемных испытаний в колледжи („College Entrance Examination Board“), нашел, что официальные отметки, полученные в июле 1921 г. 100 выбранными наудачу испытуемыми, имели коэффициент достоверности, равный всего 0,76. Корреляция между оценкой четных и нечетных заданий равнялась при этом всего 0,61. Если оценить тем же способом коэффициент достоверности приведенного выше теста Института для группы приблизительно в 400 учащихся десяти школ, изучавших алгебру в течение по крайней мере одного года, то он получится равным 0,955, а корреляция между двумя половинами этого теста (одной, включающей задания 1—5, 11—15, 21—27, 32, 33, 35, 37 и 39, и другой, включающей все остальные) будет равна 0,915. Правда, по ряду соображений последние величины нельзя непосредственно сопоставлять с данными Вуда, однако они все же крайне показательны. Мы не располагаем прямыми данными о недостоверности оценки, которые могли бы быть со-

браны путем изучения результатов работы одних и тех же учеников при различных формах одного и того же испытания. Тем не менее мы можем утверждать, что испытание, базирующееся на многих элементах, распределенных по степени трудности, распадается на серии, весьма близкие по трудности, и дающее благодаря этому возможность совершенно объективной оценки, конечно, значительно лучше, чем испытания обычного типа, хотя бы и проводимые весьма тщательно, так как последние сильно варьируют по трудности, а это влечет за собой и ошибки в оценке.

Следующим преимуществом этих тестов является то, что включение в них значительного числа разнообразных заданий дает нам возможность судить о том, какими навыками учащийся располагает и каких ему не хватает. Наконец, включение легких задач позволяет нам приблизить их до некоторой степени к „тестам-лестницам“, которые измеряют довольно большой круг алгебраических способностей, и указывает нам, до какой приблизительно степени развит у учащегося каждый отдельный навык.

Переходя к вопросу о том, теряем ли мы что-либо при применении этих тестов, приходится отметить, что возможной потерей может быть лишь отсутствие измерения способности ученика применить к встретившемуся ему новому положению требуемую совокупность навыков, выбрав для этой цели подходящие навыки или комбинации последних. Так,

для решения уравнения $\frac{5}{x-7} - \frac{7}{x+3} = \frac{5x+1}{x^2-4x-21}$ учащийся дол-

жен привести в систему и использовать значительное количество элементарных навыков в сложении, вычитании, умножении, делении и умении распознавать возможность разложения; чтобы выполнить умножение

и упростить выражение $\frac{a^2-11a+30}{a^3-6a^2+9a} \times \frac{a^2-3a}{a^2-25} : \frac{a^2-9}{a^2+2a-15}$, он

должен выполнить задачу отбора ряда соотношений, которые надлежит применять совместно. В обоих случаях он не должен допускать ошибок при выполнении весьма длинного ряда действий. Можно сказать, что наиболее существенным приобретением при изучении алгебры является не столько умение использовать отдельные алгебраические навыки или обычные комбинации их, сколько мастерство в выполнении сложных и новых заданий, в котором должны одновременно участвовать многие навыки, правильно выбранные благодаря хорошему знанию алгебры. Такие задачи, как „найдите кратким способом, чему равно 2^{10} , зная что $2^{10} = 1024$ “, могут поэтому считаться вполне уместными в алгебраических испытаниях.

Изложенное ставит перед нами несколько вопросов, каждый из которых заслуживает особого рассмотрения. В каких отношениях одно задание, требующее правильного последовательного применения десяти навыков, лучше в качестве орудия измерения способностей, чем десять заданий, испытывающих каждое один навык, или пять заданий, испытывающих каждое два навыка? В каких отношениях задание, требующее весьма сложного выбора навыков и приведения их в систему, лучше, чем задание, предъявляющее более скромные требования? В каких отношениях задания, требующие новых приложений алгебраической теории и техники, которые можно назвать алгебраически „оригинальными“, лучше заданий, довольствующихся шаблонными приложениями?

Задания, правильные выполнение которых требует правильного применения многих навыков.

В качестве примера рассмотрим следующее задание; „Найти общий наибольший делитель и общее наименьшее кратное выражений $x^3 - 125$, $5x^3 - 125x$ и $x^2 - 10x + 25$ “.

Для рядового ученика это задание является в основном тестом для определения того, обладает ли он знанием всех элементов, необходимых для правильного выполнения работы, а именно: 1) знанием того, что обозначает „общий наибольший делитель“; 2) то же в отношении „общего наименьшего кратного“; 3) знанием того, что 125 есть куб 5; 4) что $x^3 - (5)^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$; 5) что первая операция с выражением $5x^3 - 125x$, обещающая дать благоприятный результат, есть замена его выражением $5x(x^2 - 25)$; 6) что $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$; 7) что разложение $x^2 - 10x + 25$ на множители обозначает определение $(x - ?)(x - ?)$. Далее он должен: 8) установить, что искомыми множителями являются $(x - 5)(x - 5)$, проделав ряд проб с другими комбинациями или обойдясь без таких проб; 9) вспомнить или усмотреть, что он имеет теперь выражения $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$, $5x(x + 5)(x - 5)$ и $(x - 5)(x - 5)$; 10) приложить знание того, что обозначает общий наибольший делитель, к отбору $(x - 5)$ и 11) приложить знание того, что обозначает общее наименьшее кратное, для составления выражения $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) 5x(x + 5)(x - 5)$.

Предположим, что приведенное выше одно задание было бы заменено следующими:

Разложите на множители 125; $x^3 - 5^3$; $5x^3 - 125x^2$; $x^2 - 25$; $x^2 - 10x + 25$.

Каков будет общий наибольший делитель выражений $x^3 - 125$, $5x^3 - 125x^2$ и $x^2 - 10x + 25$?

Каково будет общее наименьшее кратное выражений $x^3 - 125$, $5x^3 - 125x^2$ и $x^2 - 10x + 25$?

В этом случае учащийся может получить отметку, колеблющуюся в пределах от 0 до 7, тогда как в первом случае он мог получить только 0 или 1.

Предположим, что ученик владеет каждым из семи частных навыков в такой мере, что может правильно использовать его в девятнадцати случаях из двадцати. Тогда отметку 7 он получит приблизительно два раза из трех, отметку 6 — приблизительно один раз из трех и отметку 5 и ниже лишь в очень редких случаях. Если же мы ограничимся одной суммарной отметкой, то 1 он получит приблизительно два раза из трех и 0 приблизительно один раз из трех. Предположим теперь, что он может правильно выполнять, используя один какой-либо навык, только девять операций из десяти. Тогда отметку 7 он получит приблизительно один раз из трех, отметки 6 или 5 приблизительно два раза из трех и отметку 4 или ниже — лишь в очень редких случаях. При одной суммарной оценке он получит 1 приблизительно один раз из трех и 0 приблизительно два раза из трех. Если, наконец, все семь навыков таковы, что правильное использование каждого из них происходит только в четырех случаях из пяти, то при суммарной оценке ученик почти всегда будет получать в качестве отметки 0.

Мы видим таким образом, что при „сложных“ заданиях не придается значения частным навыкам до тех пор, пока последние не становятся

весьма прочными. Это имеет известные основания в отношении тех навыков, которые становятся полезными в жизни лишь по достижении высокой степени прочности. Но так как при этих заданиях одна и та же нулевая отметка ставится учащимся, весьма различающимся по своим способностям, то необходимы и более „простые“ задания на те же темы, которые позволили бы дифференцировать учащихся и установить, какие именно частные навыки особенно слабы и нуждаются в дальнейшем укреплении.

Задания, правильное выполнение которых требует тщательной систематизации навыков.

Типичным примером таких заданий является „упрощение“ алгебраических выражений. Поскольку эта тема заслуживает изучения, целесообразно и измерение способности выбирать и приводить в систему необходимые навыки. Было бы неправильно измерять только отдельные алгебраические навыки и пренебрегать способностью приводить их в систему. Задания должны быть,

однако, продуманными и не слишком превосходящими по трудности те, которые действительно встречаются в жизни.

„Оригинальные“ алгебраические задания.

Задания, требующие новых приложений алгебраической теории и практики, применяются для измерения одной из наиболее важных способностей, которые изучение алгебры может развить в одаренных учащихся. Серия из тысячи оригинальных задач, имеющих значение в чистой или прикладной математике, была бы весьма полезной как при обучении, так и при измерении. Ниже приводятся несколько примеров подобного рода задач.

1. Пусть a — какое-либо целое число. Напишите выражение, которое обозначало бы четное число. Напишите выражение, которое всегда обозначало бы нечетное число.

2. Найдите условие, при котором $a + b + c = abc$. Найдите другое условие, приводящее к тому же результату.

3. Найдите условия, при которых увеличение a в равенстве $N = ab - \frac{b}{a}$ вызывает увеличение N .

4. Найдите условие, при котором $abc = \frac{ac}{b}$.

5. Изобразите графически $x = 5$.

6. Как вы изобразите графически $x^2 + y^2 = 0$?

Само собою разумеется, что если обратить эти оригинальные задачи в предмет объяснения и изучения и подвергнуть их той же обработке для целей преподавания, какой мы подвергаем теорию знаков или степеней, то значение их как „оригинальных“ будет утрачено.

Измерение более общих способностей.

Несмотря на сильно возросшее за последние годы признание значения за непосредственными специфическими алгебраическими способностями и приложениями алгебры к другим теоретическим и прикладным дисциплинам, все же четверо из пяти учителей алгебры, вероятно, продолжают думать, что наибольшее значение алгебры заключается в развитии и укреплении „более общих способностей“. Точного определе-

ния того, что надо понимать под этим термином, пока никто еще не дал, однако мы можем мыслить себе, что дело идет о следующих пяти основных видах их: 1) способности обращаться с символами; 2) способности обращаться с соотношениями, в особенности более „отвлеченными“ — как сходство, причина и следствие, пропорциональность и пр.; 3) способности к обобщению и обращению с обобщениями; 4) способности к надлежащему выбору элементов и данных; 5) способности приводить в систему идеи и навыки, используя одновременно некоторое число их для получения надлежащего эффекта.

На последующих страницах читатель найдет тот инструмент, при помощи которого можно измерить как достигнутый уровень, так и успехи, проявленные учащимися в общей совокупности этих более общих способностей. Этот инструмент поделен на части, в каждой из которых особое внимание обращается на одну какую-либо из упомянутых способностей. Конечно, ни одна из этих частей не приспособлена к измерению исключительно одной какой-либо способности. Тест, который был бы построен соответствующим образом, был бы столь искусственным, что мог бы иметь значение только для психологов. Читателю может быть следует пренебречь делением теста на части и просто рассматривать его в целом как инструмент для измерения совокупности способностей. Описание, которое мы приводим здесь, касается только одной половины тестов; вторая половина их пригодна для испытания учащихся до приступа к изучению алгебры и после изучения ее.

Читатель, который уже знаком со способами измерения общего развития, сразу заметит сходство между этими тестами и теми способами, которые психологи применяют для изучения общего развития или, точнее, способности оперировать с идеями, абстракциями и символами. Пять перечисленных выше способностей можно все же рассматривать как определяющие, хотя и в грубых чертах, указанное общее развитие, обычно измеряемое тестами Бинэ (Stonford Binet), Армейскими альфа-тестами, Национальными тестами общего развития и Программами испытания общего развития оканчивающих школы повышенного типа, составленными Торндайком. Обратно, мы не сделаем большой ошибки, если применим какой-либо из этих стандартных тестов для определения того влияния на общее развитие, которого можно ожидать от изучения алгебры; некоторая неточность будет все же иметь место, поскольку эти тесты включают задания, которые необходимы для определения общего развития, но не вполне пригодны для испытания тех способностей, которые, как можно думать, разовьются от изучения алгебры; таковы тесты знания родного языка, степени начитанности, способности понимать и запоминать указания и пр., которые обычно включаются в программы испытаний. Поэтому тесты, приводимые ниже, лучше отвечают поставленной нами задаче.

В отношении применения их следует, однако, сделать некоторые замечания. Путем применения формы *A* при начале изучения алгебры и формы *B* при окончании его можно получить некоторые данные: мы грубо измерим сделанные успехи и сможем сравнить достижения отдельных учеников, истолковав соответствующим образом полученные результаты. Если мы возьмем на себя труд организовать испытание групп, равных по способностям при начале занятий и обучаемых совершенно одинаково во всех отношениях, кроме одного, влияние которого мы

хотим определить, как, например, различия в содержании курса алгебры или различия в методах ее преподавания, то мы сможем определить и влияние этого различия; мы сможем таким образом сравнить успехи, полученные в результате усиленных занятий алгеброй, с успехами, полученными при меньшем объеме таковых.

Произведя испытание по формам A и B различных групп, находившихся в разных условиях, мы можем получить оценку успехов, достигнутых в течение одного года учащимися, которые различно провели учебный год. Так, например, мы сможем сравнить учащихся, изучавших алгебру, с теми, которые ее не проходили. Контроль условий выполнения этих испытаний требует, однако, специальных мер предосторожности и большой тщательности. Необходимо помнить, что второе испытание, производимое при помощи теста, может дать преувеличенное представление о достижениях учащихся в результате года учебной работы, благодаря тому, что они освоились уже при первом испытании с формой теста.

Пока не удалось еще провести опытов, необходимых для определения сравнительной трудности отдельных элементов серий A и B тестов Института. Возможно, что это будет в ближайшее время выполнено. В целом обе серии весьма близки по трудности, и совокупность всех элементов серии A , имеющих математическое содержание, вероятно, совпадает с совокупностью аналогичных элементов серии B . То же справедливо и в отношении элементов, имеющих иное содержание. Знание сравнительной трудности соответствующих элементов серий A и B не имеет, однако, существенного значения, поскольку сравнению подвергаются достижения группы, изучавшей данные дисциплины, и контрольной группы, не изучавшей последних.

Тесты Института в способности обращаться с символами.

Форма A .

Тест 1.

1. Если $a \times a = a^2$, $a \times a \times a = a^3$ и $a \times a \times a \times a = a^4$, то как вы выразите $n_1 \times n_1 \times n_1 \times n_1 \times n_1 \times n_1$?

2. Как вы выразите $a \times a \times a$ и т. д., если a повторяется множителем n раз?

3. Пусть ppn обозначает часть плоскости, ограниченную прямыми линиями, и n — число этих линий. Пусть далее t обозначает правильный многоугольник. Как мы обыкновенно называем trp ?

4. Как вы обозначите буквами и цифрами изображенную здесь фигуру, пользуясь указаниями, изложенными в предыдущем примере?

5. Выразите в возможно краткой форме: „Произведение любого числа на постоянную величину, деленное на это число, равно постоянной величине“.

6. Пусть a равно числу месяцев, прожитых человеком. Сколько лет он прожил?

7. Выразите в возможно краткой форме, пользуясь буквами O , S и R : „Освещение и меняется прямо пропорционально силе света и обратно пропорционально квадрату расстояния“. Для обозначения „изменяется“ примените „ k раз“.

8. Некто получает 3000 руб. жалования в год и зарабатывает еще кое-что сверхурочными работами; $\frac{1}{5}$ своего жалования он предполагает внести как пай в жилищно-строительный кооператив, на общие расходы затратить 2250 руб. плюс $\frac{1}{4}$ того, что он получит за сверхурочные работы, на поездку затратить так-



Фиг. 10.

же $\frac{1}{4}$ получки за сверхурочные работы, а все остальные деньги внести в сберегательную кассу. Пользуясь буквами Z, K, R, P и S , покажите, как он предполагает распорядиться всем своим заработком.

Тест 2.

1. Пусть n равно какому-либо числу, n_1 равно единице, деленной на n , n_2 равно 10, деленным на n , и n^s равно числу, возведенному в степень, равную этому числу. Чему равно в этом случае $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^s$?

2. Пусть m, m_1, m_2, m_3 и т. д. какие-либо величины и n — число их; n показывает, следовательно, сколько имеется m . Пусть $S()$ обозначает „сумму таких-то величин“. Как вы назовете выражение $\frac{S(m)}{n}$?

3. Пусть $S. O.$ равно среднему из отклонений ряда чисел от их средней величины, безотносительно к знакам этих отклонений. Найдите $S. O.$ для 6, 9, 10, 11 и 14.

4. Пусть $K. O.$ равно квадратному корню из средней величины квадратов отклонений ряда чисел от их средней величины. Найдите $K. O.$ для 11, 13, 14, 15 и 17.

Тест 3.

Предположите, что:		обозначает „он“,
$<$		„становится (больше)“,
d		„да“ или „присутствие“,
$\bigcirc$		„вне“,
$\square$		„дом“,
x		„хороший“,
xx		„лучше“,
xxx		„наилучший“,
p		„плохой“,
l		„длинный“.

Как вы обозначите: 1) „хуже“; 2) „самый длинный“; 3) „внутри“; 4) „нет“ или „отсутствие“; 5) „становится меньше“; 6) „она“? Напишите, что значат следующие выражения:

- 7) $\square, <, d$
 8) ll, pp
 9) $| < ll$
 10) $- < ll$
 11) $| - \square$
 12) $p \square xx n \square$

Тест 4.

Прочтите внимательно первую фразу, чтобы понять ее значение. После этого отметьте два из следующих четырех выражений, имеющих тот же смысл, что и первое. Отмечать надо только два выражения.

- Не суйся в воду, не спросясь броду.
 ... Спусти лето по малину не ходят.
 ... Семь раз примерь, один отрежь.
 ... Не прыгай, не поглядев.
 ... Позаботься о сегодняшнем дне, а завтрашний сам о себе позаботится.
 - Солон сравнивал греческий народ с морем, а ораторов и советников с ветрами: чтобы море было тихим и спокойным, ветры не должны возмущать его.
 ... Ораторы и советники только марионетки в руках общества.
 ... Ораторы и советники ответственны за волнения среди народа.
 ... Солон опасался самостоятельного подъема масс.
 ... Он полагал, что народ, предоставленный самому себе, пассивен и инертен.
- (Далее следуют еще 22 аналогичных упражнения. Тест 4 взят из программы психологических испытаний Технологического института Карнеджи).

Тесты Института в способности выбора и установления соотношений.

Тест 1.

Арифметические задачи.

Решите эти задачи; напишите ответ около каждого условия задачи.

(Ниже приводятся задачи № 1, 4, 7, 10, 13, 16 и 19 из общего числа их 21.)

1. Сколько стоят четыре билета по 50 коп. каждый?
4. Сколько стоят 20 листов бумаги по 30 коп. за десять листов?
7. Если 5 карандашей стоят 25 коп., то сколько стоят 3 десятка карандашей?
10. Какое число, уменьшенное на 7, равно 23?
13. 4% от 600 руб. равны 6% от какой суммы?
16. Семья расходует 600 руб. в год на оплату квартиры, 3000 руб. на все прочие надобности и сберегает 200 руб. Если все расходы семьи возрастут до 4200 руб. в год, а сбережения повысятся в том же отношении, как и расходы, то сколько рублей семья сбережет в год?
19. Карамель стоит 25 коп. за 4 штуки, а пастила $2\frac{1}{2}$ коп. за штуку. Карамель стоит в ... раз больше, чем пастила.

Тест 2.

Абсурдные утверждения

(Торндайк по Вудворту).

Поставьте „н“, если вы находите, что данного положения быть не может. Поставьте „в“, если вы считаете, что оно возможно (хотя бы оно и было маловероятным). Всего дается 16 примеров, из которых ниже приводятся № 1, 4, 7, 10, 13 и 16.

... 1. Певцы напрягли свои голоса до крайних пределов, но все же голос высокого полного певца с красным галстуком покрывал их все.

... 4. Несчастный путешественник, лишенный возможности зажечь сложенный костер, тщательно разбирал свои пожитки при свете сальной свечи.

... 7. Посмотрев в бинокль, командир ясно различил то, о чем он ранее только догадывался, именно — группу верховых, осторожно пробиравшихся ползком вдоль берега реки.

... 10. При помощи тусклого света фонаря он определил источник отвратительного запаха.

... 13. Он стоял на сухой траве в ожидании дождя, непрерывно лившего в течение двух суток.

... 16. Фермер стал обходить поле вдоль забора, и каждый новый столб, мимо которого он проходил, был ниже предыдущего.

Тест 3.

Построение фигур при помощи линий.

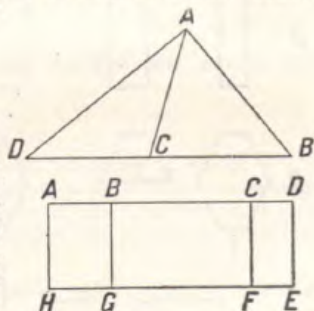
1. Начертите шесть треугольников при помощи всего пяти линий. В число шести должны войти все начерченные вами треугольники, хотя бы они и перекрывали друг друга. Так, на фигуре 11 начерчено при помощи четырех линий три треугольника (ABC , ACD и ABD) и при помощи шести линий — шесть прямоугольников ($ABGH$, $BCFG$, $CDEF$, $ACFH$, $BDEG$ и $ADEH$).

2. Начертите пять квадратов при помощи шести линий.

3. Начертите при помощи всего девяти линий один шестиугольник, два квадрата и четыре треугольника.

4. Начертите при помощи шести линий квадрат, окруженный четырьмя треугольниками.

5. Начертите при помощи всего одиннадцати линий десять треугольников, два квадрата и один шестиугольник.



Фиг. 11.

Тест 4.

Противоположности.

Вдумайтесь в каждое из помещенных ниже слов и напишите рядом с каждым из них слово, которое имело бы противоположный смысл и начиналось с заданной буквы. Если вы не можете найти подходящего слова, переходите к следующему.

Вот пример того, что вы должны написать, если слова, имеющие противоположный смысл, должны начинаться с буквы „п“: хороший — „плохой“; кривой — „прямой“; найденный — „потерянный“. Всего дается 35 слов.

Тест 5.

Дополнение рядов

(Торндайк по Роджерсу).

Каждое из чисел помещаемых ниже рядов получается из предыдущих согласнo-какому-либо правилу. Рассмотрите каждый ряд чисел, найдите правило, по которому получаются его члены, и напишите в каждом ряду следующий по величине член. В первых двух рядах указано, какие числа вы должны были бы про- ставить:

2, 4, 6, 8, 10, ... 12 ...
11, 12, 14, 15, 17, ... 18 ...

Всего дается 20 рядов, из которых ниже приводятся № 1, 5, 7, 10, 13, 16 и 19

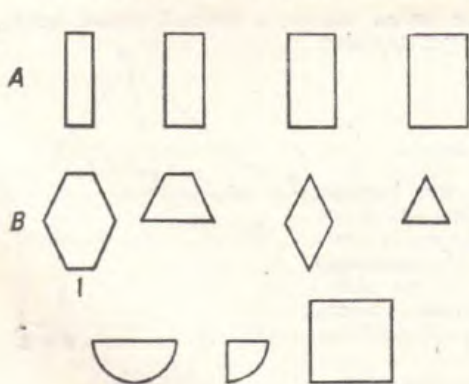
5, 10, 15, 20, ...	10, 12, 12 $\frac{1}{2}$, 14 $\frac{1}{2}$, 15, 17, ...
103, 95, 87, 79, ...	
5 $\frac{1}{2}$, 7, 8 $\frac{1}{2}$, 10, ...	1 $\frac{3}{16}$, 1 $\frac{3}{8}$, 1 $\frac{9}{16}$, 1 $\frac{3}{4}$, ...
21 $\frac{1}{5}$, 21 $\frac{2}{5}$, 21 $\frac{3}{5}$, 21 $\frac{4}{5}$, ...	7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, ...

Тест 6.

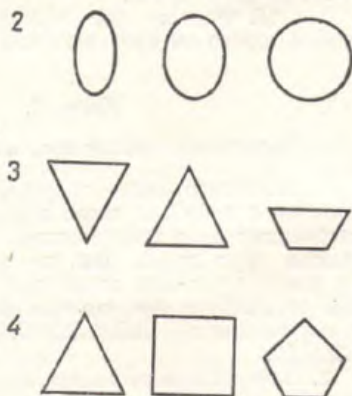
Геометрические соотношения

(Торндайк).

В каждом из помещаемых ниже рядов геометрических фигур вы должны начертить четвертую фигуру, которая выражала бы по сравнению с третьей фи-



Фиг. 12



Фиг. 13.

гурой то же соотношение, которое существует между второй и первой фигурами. Ряды А и В иллюстрируют, как это надо делать. Всего даются две серии по десять рядов, из коих ниже приводятся четыре первых ряда.

Тест 7.

Словесные аналогии или соотношения

(Торндайк по Бриггсу с изменениями и дополнениями).

Напишите четвертое слово, которое по сравнению с третьим выражало бы то же соответствие, которое существует между вторым и первым словами. Приводимые ниже примеры показывают, что от вас требуется:

длинный	длиннее	плохой	хуже
толкнуть	толкнул	бежать	бежал
мальчик	мальчики	небо	небеса

Всего дается 32 примера.}]

Тест 8.

Аналогия или сменные соотношения

(Торндайк по Армейскому альфа-тесту и Вудворту — Уэльсу).

Каждые два слова, приводимые в помещаемых ниже строках, связаны между собой некоторым соотношением. Постарайтесь определить это соотношение и подчеркните какое-либо одно из слов, стоящих в скобках, которое выражало бы вместе с третьим словом то же соотношение, что и первые два. Вот примеры правильных ответов:

небо — голубой; трава (расти, *зеленый*, резать, смерть)
рыба — плавать; человек (мальчик, женщина, *ходить*, девочка)
день — ночь; белый (красный, *черный*, ясный, чистый).

Всего дается 40 примеров.

Тесты Института в способности к обобщению и систематизации

Тест 1.

Тест в правильном суждении Прессея (*Presssey*), измененный и сокращенный вдвое.

Зачеркните в каждой строке слово, которое не соответствует остальным. Всего дается 12 строк, из которых ниже приводятся две:
скарденность, заботливость, щедрость, благорасположенность, доброта;
глупость, подлость, бессмысленность, бесчестие, невежество.

Тест 2.

Выбор элемента, соответствующего трем данным элементам какого-либо класса

(Торндайк по Отису).

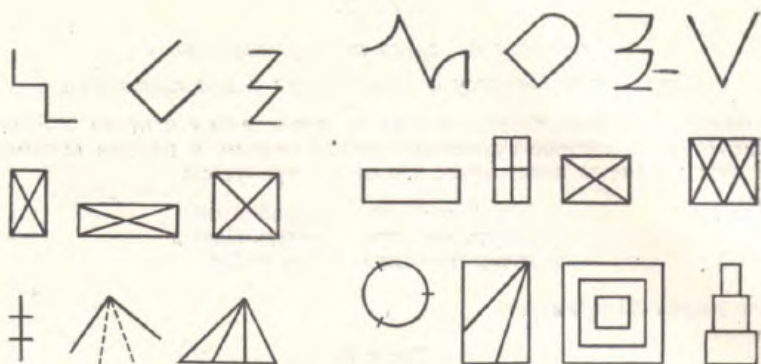
Рассмотрите первые три слова каждой строчки и установите, какое общее понятие или свойство их объединяет. После этого подчеркните одно из четырех последующих слов, которое выражает приблизительно то же понятие или свойство, как и первые три слова. Всего дается 20 примеров, из которых ниже приводятся два:

сапфир, аметист, рубин	кольцо, искра, топаз, цена
север, юг, восток	компас, ветер, вращать, верх.

Тест 3.

Выбор элемента, как в тесте 2, но из числа геометрических фигур
(Торндайк по Отису).

Всего дается 10 примеров, из которых ниже приводятся №1, 4 и 7.



Фиг. 14.

Тест 4.

Выбор элемента, как в тестах № 2 и 3, но из заданных чисел
(Торндайк по Отису).

Всего дается 12 примеров, из которых ниже приводятся № 1, 4, 7, 10 и 12.

21	49	700	800	63	12	94
6	15	1,5	2	3	0	2
4	10		3			3
25	64	10 000	1 000	9 640	64025	
7	26	63	121	122	123	124
27	125	1 000	270	1 250	64	10 000

Тест 5.

Подстановка недостающих слов

(тесты I и L или K и M).

Проставьте недостающие слова, чтобы выражение получило смысл и притом правильный. Каждый пропуск надо заполнять только одним каким-либо словом.

Примеры:

Бедному малышке нечего ...; он голоден.

Одновременно начинать ... вещей и ... кончать их ... привычка.

Тест 6.

Разделение фигур на части так, чтобы получались заданные фигуры

(Торндайк по Армейскому бэа-тесту 7).

Полагая, что этот тест достаточно известен, автор не приводит здесь примеров соответствующих заданий.

Тест 7.

Перестановка данных для получения правильно составленного равенства
(Торндайк).

Переставьте числа и знаки в каждой строке таким образом, чтобы получились правильно составленные равенства, как это показано в следующих трех примерах:

$$\begin{array}{l}
 3 \ 3 \ 6 = + \\
 4 \ 7 \ 8 \ 20 = + \times \\
 2 \ 3 \ 3 \ 7 \ 18 = + - \times (\)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3 + 3 = 6 \\
 7 \times 4 = 20 + 8 \\
 7 + 2 = 18 - (3 \times 3)
 \end{array}$$

Всего дается двадцать заданий, из которых ниже приводятся значащиеся под № 1, 5, 10, 15 и 20.

$$3 \ 3 \ 4 \ 10 = + -$$

$$3 \ 3 \ 8 \ 48 = + :$$

$$1 \ 3 \ 4 \ 4 \ 12 = + - \times ()$$

$$1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 21 = + - \times : ()$$

$$2 \ 2 \frac{3}{4} \ 3 \ 4 \ 5 = + \times \times ()$$

Приведенные тесты можно было бы пополнить тестом в чтении трудных небольших статей и составлении ответов на вопросы, задаваемые таким образом, чтобы были произведены отбор и систематизация идей, содержащихся в этих статьях. Для этой цели могут служить упомянутые выше программы поверочных испытаний Торндайка и специальные тесты в чтении Торндайка — Мак-Колла.

Подобного рода тесты в способности обращаться с символами, в способности выбора и установления соотношений, обобщения и систематизации, а также понимания текстов придают всем этим терминам определенное значение. Если способности, измеряемые описанными выше тестами, являются именно теми более тонкими и общими способностями, которые мы пытаемся усовершенствовать при помощи алгебры, то нам следует стремиться измерять их совершенно так же, как мы измеряем более отчетливые и узкие способности обращения с буквенными обозначениями или графическими изображениями. Преподаватели математики, вообще говоря, соглашались с этим и полагают, что общее развитие мышления, обусловливаемое изучением алгебры, проявляется именно в тех актах мышления, которые определяются указанными тестами.

Подробное измерение усовершенствования, обусловливаемого изучением алгебры, конечно, является весьма сложным. Здесь придется измерять не только отдельные способности, как это делается при помощи тестов Рогга-Кларка, но и совокупное действие их в случае заданий, подобных приведенным в тестах Гоца и Института, а также предлагаемым при типичных школьных контрольных работах, поскольку последние отвечают запросам жизни; измерению подлежит далее не только способность решения привычных заданий, но и способность прилагать алгебраическую теорию и технику к решению оригинальных задач; наконец, измерять надо не только узко алгебраические навыки, но и более общую способность обращения с символами, соотношениями, абстракциями и обобщениями, отбора существенных элементов и систематизации идей и привычек. Эти испытания укажут, насколько трудные задания, требующие применения той или иной способности, учащийся может выполнять достаточно успешно; три или большее число примеров на каждый вид заданий позволит уверенно отличить отсутствие способности от небрежности; наконец, измерение времени, затрачиваемого на исполнение некоторых заданий, дает в некоторых случаях дополнительные данные для суждения о размере достигнутых успехов.

Все эти измерения в совокупности могут служить для определения уровня познаний учащихся, успехов, достигнутых ими за определенный срок, характера испытываемых ими затруднений и видов дополнительных занятий, в которых они могут нуждаться; они пригодны и для измерения результатов применения различных методов обучения; на выполнение их требуется затратить всего от 15 до 20 часов учебного времени; для всякого рода контрольных работ из этих тестов можно отобрать некоторое число наилучших заданий, требующих для своего выполнения всего от 2 до 3 часов.

**Новые виды
контрольных
вопросов.**

Обращаем внимание преподавателей алгебры на следующие желательные новые виды контрольных вопросов.

Первым из этих видов является определение *правильности* или *неправильности* утверждения, которое можно иллюстрировать следующими примерами:

Поставьте знак +, если равенство имеет место,
Поставьте знак —, если его нет.

$$\frac{1}{a^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{ab}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{1}{a^3} \times \frac{1}{a^3} = \sqrt[3]{a^2}; \quad \sqrt{a^5 b} = 2a \sqrt{b}.$$

Этот вид алгебраического теста полезен для создания у учащихся привычки критически относиться к получаемым ими ответам и, если нужно, проверять их, чтобы убедиться в их правильности.

Вторым видом является тест в выборе, иллюстрируемый здесь проверкой знания значения арифметической и геометрической прогрессий.

Посмотрите каждый из помещаемых ниже рядов. Если он является арифметической прогрессией, отметьте его буквой А, если геометрической прогрессией — оставьте букву Г, если ни той ни другой — напишите букву Н:

$\frac{5}{12}$	$1\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	5	5	$5,5\frac{1}{4}$
5,8	6,6	7,4	abc	bc	c
$\frac{5}{8}$	1	$\frac{11}{8}$	rs ² t	st ²	$\frac{t}{r}$
1,7	2,0	2,3			
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{4}$	$\frac{e}{cd}$	e	cde

Подобного рода тесты особенно полезны для проверки понимания терминов и способности обнаруживать грубые ошибки.

Третьей разновидностью этих тестов является упражнение в подыскании соответствующих величин, иллюстрируемое здесь примером проверки понимания соотношений, выражаемых некоторыми уравнениями.

Укажите, какую кривую выражает каждое из помещенных ниже уравнений:

$$y = \frac{5}{2}; \quad y = x; \quad y = x + 3; \quad y = x - 4;$$

$$xy = 4; \quad y = x^2; \quad y = x^{\frac{1}{2}}; \quad y = x^2 + 2x + 3.$$

Эта форма теста очень часто допускает разделение последнего на части, весьма сильно различающиеся по трудности их выполнения, и обладает тем большим достоинством, что позволяет установить, в какой мере учащийся может приложить свои способности к выполнению заданий, отличных от тех, на которых эти способности были приобретены. Кроме того, эти тесты в подыскании соответствующих величин часто позволяют организовывать и реорганизовывать способности учащихся в желательном направлении.

Специальной разновидностью тестов в подыскании являются тесты в *расположении по порядку*, когда учащиеся должны располагать ряд

данных в определенном порядке по значению, величине, хронологической последовательности и т. д. Ниже приводится соответствующий пример.

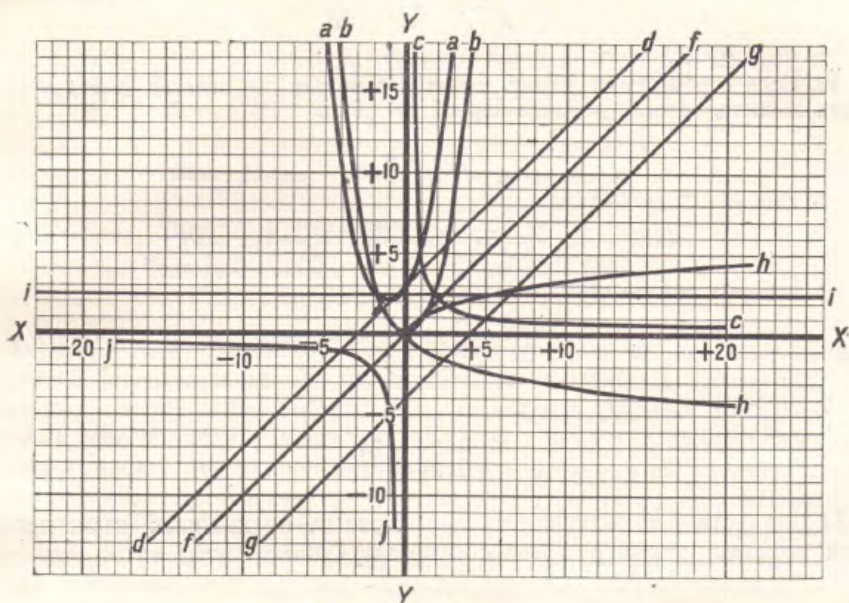
Отметьте цифрами 1, 2, 3 и т. д. величину каждого из следующих выражений в убывающем порядке:

a. $1,17 \times 10^3$; b. Число, логарифм которого равен 3;

c. $1000000^{\frac{1}{2}}$; d. $\left(10 + \frac{1}{10}\right)^3$;

e. Число, логарифм которого равен 4; f. 2^{20} ; g. 4^{41} .

Все эти тесты возбуждают в учащихся интерес своей новизной, использованием хорошо знакомых фактов и отсутствием вычислений; они легко поддаются оценке и со стороны самих учеников. Однако при изучении алгебры они не имеют такого большого значения, как при изучении общественных и экономических дисциплин, поскольку обыч-



Фиг. 15.

ные контрольные испытания требуют в последнем случае наличия больших литературных познаний и мало приспособлены для точного установления градации способностей.

Более важное значение имеют тесты в дополнении выражений, рисунков, диаграмм, карт или рядов, при которых ученикам приходится заполнять пропущенные части. Этот вид тестов имеет весьма широкое применение при алгебраических занятиях, поскольку решение уравнений, в которых буква x или иной символ, обозначающий неизвестную величину, прибавляется для заполнения оставленного места, являются именно тестами в дополнении. Они дают также хорошие результаты при применении в форме интерполяции и экстраполяции величин, выражаемых кривыми, а также при ограниченном применении к подстановке пропущенных слов в определениях, правилах и доказательствах.

**Измерение
способности
к изучению
алгебры.**

Роджерс (Rogers, 1918) составил серию тестов, при помощи которых можно заранее определять, каких результатов следует ожидать от изучения алгебры данным учеником по сравнению с другими учащимися.

Ниже приводится краткая характеристика этих тестов:

1) тест в выполнении геометрических рассуждений, доказательств и выводов, когда даны все необходимые положения и величины;

2) два теста в алгебраическом счислении, из которых здесь приводится несколько заданий под соответствующими номерами.

Тест 1.

1. Если $a=2$, $b=3$, $c=5$ и $d=1$, то чему равно каждое из следующих выражений:

$$5a; 2a-d; \frac{a+b+d}{d};$$

$$\frac{2a+c}{3d}; \frac{2c}{a}; \frac{4b}{3d}?$$

5. Если $2x+3=15$, то чему равен x ?

10. Если l обозначает длину комнаты в метрах, то сколько имеет в длину другая комната, которая длиннее первой на 1,5 м?

Тест 2.

1. Выполните умножение:

$$4(3x-4); -5(-4x-6y); -4(x+2).$$

4. Найдите величину x :

$$\frac{-7x-2}{6} = \frac{x+1}{8} - x.$$

7. Найдите величину x и y :

$$\begin{aligned} 5x+2y &= 34; \\ 7x-3y &= 7. \end{aligned}$$

3) Два теста в дополнении числовых рядов, из которых ниже приводятся несколько примеров под соответствующими литерами.

Часть 1.

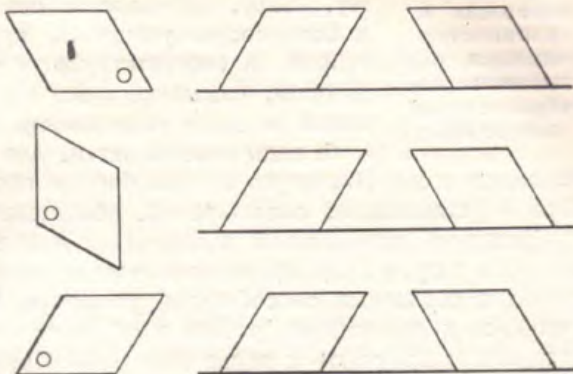
A.	1	3	5	7	...	11	13	15	17	...	21;
F.	5	13	...	29	37	45	53	61	...	77	85;
K.	3	...	...	18	...	...	33	...	...	...	53;
P.	...	...	13	...	...	...	29	...	...	...	45;
T.	7	...	...	...	...	...	31	...	...	...	47.

Часть 2.

A.	1	8	15	22	...	36	43	50	...	64	71;
F.	5	17	29	...	53	65	77	...	101	113	125;
K.	1	...	...	7	...	...	13	...	...	...	21;
P.	...	...	16	...	...	...	44	...	...	...	72;
T.	5	...	...	...	...	...	83	...	...	...	135.

4) Тест в перемещении фигур, содержащий 48 заданий следующего вида.

Предположите, что фигура, отмеченная маленьким кружочком в одном из углов, вырезана из бумаги и поставлена своей стороной, отмеченной более жирной линией, на прямую, как это показано на рисунке. Сообразите, где располагается при этом маленький кружочек, и начертите его карандашом.



5) Тест в подстановке недостающих слов, содержащий 14 заданий, из которых проводятся первое и последнее.

Мальчики и скоро становятся и женщинами.

Не начинать работы, пока не другая.

Фиг. 16.

6. Тест в смешанных соотношениях из 43 заданий, некоторые из которых приводятся ниже:

глаз — видеть
малый — меньше
прошлое — настоящее
лаять — собака
мышь — кошка

ухо — ...
большой — ...
настоящее — ...
мяукать — ...
червяк — ...

Тесты Роджерса являются наилучшими из всех до сих пор опубликованных для определения способности к алгебре и геометрии. Мы полагаем, однако, что ценность их заключается, главным образом, в их большой пригодности для измерения способности к абстрактному мышлению, а также, что всякий тест, хорошо измеряющий указанную способность, может почти так же хорошо предсказать успешность занятий алгеброй и геометрией. Далее приходится отметить, что способности к изучению алгебры и геометрии, вероятно, различаются между собой так же или почти так же, как способность к изучению алгебры от способности к занятиям любым другим отвлеченным предметом, например физикой. Поэтому можно думать, что тесты, специализированные в отношении численных данных и символов, будут служить целям предсказания даже лучше, чем тесты Роджерса. Если бы эти тесты могли быть составлены таким образом, чтобы их можно было применять до приступа к изучению алгебры или геометрии, то это было бы еще одним из их преимуществ. Тесты Роджерса предполагают, что учащиеся занимались уже некоторое время алгеброй; к тому же в них сильно сказывается влияние близкого знакомства с идеями и процессами геометрических доказательств. Мы полагаем, что при составлении тестов, наиболее приспособленных для предсказания способностей к занятиям алгеброй, следует использовать тесты Роджерса № 3 и 5, тесты в решении арифметических задач и тест в решении несистематизированных численных уравнений.

**Измерение
перемены в
интересах и
склонностях
учащихся, вы-
зываемой ал-
гебраическими
занятиями.**

В этом направлении весьма важная и единственная в своем роде работа была выполнена Келлэ (Kelley, 1920). Определение ценных изменений в интересах и склонностях учащихся, приписываемых занятиям алгеброй, и соответствующие тесты, предложенные этим автором, охватывают все главнейшие виды этих изменений и дают возможность оценивать, между прочим, и те виды способностей, для определения которых применяются тесты Института в способности обращения с символами, выбора и установления соотношений, обобщения и систематизации.

Занятиям математикой в школах повышенного типа приписывается, согласно результатам применения тестов Келлэ, следующее влияние на развитие различных способностей учащихся. Эти занятия готовят учащихся к дальнейшей работе в области математики и сродных с ней дисциплин; приучают к пользованию алгебраическими методами решения задач и обращению с символами; ведут к пониманию формул и применению их к решению научных и социально-экономических задач, пониманию методов графического изображения и их применению; способствуют выработке навыка в проверке результатов, оценке количественной (а не только узко качественной) стороны различных положений, установлению различия между известными и неизвестными элементами положения; развивают способность к анализу и обобщению, а равно точность и ясность мышления; наконец, они оказывают положительное влияние и на моральный уровень учащихся.

Эти выводы были получены в результате применения тестов Келлэ, для характеристики которых ниже приводится с некоторыми сокращениями его „тест Альфа“.

1. Сколько уплачено за 5 сторублевых облигаций займа, если получаемые по ним 30 руб. процентных денег в год приносят фактически 6,25% дохода на затраченную сумму?

2. Утверждают, что существует особый вид алгебраического мышления. Что вы думаете по этому поводу?

3. Профессора пригласили приехать в город и прочесть несколько лекций; за это он должен был получить 100 руб. и оплату фактически понесенных им расходов. Он записывал свои расходы и представил следующий счет их:

Февраля 2-го. Билет 19 руб. 10 коп.

Обед 3 руб. 50 коп.

Такси 2 руб. 50 коп.

Счет гостиницы 18 руб. 20 коп.

Первый взнос подписки на заем 50 руб.

Февраля 5-го. Билет 15 руб. 25 коп.

Плаккарта 3 руб. 85 коп.

Просмотрите этот счет по статьям и скажите, достаточно ли он полон, точен и не содержит ли излишних записей.

Если вы находите, что счет составлен недостаточно удовлетворительно, то пересоставьте его так, как это, по вашему мнению, нужно.

4. Какое отношение имеет, по вашему мнению, алгебра к домашнему хозяйству, практической работе в жизни, школьным предметам, как-то: экономике, теоретическим дисциплинам, прочим наукам?

5. Напишите, что, по вашему мнению, является предметом высшей математики. Откуда вы имеете эти сведения? Не можете ли вы дать более полное и точное описание того, что разумеется под названием высшей математики?

6. Каково происхождение наших современных цифр и когда приблизительно они впервые вошли в употребление в европейских странах? Какими цифрами пользовались европейские народы до этого времени и как выполняли они такие действия, как сложение, вычитание, умножение и деление?

7. Площадь круга равна πa^2 . Что обозначает здесь π и a^2 ?

8. Укажите три или четыре задачи, отличных от проработанных вами при классных занятиях, которые можно хорошо объяснить, применяя графические изображения.

9. Алгебраический метод состоит в том, что неизвестную величину предполагают известной, составляют предложение (уравнение), в котором выражают отношение этой последней величины к данным величинам, а затем определяют значение этой неизвестной величины при помощи данных величин (решают уравнение). Не можете ли вы придумать несколько задач, к которым приложим этот метод, подыскав условия из других школьных предметов, помимо алгебры, или из практической жизни? Дайте необходимые пояснения.

10. При решении какого рода задач целесообразно применение логарифмов?

11. Выражение физических законов при помощи математических формул является, вероятно, наиболее совершенным способом изложения научных данных

из числа принятых в современной науке. Так, простая формула: $S = \frac{1}{2} \cdot g t^2$, где S обозначает пространство, проходимое свободно падающим телом, g — ускорение движения под влиянием силы тяготения и t — время падения, лучше поясняет закон тяготения, чем целая книга, которую можно было бы об этом написать.

Напишите несколько других известных вам формул.

Напишите для каждой из следующих тем по два соотношения, которые, по вашему мнению, были или могут быть выражены формулами:

а) электричество (примерный ответ: вероятно, существует формула, выражающая соотношение между силой тока, который может быть пропущен по проводу, и его сечением);

б) воздух (примерный ответ: вероятно, существует формула, выражающая соотношение между температурой воздуха и скоростью распространения в нем звука).

12. Какие полезные развлечения алгебра может сделать еще более интересными?

13. Знаете ли вы какую-либо игру, в которой применяется алгебра? Если знаете, то опишите ее.

14. Один человек сказал другому: „Мой отец — сын твоего отца“. Какова степень родства между ними?

15. Что говорит вам в связи с математикой каждое из следующих имен: Пифагор, Ньютон, Эвклид, Паскаль, Архимед, Лейбниц, Леонардо Пизанский, Декарт?

Полните этот список именами других ученых, известных своими заслугами в области математики, и скажите, чем мы им обязаны в этой области.

16. По ходу прогресса человечества было найдено большое количество понятий и идей. Некоторые из них указаны ниже. Просмотрите и отметьте их цифрами 1, 2, 3 и т. д. в порядке убывающего значения их. Имейте при этом в виду, что наиболее важными являются те из них, которые более всего революционизировали тот или иной процесс. Так, например, современная система нумерации имела чрезвычайно большое значение, так как она заменила собою громоздкую римскую систему, при которой счисление над X , L , C и V , крайне затруднительно даже в случае простого умножения многозначных чисел.

а) Современная система нумерации;

б) представление о буквах x и y как неизвестных величинах в уравнении и буквах a и b как известных величинах;

с) понятие о нуле;

д) представление о том, что $a^2 a^3 = a^5$;

е) представление о том, что $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$;

ф) представление о том, что уравнение может выражать путь планеты или кометы, обращающейся вокруг солнца;

г) представление об уравнении вида: $4y - x = 7$ как о прямой линии;

h) представление о том, что 1 рубль, приносящий 5% годовых, превращается к концу второго года вместе с процентными деньгами в 1 руб. $10\frac{1}{4}$ коп.;

и) представление о том, что если $2x^2 - 10x = 28$, то $x = 7$;

ж) представление о том, что во многих случаях неизвестную величину можно предположить известной и составить соответствующие уравнения, решение которых позволит определить эту неизвестную величину;

к) представление о том, что $ax^2 + bx + c = 0$ выражает то же, что

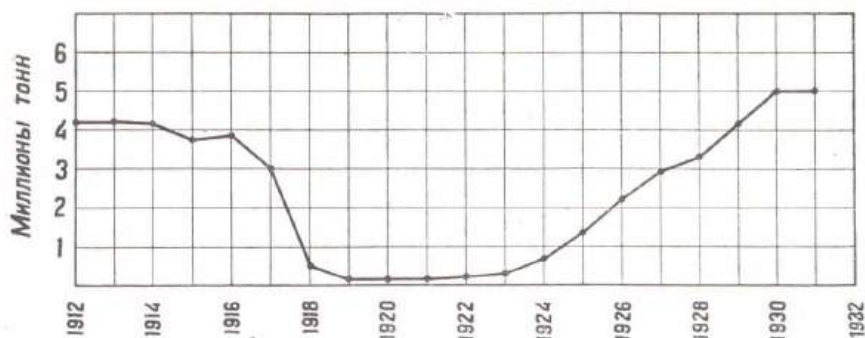
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

17. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. Если площадь треугольника равна ab , то что обозначает a и что обозначает b ?

18. Если F — сила притяжения, c — постоянная величина, M — масса одного тела, m — масса другого тела и D — расстояние между двумя телами, то что обозначает формула: $F = \frac{cMm}{D^2}$?

19. Все живые существа могут быть разделены на две основных группы — мужского и женского пола. Назовите математические символы или действия, которые показывают аналогичное деление на два различных класса. Так как таковых несколько, то приведите их более, чем один.

20. $R = \frac{nr}{1 + (n-1)r}$; $R = 0,90$; $r = 0,45$. Какая величина является в этом уравнении неизвестной? Найдите ее.



Фиг. 17.

21. Приведенная диаграмма показывает выплавку чугуна в миллионах тонн по годам в б. России и СССР. Сколько приблизительно чугуна было выплавлено в 1912, 1922, 1926 и 1931 гг.? Чем вызывалось падение выплавки чугуна в 1918—1922 гг.?

22. Выкройка юбки для фигуры, имеющей 100 см в бедрах, состоит из двух частей, имеющих внизу ширину в 65 см и 75 см. Если надо сделать выкройку для фигуры, имеющей в бедрах 110 см, то насколько надо увеличить внизу ширину обеих частей выкройки?

Использование ответов на эти вопросы как показателей влияния алгебры на различные способности представляет собою тонкую и сложную работу. Указания того, как ее надо выполнять, желающие найдут в работе Келлэ. Для наших целей достаточно только отметить, что разница в указанных результатах обучения сравниваемых групп может быть с успехом измеряема при помощи описанных тестов (конечно, в предположении, что ни учителя, ни ученики не изучают их специально для подготовки к контрольным испытаниям).

СОСТАВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ.!

Общие соображения.

В течение первого года обучения алгебре учащиеся должны приобрести ряд новых способностей. Ниже приводится перечень тех из них, которые, по мнению автора, являются наиболее существенными.

1) Способность понимать формулы, нуждающаяся в таком развитии, чтобы учащиеся были в состоянии отвечать на вопросы, подобные приводимым ниже, или немного более трудные.

$$P = \frac{b_1 b_2}{c_1 + c_2}. \text{ Величины } b_1, b_2, c_1 \text{ и } c_2 \text{ все положительные.}$$

Напишите „больше“, „меньше“ или „не знаю“ в каждом из следующих предложений:

если b_1 увеличивается, то P становится...

„ b_2 „ „ P „ ...

„ c_1 „ „ P „ ...

„ c_2 „ „ P „ ...

$$N = \frac{ab}{c} - d(e - f) + \frac{1,414}{g}. \text{ Величины } a, b, c, d, e, f \text{ и } g \text{ все положительные.}$$

Напишите „больше“, „меньше“ или „не знаю“ в каждом из следующих предложений:

если a увеличивается, то N становится...

„ b „ „ N „ ...

то же в отношении c, d, e, f и g .

2) Способность выразить в виде формулы всякое ясное положение, заключающее в себе определенные количественные соотношения, поскольку такое положение целесообразно выражать в виде формулы.

3) Способность „оценить“ каждую букву или иную значащую единицу, входящую в формулу, подобную одной из приведенных ниже, или еще более сложную.

$$d = \frac{60 \, a \ln}{231};$$

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3;$$

$$v = \frac{h}{6} (A_1 + 4 A_m + A_2);$$

$$A = \pi \frac{Dd}{4};$$

$$C = \frac{nE}{R + nr};$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3};$$

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1};$$

$$\frac{W_0}{W_1} = \frac{R_1^2}{R_v^2};$$

$$F = \frac{Wv^2}{gR};$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{e}{380}};$$

$$t_0 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_0};$$

$$L = \frac{20 \omega \sqrt{n}}{PK};$$

$$S = v_1 t + \frac{1}{2} at^2;$$

$$l = n \sqrt{c^2 + h^2};$$

$$S = 1,35 D^2 + 111 D - 111;$$

$$P = \frac{2\pi sl}{Dy};$$

$$D = 60^2 + 8 H \sqrt{\frac{T-t}{491}};$$

$$A = \pi r \sqrt{h^2 + r^2};$$

$$v = \frac{Ah}{2} + 0,5236 h_2^3;$$

$$Fs = Rs + \frac{Wv^2}{2g}.$$

4) Способность „преобразовывать“ и „решать“ формулы, подобные приведенным выше, в отношении любой из букв или других значащих единиц.

5) Способность составлять уравнения или системы уравнений, выражающие количественные соотношения, с которыми окончивший школу повышенного типа будет хотя бы изредка встречаться, при условии ясного понимания как самого положения, так и всех необходимых данных.

6) Способность решать такого рода уравнения или системы уравнений при условии, что они являются линейными или квадратными. При этом можно допустить в виде исключения небольшое число существенных оригинальных задач, приводящих к такой системе квадратных уравнений, которая не допускает решения обычными элементарными приемами.

7) Способность понимать графические изображения, выражающие зависимость одной переменной величины от другой в Декартовых координатах. Способность графически изображать зависимость одной переменной величины от другой, пользуясь табличными данными или же ясно понятным описанием этой зависимости.

8) Понимание элементарных фактов, выражаемых следующими соотношениями:

$$\begin{array}{ll} y = ax; & y = x^2; \\ y = ax + b; & y = ax^2 + b; \\ y = \frac{a}{x}; & y = ax^2 + bx + c. \\ y = \frac{a}{x} + b; \end{array}$$

То же желательно в отношении следующих уравнений:

$$y = \sqrt{x}; \quad x^2 + y^2 = a; \quad y = a^x.$$

9) Способность находить значение постоянных величин, входящих в эти уравнения, когда даны координаты x , y двух точек линии.

10) Способность выполнять алгебраические вычисления в том объеме, как это необходимо для пользования приведенными выше формулами и уравнениями.

11) Понимание и умение пользоваться отрицательными и дробными показателями.

12) Умение пользоваться логарифмами для умножения, деления, возведения в степень и извлечения корней.

13) Совершенное знание применений алгебры в отношении:

а) формул, выражающих самые числовые отношения, как в следующих, например, случаях:

$$\begin{array}{ll} a \times 0 = 0; & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \\ 0 : a = 0; & \\ a^m a^n = a^{m+n}; & \frac{ax + bx = (a+b)x;}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \\ & 2a \end{array}$$

и других существенных формулировок правил алгебраических вычислений, подобных приведенным выше;

б) некоторых формул, полезных для счисления или понимания сокращенных методов вычисления, как, например:

$$\begin{array}{ll} (a+b)(a-b)=a^2-b^2; & (a-b)^2=a^2-2ab+b^2; \\ a^2-b^2=(a+b)(a-b); & (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3; \\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2; & (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3; \end{array}$$

с) формул, касающихся арифметических и геометрических прогрессий, а также бинорма Ньютона.

14) Понимание значения таких выражений, как: *отношение, прямо и обратно пропорционально, постоянная и переменная величина, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, синус, косинус и тангенс*; понимание соотношения размеров подобных фигур (поскольку это не относится к курсу арифметики); умение пользоваться таблицами корней, степеней, обратных величин, логарифмов, синусов, косинусов и тангенсов.

Все эти способности могут быть приобретены весьма различными путями. С точки зрения математика, плохо знакомого с современными методами школьного обучения алгебре, для развития всех этих способностей ученику достаточно изучить только основные принципы буквенного обозначения, правила знаков, теорию показателей и основные правила, гласящие, что с буквенными обозначениями можно обращаться так же, как с числами. Поэтому он может приступить к изложению начал алгебры следующим образом.

Пусть a , b и c изображают три каких-либо числа. Пусть знаки $+$, $-$, $\times$, $:$, дробная черта, $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, 2 и 3 имеют то же значение, что и в арифметике. Пусть ab или $a \cdot b$ обозначает то же, что $a \times b$. Пусть наконец $(\quad)$ показывают, что с данным выражением надо обращаться, как с одним числом.

$$\begin{array}{lll} +a=0+a; & +b=0+b; & +c=0+c; \\ -a=0-a; & -b=0-b; & -c=0-c. \end{array}$$

Прибавить $-a$ то же самое, что вычесть $+a$.
Вычесть $-a$ то же самое, что прибавить $+a$.

$$\begin{array}{ll} (+a)(+b)=+ab; & (-a)(+b)=-ab; \\ (+a)(-b)=-ab; & (-a)(-b)=+ab; \\ \frac{+a}{+a}=1; & \frac{-a}{+a}=-1; \\ \frac{+a}{-a}=-1; & \frac{-a}{-a}=+1. \end{array}$$

Если равные величины прибавляются к равным, то и суммы равны между собою.

Так, если $a+b=c$, то $a+b+d=c+d$.

Если равные величины вычитаются из равных, то и разности равны между собой.

Так, если $a+b=c$, то $a+b-d=c-d$ и т. д.

Такой метод обучения, конечно, имел бы большие преимущества в смысле систематичности и сжатости. Опыт педагогов показывает, однако, что алгебраические способности не развиваются у учеников из одного лишь понимания нескольких основных отвлеченных законов. Ни один учитель и ни одно руководство не признают в настоящее время, что ученик, которого обучали алгебре, следуя указанному выше методу, твердо понимает, что $(c-d)-(e+f)$ обозначает „вычесть $e+f$ из

$c - d$ “, что $\frac{cd}{a} - \sqrt{a + b + c}$ обозначает „вычесть $\sqrt{a + b + c}$ из $cd : a$ “ или даже, что $7cd^2 - 4cd^2$ обозначает „вычесть $4cd^2$ из $7cd^2$ “.

При том методе преподавания алгебры, который принят в настоящее время, указанные способности строятся на базе весьма большого числа более узких способностей. Так, учащийся усваивает значение более 250 терминов: абсцисса, абсолютная величина, алгебраические действия, алгебраическое решение, аксиома, двучлен, бином, оси, формула и т. д. Он выучивает около 150 правил, подобных следующим: корни одинаковой степени из равных величин равны между собой; чтобы прибавить положительное число к отрицательному, надо найти разность их абсолютных величин и поставить перед нею тот знак, который имеет большее число ($a - 0 = a$, $0 - a = -a$); чтобы найти сумму подобных одночленов, надо найти алгебраическую сумму их коэффициентов и поставить ее перед выражением одночлена. В процессе применения этих правил счисления и решения задач он приобретает ряд разнообразных навыков; так, общий принцип, что „числа можно обозначать буквами“, ведет к созданию по меньшей мере десяти различных представлений, а именно:

1. Буква может обозначать определенное число предметов, как люди, мальчики, яблоки.

2. Буква может обозначать определенное число единиц, как копейки, литры, метры.

3. Буква может обозначать любое число чисел, например: число рублей в общей стоимости определенного числа костюмов данного сорта или числа квадратных метров в площади данного прямоугольника.

4. Буква может обозначать любое число, как в выражении

$$?(p + q)(p - q) = p^2 - q^2.$$

5. Если вы обозначили какое-либо число буквой p , то утроенное число вы можете обозначить любой другой буквой, кроме p , например: q , r или s , но обычно удобнее всего обозначать это утроенное число выражением $3p$.

6. Если вы обозначили какое-либо число буквой p , то число, большее данного на 3, вы можете обозначить любой другой буквой, кроме p , но обычно удобнее всего обозначать это последнее число выражением $p + 3$.

7, 8 и 9. То же в отношении выражений $p - 3$, $\frac{p}{3}$ и $\frac{3}{p}$.

10. Если мы обозначили какое-либо число (например заработок гр. А за январь) буквой p , то никакое другое число мы не должны обозначать той же буквой или подразумевать под той же буквой какое-либо иное количество, пока мы имеем дело с данным положением и решаем соответствующую задачу.

Несмотря на наличие весьма большого опыта в преподавании алгебры, мы, повидимому, не нашли еще необходимого оптимума в составе алгебраических способностей. Реформаторы, каковыми являются Рогг, Кларк и Нонн, не только отказываются от развития некоторых способностей и стремятся развить новые способности, но и изменяют характер и пути развития тех способностей, которые они сохраняют. При этом

они первые же признают, что дальнейшие опыты и углубленное изучение вопроса, вероятно, укажут на новые изменения, которые было бы желательно внести в дело развития алгебраических способностей учащихся. Психолог, внимательно изучающий ход мышления учащихся при обучении их алгебре, начиная с решения простейших формул и кончая обращением с кривыми второго порядка, биномом Ньютона и т. д., найдет много поводов для весьма плодотворного экспериментирования, а также ряд случаев, в которых значительное улучшение может быть сразу же внесено простым применением законов обучения. Ниже мы изложим несколько основных вопросов, касающихся состава алгебраических способностей, а также психологии изучения значений, действий и общих принципов алгебры.

Развитие навыков, которыми обычно пренебрегают.

Упомянутые выше многочисленные правила не покрывают всего того, что ученик должен знать и уметь выполнять. Так, например, на протяжении всего курса алгебры учащемуся приходится решать, когда ему достаточно только обозначить действие и когда он должен выполнить его сполна, применяя какой-либо традиционный прием.

Предположим, что ученик стоит перед необходимостью разделить a на b , a^2 на a , a на a^2 и $\sqrt{625}$ на $\sqrt{10}$. В первом случае ему достаточно только написать $\frac{a}{b}$; во втором случае он должен произвести вычитание показателей степени и написать a ; в третьем случае он не должен производить вычитания показателей степени, а должен написать $\frac{a}{a^2}$ и разделить каждый член дроби на a (следуя обычным методам обучения); наконец, в последнем случае его также обычно учат писать $\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{10}}$,

а затем переходить к выражениям $\sqrt{\frac{625}{10}}$ и $\sqrt{62,5}$ или $\frac{25}{\sqrt{10}}$ или, что еще хуже, $\frac{\sqrt{625} \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \sqrt{10}}$ и $\frac{\sqrt{6250}}{10}$. Нам кажется целесообразным, чтобы

в отношении каждого полезного навыка было определенно установлено, является ли один какой-либо прием наилучшим во всех случаях или же в различных случаях можно пользоваться различными приемами, выбирая всякий раз тот из них, который более всего соответствует данному положению, и чтобы учащиеся хорошо поняли и усвоили это обстоятельство.

В качестве другого примера приведем изучение деления одночлена на одночлен. Обычно изучение это ведется на примерах типа $\frac{a^2}{a}$, $\frac{ab^2c^3}{ab^2c}$, $\frac{27a^3b^3}{9a^2b}$ и т. д., в которых частное является целым числом, и под дробной чертой чисел не остается. Примеры типа $\frac{a}{a^2}$, $\frac{ab^2c}{ab^2c^3}$, $\frac{9a^2b^3}{27a^3b}$ обычно не даются при систематическом изучении деления и крайне

редко встречаются при упражнениях в приведении дробей к простейшей форме. Автор просмотрел в трех распространенных учебниках алгебры весь материал, относящийся к первому году ее изучения и охватывающий как письменные, так и устные упражнения в счислении и решении задач, и обнаружил следующее вопиющее несоответствие в количестве примеров на деление того и другого типа.

Пусть a, b, c и т. д. обозначают какие угодно числа, а x, y, z и т. д. — какие угодно буквы. Тогда число примеров различного типа выразится для указанных трех руководств в следующих средних величинах: $\frac{ax}{b}$ и $\frac{axy}{b}$ встречается 848 раз; $\frac{a}{bx}$ и $\frac{a}{bxy}$ встречается 2 раза; $\frac{ax}{x}, \frac{x^2}{x}$ и $\frac{x^3}{x}$ встречается 245 раз; $\frac{x}{ax}, \frac{x}{x^2}$ и $\frac{x}{x^3}$ встречается 8 раз. Такое соотношение примеров совершенно не отвечает действительному применению алгебры к последующим занятиям математикой и другими теоретическими дисциплинами, а также практическим жизненным задачам. Большие числа, остающиеся буквенные множители и более высокие степени, вероятно, встречаются среди числителей дроби чаще, чем среди ее знаменателей; однако соотношение это никак не может составлять 110 к 1. Если пятнадцатилетние учащиеся встречаются с каким-либо результатом работы в 110 раз чаще, чем с другим — ему противоположным, то они, естественно, приходят к мысли, что этот последний результат неверен или вообще невозможен; они будут испытывать сильное смущение всякий раз, когда в результате деления в знаменателе останутся какие-либо числа или буквы.

Обычный способ изучения деления покоится на традиции, гласящей, что дроби являются трудным предметом, которого не следует касаться до тех пор, пока не будут изучены все действия над целыми числами, и на стремлении подогнать всю работу учащихся под действие двух правил: деления путем вычитания показателей степени и сокращения дробей путем деления числителя и знаменателя на один и тот же множитель. Что касается традиции, то ее давно пора похоронить, так как она основана на неправильной аналогии с арифметикой и ложном представлении, что если дроби в целом трудны, то трудно и все, что их касается. Дробная форма должна применяться при делении одночлена на одночлен самым широким образом. Стремление подвести работу учащихся под действие двух правил само по себе не плохо и может быть сохранено при условии, что пробелы в навыках учащихся будут устранены путем расширения понятия деления в последующем, когда будет проходить сокращение дробей, и что учащимся будет даваться как сейчас, так и впоследствии достаточное количество подходящих упражнений.

Нам кажется, однако, что целесообразнее сразу же придать процессу деления общую форму, вводя $-1, -2$ и 0 как показатели степени, объясняя их значение, допуская a^{-1} наряду с $\frac{1}{a}$ как результат деления

$\frac{a}{a^2}$ или $\frac{a^2}{a^3}$ и распространяя этот прием на все множители, остающиеся под дробной чертой. Огромное большинство учителей будет крайне изумлено предложением изучать что-либо, касающееся отрицательных

показателей, на этой ступени обучения; однако более проницательные учителя отнесутся к нему иначе. Многие из них убедились путем интуиции и опыта в том, что психологи устанавливают, исходя из общих принципов, а именно, что очень часто полезно приводить небольшое количество элементов данной темы или доктрины задолго до того, как она подвергается в целом систематическому изучению. Так, при обучении арифметике мы сообщаем учащимся некоторые сведения, касающиеся сложения дробей, за два или три года до начала систематического изучения этого сложения, учим сложению, вычитанию, умножению и делению рублей и копеек задолго до того, как приступаем к общему изучению десятичных дробей, и делаем это с большой пользой как для первоначальной работы, так и последующей основной.

Устранение бесполезных навыков.

Ученые и учителя страдают двоякого рода маней: изучать все в отношении всего и учить всему в отношении всего, что привлекает наш разум. Первое стремление, несмотря на некоторый педантизм, является одной из важнейших мировых ценностей. Второе также является ею и приобретает еще большее значение, если мы будем его контролировать. В контроле нуждается и алгебра. Педагоги-реформаторы проделали тяжелую работу, стремясь убедить учителей математики, что ненаучно, неразумно и бесчеловечно загромождать изучение детьми алгебры всеми видами разложения на множители, которые только можно изобрести, или же разукрашивать простое выражение вида $x^2 - y^2$ таким образом, чтобы его едва можно было различить опытным взглядом математика. Такое загромождение обучения излишним материалом нуждается в контроле.

В качестве примера рассмотрим случай изучения корней. Представим себе, что мы совершенно отказались как от обычных упражнений с корнями, так и от обычного общего систематического изучения степеней в течение первого года занятий алгеброй и взамен того ознакомили учащихся с некоторыми фактами, касающимися дробных и отрицательных показателей, которые проходятся значительно позже, а также со следующими данными:

1. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$. Если $a = b$, то $a^m = b^m$. Основные понятия о кор-

нях.

2. $\sqrt[n]{a}$ означает $a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a}$ означает $a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a}$ означает $a^{\frac{1}{n}}$ и т. д.

$\sqrt[n]{a^3}$ означает $a^{\frac{3}{n}}$, $\sqrt[n]{a^4}$ означает $a^{\frac{4}{n}}$, $\sqrt[n]{a^5}$ означает $a^{\frac{5}{n}}$ и т. д.

$\sqrt[n]{a^2}$ означает $a^{\frac{2}{n}}$, $\sqrt[n]{a^3}$ означает $a^{\frac{3}{n}}$, $\sqrt[n]{a^4}$ означает $a^{\frac{4}{n}}$ и т. д.

3. Если в каком-либо примере вы встретитесь с $\sqrt[n]{\quad}$, $\sqrt[n]{\quad}$ или $\sqrt[n]{\quad}$, то замените его равнозначущим выражением, содержащим только показатели степени (и если нужно — скобки).

4. Если после умножения, деления, возвышения в степень и определения корней при помощи одних только показателей какое-либо арифметическое число будет иметь показатель, отличный от 1, то найдите его величину при помощи таблиц степеней и корней или таблиц

логарифмов; если же этих таблиц у вас нет, то попробуйте определить эту величину путем проб и последовательных исправлений.

5. Если вы видите, что вычисления могут быть упрощены каким-либо приемом, как, например, в случае $(5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{5}{3}}) = 5 - 7$, то используйте этот прием.

Это наше предложение также, вероятно, поразит многих учителей. Они подумают или скорее предположат, что общее представление о показателях слишком трудно для столь раннего изучения, что $\sqrt{x}$ должен предшествовать $x^{\frac{1}{2}}$, а не следовать за ним, и что мы наносим серьезный ущерб обучению алгебре, исключая примеры, столь стимулирующие изобретательность, как $\sqrt[3]{9} (27) \sqrt{3}, (\sqrt{8} + \sqrt{7}) (\sqrt{8} + 2 \sqrt{7}),$

$\sqrt[4]{\frac{2}{3^8}}$ или $\frac{2 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{2}}$, заменяя корни эквивалентными им дробными степенями и рекомендуя упрощать вычисление последних при помощи таблиц.

Эти возражения заслуживают того, чтобы остановиться на них подробно. Затруднения, которые ученики испытывают при изучении общей теории дробных и отрицательных показателей, создаются в значительной мере нами же самими. Те сведения, которые учащиеся приобретают в обычных курсах о корнях, знаках радикала, иррациональных величинах и упрощении соответствующих алгебраических выражений, препятствуют им изучать общую теорию. „Если подразумевается число 2,

когда мы пишем $\sqrt{\quad}$, то почему оно превращается в $\frac{1}{2}$? Если нужно выполнить два отдельных действия, чтобы найти величину выражения

$\sqrt[3]{8^2}$, то как мы можем написать вместо него просто $8^{\frac{2}{3}}$ и почему 3 попадает при этом под дробную черту? Если, взглянув на выражение $\sqrt[3]{a^4}$, я сразу же могу написать $a^{\frac{4}{3}}$, то зачем мне изображать его в виде $a^{\frac{4}{3}}$? Во всяком случае почему нельзя оставить меня в покое и предоставить мне идти по старому пути, усвоенному с таким трудом?“ — таковы аргументы, невольно рождающиеся у учащихся.

Надо отметить также, что наши обычные „объяснения“ приемов обращения с показателями только усиливают затруднения для всех учеников, кроме наиболее способных. Обычно мы поступаем так: показываем им, почему изложенные приемы должны быть правильными, подтверждаем это на примерах, затем сводим их к весьма отвлеченным правилам:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \text{ каковы бы ни были } m \text{ и } n,$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ каковы бы ни были } m \text{ и } n,$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \text{ каковы бы ни были } m \text{ и } n,$$

и изводим разъяснениями тех учеников, которые не могут этого как следует усвоить.

В действительности же затруднения учащихся кроются отнюдь не в том, что у них рождаются какие-либо логические возражения или что

разум их противится нововведениям. К несчастью, многие из них совсем не смутились бы, если бы, сказав им, что a^2 всегда обозначает $10a$, мы приняли далее, что $a^3 = 100a$ и т. д. Немного помогает пониманию ими разумности новой системы и знание того, что $a^m \times a^n = a^{m+n}$ и т. д. Главное затруднение, с которым сталкиваются учащиеся, это непривычка к подобного рода выражениям и незнание того, что с ними надлежит делать. Учащиеся теряются, сталкиваясь с такими странными показателями. Поэтому прежде всего надо добиться, чтобы они совершенно освоились с выражениями вида $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$ и т. п. Далее необходимо, чтобы они установили, какие численные результаты дает применение нового приема, убедившись, что $a^{\frac{5}{2}}$ обозначает то же, что $a^{2\frac{1}{2}}$, и лежит между a^2 и a^3 , что 10^{-4} равно $\frac{1}{10000}$ и т. д. Для этого весьма полезны упражнения с рядом чисел, подобных приведенным ниже:

$10^4 = 10000;$	$4^{\frac{3}{5}} = 64;$	$9^{\frac{3}{8}} = 729;$
$10^3 = 1000;$	$4^{\frac{5}{2}} = 32;$	$9^{\frac{3}{3}} \leq 350 +;$
$10^{2\frac{1}{2}} \leq 316;$	$4^{\frac{4}{2}} = 16;$	$9^{\frac{3}{3}} \leq 168 +;$
$10^2 = 100;$	$4^{\frac{3}{2}} = 8;$	$9^{\frac{6}{3}} \leq 81;$
$10^{1\frac{3}{4}} \leq 56,2;$	$4^{\frac{2}{2}} = 4;$	$9^{\frac{5}{3}} = 38,9;$
$10^{1\frac{1}{2}} \leq 31,6;$	$4^{\frac{1}{2}} = 2;$	$9^{\frac{4}{3}} \leq 18,7;$
$10^{1\frac{1}{4}} \leq 17,8;$		$9^{\frac{3}{3}} = 9;$
$10^{\frac{3}{4}} \leq 10;$		$9^{\frac{2}{3}} \leq 4,3267;$
$10^{\frac{2}{3}} \leq 5,6234;$		$9^{\frac{1}{3}} \leq 2,0800;$
$10^{\frac{1}{3}} \leq 4,6416;$		
$10^{\frac{1}{2}} \leq 3,1623;$		
$10^{\frac{1}{3}} \leq 2,1544;$		
$10^{\frac{1}{4}} \leq 1,7782;$		

Третье обстоятельство, на которое следует обратить внимание, — это достаточное количество упражнений над этими выражениями; учащиеся должны научиться выполнять их правильно и без раздумья над тем, что им надлежит делать, что при этом получается, почему полезно этим заниматься и каким образом формула $a^m \times a^n = a^{m+n}$ и подобные ей суммируются в стройную систему правил, охватывающих все те действия, которые они уже научились выполнять и проверять, чтобы быть уверенными в правильности результата. Многие ученики, которым эти формулы представляются при начале занятий пустыми словесными приказаниями, начинают смотреть на них после достаточного количества подходящих упражнений и проверок как на прекрасную сводку того, что они изучили.

Второе возражение, что $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ и $\sqrt[4]{x}$ должны предшествовать $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$ и $x^{\frac{1}{4}}$, основывается на смешении того, что нам привычно, с тем, что действительно просто и естественно. Впрочем, нерасположение к дробным показателям отчасти вызывается, вероятно, принятым спосо-

бом печатать их слишком мелким шрифтом. В действительности, знаки $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ являются лучшими символами, чем $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, во всех отношениях, кроме двух: их легко смешать с обыкновенными дробями, и они реже попадают нам, чем знаки радикала. Однако учащиеся высшей школы застрахованы от первого неудобства продолжительной практикой с выражениями типа a^2 , a^3 , a^4 и т. д.; второе же неудобство можно обойти, изучая оба вида обозначений, но начиная с дробных показателей; этого следует придерживаться, приступая к изучению корней в алгебре, когда бы оно ни начиналось, сообщая учащимся, что квадратный корень из a обозначается в алгебре, как $a^{\frac{1}{2}}$, иногда же, как $\sqrt{a}$.

Третьим возражением было то, что разрешение учащимся определять иррациональные величины при помощи различных таблиц, логарифмов или приближенных вычислений вместо преобразования их лишает алгебру некоторой доли ее влияния на интеллектуальное развитие. Может быть, это и так, но общий результат изучения радикалов как логической и последовательной системы приложения общей теории степеней более, чем компенсирует эту потерю. Изучение корней так, как это практикуется в настоящее время, представляет собою смесь ряда правил и хитроумных приемов. Нам представляется поэтому, что в конечном счете не менее трех четвертей времени, отводимого в настоящее время изучению корней, можно сберечь с пользой, а не с вредом для развития учащихся.

В заключение необходимо сделать одно замечание. Некоторые учителя и авторы руководств, признавая ценность применения общей системы степеней к изучению радикалов, прибегают к нему попутно, как *альтернативному* способу выполнения счисления. Так поступать не следует — мы настаиваем на том, чтобы знак $\sqrt{\quad}$ вообще был заменен показателями степени и чтобы учащийся усвоил соответствующие эквивалентные выражения в той мере, в какой ему это необходимо для чтения книг, в которых применяется знак $\sqrt{\quad}$. Если отвлечься от этого последнего требования, то чем меньше он будет иметь дела с $\sqrt[3]{a^2}$ и т. д. и чем больше он будет упражняться над $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{3}{2}}$ и т. д., тем лучше это будет с нашей точки зрения.

Гибкие навыки и жесткие правила.

Строгость определений и универсальность правил являются главнейшими достоинствами алгебры, и мы должны высоко ценить их. Однако отсюда не вытекает, что мы должны признавать алгебраические правила универсальными в тех случаях, когда они этим свойством не обладают, или приписывать строгость таким определениям, которые мы вскоре же изменяем. Если определение действительно только в течение некоторого количества времени, а правило применимо только к ограниченному числу случаев, то лучше развивать у учащихся ряд свободных и гибких навыков, чем внедрять в их сознание ряд правил, которые впоследствии приходится улучшать или даже отменять.

Для примера рассмотрим следующие два определения и два пра-

1) если выражение разлагается на два множителя, то каждый из них называется коэффициентом другого;

2) члены, различающиеся только коэффициентами, называются подобными;

3) чтобы сложить подобные члены, надо сложить их коэффициенты и проставить полученную сумму перед общим множителем;

4) при сложении многочленов мы записываем подобные члены в один столбец, складываем их, а затем записываем суммы их как многочлен.

Обратимся теперь к выражению $4ab^2c$. По первому определению b^2 можно рассматривать как коэффициент при $4ac$ и следовало бы так рассматривать, хотя обычно мы этого и не делаем; равным образом $4ab^2$ согласно определению является коэффициентом при c . Рассмотрим далее выражение $5a^2b^3c$, приняв $5a^2b^3$ за один множитель и c — за другой. Согласно второму определению $4ab^2c$ и $5a^2b^3c$ могут быть названы подобными членами, и их следовало бы так называть; однако едва ли из пятидесяти учителей найдется один, который так поступает и не поправляет учащихся, считающих эти члены подобными. Пусть теперь нам надо сложить $3abc + 3ab^2c + 5a^2b^2c$ и $6adc + 7cef + 16\frac{abc^2}{c} + 8abc$.

Руководствуясь третьим и четвертым правилами, должны ли мы записать в один столбец все эти члены, только первый и последний или же первый, последний и предпоследний?

В действительности приведенные предложения являются не определениями и правилами, а лишь формулировками привычных приемов, основанных на опыте обращения с некоторыми величинами и выражениями, которыми мы пользуемся, дабы указать ученику, что надо рассматривать как коэффициент и какие члены надо собирать при сложении. Шутник легко мог бы составить серию таких упражнений в первоначальном сложении, что старательный ученик, пытающийся при выполнении их следовать известным ему определениям и правилам, впал бы в крайнее смущение. Не лучше ли поэтому развивать полезные навыки в сложении и вычитании, не претендуя на то, чтобы они являлись логическими выводами из определений и правил? Еще один пример. Предложение — „всякое алгебраическое выражение, части которого не отделены друг от друга знаками $+$ или $-$, называется одночленом“ — дается как строгое определение. Однако вскоре же ученику приходится рассматривать выражение $3(ab - cd)$ как одночлен, а еще немного спустя принимать $\frac{12a^2b^2c}{3abc}$ за два одночлена, хотя в этом выражении и отсутствуют разделяющие знаки $+$ и $-$.

Особенно следует предостеречь против приравнивания к общим аксиомам и принципам таких технически удобных приемов, как хотя бы расположение членов по возрастающим или убывающим степеням перед умножением или делением многочленов, записывание в одном столбце подобных членов или проставление первым числового коэффициента при записи одночленов. Применение подобного рода „правил“, которые ученик может нарушать, не получая неправильных ответов, грозит подорвать в нем уважение и доверие к действительно непреложным правилам. Если мы будем подводить под действие приемов все то, что может быть сделано при помощи их одних, то мы лишь усилим значение тех вещей,

которые действительно имеют характер принципов. Так, с точки зрения психолога предложение „если к равным величинам прибавить равные же величины, то получатся и равные результаты“ следует учить как правило, „перенос“ же членов равенства, как бы полезен он ни был, следует сообщать как удобный прием. Психологи предпочитают во многих случаях приемы не потому, что они недооценивают значения алгебраических правил и принципов, а скорее потому, что они ценят последние весьма высоко и не хотят, чтобы они обесценивались и применялись неправильно.

ГЛАВА VIII.

СОСТАВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ.

(продолжение).

Изучение алгебраических понятий, терминов и приемов.

Изучение значений.

Изучение буквенных обозначений, коэффициентов, показателей степени, множителей, радикалов, иррациональных величин, корней уравнения и т. д. ведется таким образом, что сперва дается определение и несколько иллюстративных примеров, а затем новый факт или символ применяются в алгебраическом счислении.

Так, например, типичный первый урок алгебры, посвященный ознакомлению со значением буквенных обозначений, ведется обычно следующим образом.

В арифметике все числа обозначаются цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. В алгебре числа обозначаются не только цифрами, но и буквами. Познакомимся с буквенным обозначением чисел.

Пример 1. Подросток зарабатывает 2 руб. в день. Сколько он заработает а) в 2 дня? б) в 8 дней? в) в какое-либо число дней?

На третий вопрос мы отвечаем: „Столько рублей, сколько получается от умножения двух на число дней“.

В алгебре этот ответ выражается следующим образом.

Пусть n равно числу дней.

Тогда $2 \times n$ равно числу заработанных рублей.

Поэтому, если $n = 3$, то заработок равен $2 \times n = 2 \times 3$, или 6; если $n = 7$, то заработок равен $2 \times n = 2 \times 7$, или 14.

Пример 2. Сколько карандашей: а) в 4 дюжинах? б) в любом числе дюжин?

Пусть x равно числу дюжин.

Тогда $12x$ равно числу предметов в x дюжинах.

При этом предполагается, повидимому, что учащийся приобретает понимание значения, руководствуясь в основном определением, и укрепляет это понимание на примерах.

Какими бы достоинствами ни обладал этот метод преподавания, все же приходится сказать, что указанное предположение справедливо лишь в отношении незначительного числа наиболее способных учеников; большинство же из них вовсе не приобретает понимания значений непосредственно из определений и иллюстративных примеров и не удерживает их в памяти благодаря последующему применению. Обычно из определений и иллюстративных примеров учащиеся почерпают лишь расплывчатые, неполные и частично неправильные представления; в дальнейшем они применяют их так, как умеют, и постепенно совершен-

ствуют их. Приведенный выше пример урока создает в большинстве учеников лишь немногим большее предрасположение рассматривать n дней, f рублей, m яблок, p конфет и d недель как числа дней, рублей и т. д., чем как простые опечатки или даже нелепые выражения. Еще менее способствует он развитию у учащихся представления о том, что числа, выраженные цифрами, можно умножать на числа, выраженные буквами, или что числа, выраженные буквами, являются такими величинами, которые можно складывать, вычитать, умножать и делить.

Если ученикам, добросовестно проработавшим тот же урок, предложить ряд задач, подобных приведенным ниже, то число правильных ответов будет весьма небольшим.

1. Сколько копеек в f рублях?
2. Сколько рублей в f копейках?
3. Сколько метров в n метрах без 4 м?
4. Сколько будет x копеек и 7 копеек?
5. Сколько копеек в g рублях и h рублях вместе?
6. У Вани m яблок, а у Феди на n яблок больше, чем у Вани. Сколько яблок у Феди?
7. Маня купила p конфет и съела из них g конфет. Сколько конфет у нее осталось?
8. Во сколько дней Алиса может заработать b рублей, если в день она зарабатывает c рублей?
9. Сколько зарабатывает Нелли в d дней, если она зарабатывает e рублей в день?

Давая ученикам подобного рода упражнения и указывая им, когда их ответы правильны или ошибочны, мы со временем добьемся понимания учащимися значения буквенных обозначений. Таким образом понимание значений приобретает не сразу, путем изучения определений и иллюстративных примеров, а постепенно, путем оперирования с соответствующими объектами — буквами, коэффициентами, показателями, уравнениями и т. д.

Не приходится, конечно, отрицать, что усваивать значение на основе определений легче всего именно при изучении алгебры. Понятия, которые должны быть приобретены, отличаются ясностью, могут быть строго определены, свободны от исключений и вариантов, не зависят от времени, места или окружающей обстановки и подготовлены к восприятию учащимися благодаря предшествующим занятиям арифметикой, поскольку в большинстве случаев они являются лишь расширением арифметических понятий. В то же время определения, с которыми приходится иметь дело в алгебре, отличаются большей реальностью и определенностью, чем определения, встречающиеся во всех других школьных предметах за исключением геометрии. И все же наблюдения показывают, что при занятиях алгеброй ученики гораздо лучше усваивают понятия буквенных обозначений, коэффициентов, показателей и т. д. путем непосредственного обращения с ними, чем путем аналитического исследования соответствующих определений; то, что они *проделывают* под данными величинами, получая определенные результаты, учит их гораздо большему, чем то, что им *говорят* о тех же величинах. Исходя из этих соображений, Рогг и Кларк, тщательно исследовав школьные условия обучения алгебре, широко пошли на замену изучения определений специальными последовательными упражнениями, при которых личная деятельность учащихся постепенно подводит их к пониманию терминов.

Сказанное относится не только к детям, приступающим к занятиям алгеброй, но и к взрослым, обладающим значительно большими навыками и знаниями. Пусть читатель возьмет хотя бы труд Ю. Я. „Теория статистики“ (Yule, Theory of Statistics) и посмотрит, каким образом приобретаются сведения о вариации, квадратичных отклонениях, коэффициентах корреляции и т. д.; он убедится, что проработка задач играет при этом не меньшую роль, чем определения, пояснения и иллюстративные примеры, относящиеся к тем же понятиям. Надо думать, что взрослым все же легче усвоить статистические понятия путем непосредственного анализа определений и изучения нескольких иллюстративных примеров, чем детям, обучающимся первый год в школе повышенного типа, приобрести представления о буквенных обозначениях, многочленах, знаках координат в четырех квадрантах, дробных показателях и т. д.

В сущности учащиеся усваивают понятия о коэффициентах, показателях степени, иррациональных величинах и т. д. путем непосредственного обращения с последними, совершенно так же, как это имеет место в отношении кислорода, водорода и серы или же бактерий, амёб, дифтерита и оспы. Разница только в одном: словесные описания более применимы к математическим фактам, ограниченным узким кругом чисел и величин и немногочисленными соотношениями, чем к биологическим или медицинским явлениям, в которых играют роль цвет, размер, форма, химический состав, сложные соотношения и многочисленные видоизменения.

Усвоение значений совершается учащимися при изучении ими алгебры *постепенно* — совершенно так же, как это имеет место при изучении ими других, менее формальных дисциплин. Чтобы убедиться в этом положении, достаточно предложить учащимся выполнить помещаемое ниже упражнение после нескольких уроков, в течение которых ученикам объяснена замена чисел буквами, возможность составлять формулы, в которые входят буквенные величины, и даны пояснения и иллюстративные примеры аксиом, касающиеся прибавления равных величин к равным и вычитания равных величин из равных:

$$ax + b = 0.$$

Составьте формулу для определения x и примените ее к определению x в каждом из следующих уравнений:

$$\frac{3x}{8} + p = 0; \quad \frac{ax}{b} + c = 0; \quad \frac{bx}{a} + (c + b) = 0.$$

Мы тотчас же убедимся, что ученики (за исключением весьма небольшого числа наиболее способных) не могут вынести из этих ранних уроков действительного понимания значения буквенных обозначений или формул. Последнее приобретается постепенно при выполнении сложения, вычитания, умножения, деления, переноса членов, решения уравнений и т. д. Алгебраическое счисление не является просто рядом технических приемов, изучаемых учащимися в целях получения некоторых ответов; оно является одним из главных средств, при помощи которых они приобретают представление об „обобщении арифметики“, об алгебре как таковой, о возможности выражать количественные соотношения при помощи формул и уравнений, о системе показателей и т. д.

Изучение алгебраического счисления.

Обычный способ изучения алгебраического счисления состоит в установлении какого-либо правила или приема, в пояснении того, что правило это верно и почему

именно, в применении этого правила к нескольким примерам, а затем проделывании учащимися такого количества упражнений, которое необходимо для приобретения навыка в выполнении данного действия без размышления о том, каким именно образом надо его выполнять и почему надо идти именно данным путем. Принцип или правило и обоснование их предшествуют всему остальному, выполнение же действий совершается в соответствии с установленным принципом или правилом. Количество и характер объяснений того, что данный прием правилен и почему именно, колеблются в весьма широких пределах, но все же при этом всегда предполагается, что ученик сперва изучает, как он должен выполнять данное действие на основании общего правила, а затем постепенно приобретает выполнять его почти или вовсе без размышления.

Современная психология относится, однако, весьма подозрительно ко всем случаям, в которых навыки предполагаются легко выводимыми из принципов. Весьма часто оказывается, что действительно эффективные принципы являются результатом навыков, а не причиной, их порождающей. Поведение человека определяет его совесть, повидимому, в большей мере, чем последняя — его поведение. Принципы, как правило, не являются общими, и действие их скорее ограничивается теми областями, в которых они обычно применялись. Юнг (Young) заметил, что когда ученики должны были определить значение, скажем, e в уравнении

$a = 1,4b + \frac{c}{e}$, то они обычно рассуждали так: „Пусть $x = e$; тогда

$a = 1,4b + \frac{c}{x}$ “ и т. д. При обучении арифметике в обычных школьных

условиях понимание того, как надо „переносить“ при сложении, обращаться с частными произведениями при умножении, ставить десятичную запятую и т. д. — достигается многими учениками лишь после того, как они проделают соответствующие упражнения большое число раз; многие ученики научаются выполнять действия в первой стадии путем простого подражания, не обращая почти никакого внимания на общие правила, устанавливающие „как и почему“, и достигают понимания последних лишь после приобретения навыков в выполнении действий, которые описываются или доказываются этими правилами.

Конечно, при занятиях с учениками школ повышенного типа начинать изучение данного приема с принципа или правила, чтобы затем применить его к выработке определенных навыков, легче, чем при занятиях с учащимися низших и нормальных школ, и при изучении алгебры легче, чем при занятиях хотя бы иностранным языком. Ученики школ повышенного типа принадлежат, за редкими исключениями, к той части населения, которая обладает предрасположением к абстрактному мышлению. Алгебраические действия чрезвычайно ясны и допускают полное описание их, причины же, почему надо поступать так-то и так-то, весьма легко понять и усвоить. Так, например, правила $a^m \times a^n = a^{m+n}$ и $(a^m)^n = a^{mn}$ являются едва ли не лучшими среди всех правил, изучаемых в школах.

Тем не менее мы утверждаем, что учащийся в той же мере изучает

алгебраические правила, выполняя действия, в какой он изучает действия, знакомясь с правилами. Мы утверждаем, что образование таких специальных навыков (хотя бы путем простого подражания и некритического восприятия), как $a^2 \times a = a^3$, $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^3 \times a^2 = a^5$, $b^2 \times b = b^3$ и т. д., является естественной и полезной ступенью к изучению общих приемов умножения. Учащийся претворяет совокупность своих навыков в правила в такой же мере, в какой он развивает новые навыки на основе правил. Изучение алгебраического счисления не является только или преимущественно изучением правил применения их; оно является также построением системы навыков или связей, которые разъясняют, укрепляют и частично создают понимание того, что обозначают правила и когда их надо применять.

Человеку, привыкшему к абстрактному мышлению и изучившему алгебру, последняя представляется системой дедукций, исходящих из некоторых определений, аксиом и весьма общих законов (как, например, $a + b + c = b + a + c = c + b + a$ или $abc = bac = bca = acb$). Для большинства же учащихся алгебра является преимущественно предметом, развивающим более или менее частные представления или связи (как $a \times ab = a^2b$, $a(a + b) = a^2 + ab$, a обозначает 1 a , $-a \times -b = +ab$ и т. д.), учащим пользоваться некоторыми из них совместно, организуя в дальнейшем более содержательные навыки и представления, суммирующим знания, приобретенные в отношении правил, и таким путем постепенно развивающим понимание того, что надлежит делать с буквенными обозначениями и почему именно.

Чтобы убедиться в значении и превосходстве этого процесса ассоциирования и образования связей, следует посмотреть, как постепенно изменялись методы обучения алгебре и какие основные ошибки допускались педагогами.

Вообще говоря, с течением времени изучению правил придается все меньшее и меньшее значение как учителями, так и составителями руководств. Вот как пытались учить алгебраическому счислению во второй половине прошлого столетия (Davies, 1866, стр. 56 и след.):

Умножения.

41. 1. Если рабочий зарабатывает a рублей в 1 день, то сколько он заработает в 6 дней?

Анализ. В 6 дней он заработает в шесть раз больше, чем в 1 день. Если он зарабатывает a рублей в 1 день, то в 6 дней он зарабатывает $6a$ рублей.

2. Если одна кепка стоит d рублей, то сколько стоят 9 кепок? (Отв.: $9d$ рублей.)

3. Если 1 пара перчаток стоит c рублей, то сколько стоят 10 пар? (Отв. $10c$ рублей.)

4. Если 1 воротничок стоит b копеек, то сколько стоят 40 воротничков? (Отв. $40b$ копеек.)

5. Если 1 м ситца стоит b копеек, то сколько стоят a метров ситца?

Анализ. Если 1 м ситца стоит b копеек, то a метров будут стоить столько раз по b копеек, сколько единиц в a или b , взятое a раз, т. е. ba , что обозначает произведение b на a или a на b .

Умножение есть действие, посредством которого находится произведение двух количеств.

Количество, которое умножается, называется множимым; количество, на которое умножают, называется множителем, результат умножения называется произведением. Множимое и множитель называются сомножителями произведения.

6. Если рабочий зарабатывает $3a$ руб. в пятидневку, то сколько зарабатывает он в течение $4b$ пятидневок? $3a \times 4b = 12ab$.

Если мы предположим, что $a = 4$ руб., а $b = 3$ пятидневкам, то произведение будет равно 144 руб.

Замечание. В арифметике было уже доказано, что произведение не изменяется от перестановки множителей, поэтому:

$$12 ab = a \times b \times 12 = b \times a \times 12 = a \times 12 \times b.$$

Умножение положительных одночленов.

42. Умножить $3 a^2 b^2$ на $2 a^2 b$. Пишем:

$$3 a^2 b^2 \times 2 a^2 b = 3 \times 2 a^2 a^2 b^2 b = 3 \times 2 a a a b b b.$$

В последнем выражении a повторяется множителем 4 и $b - 3$ раза; поэтому:

$$3 a^2 b^2 \times 2 a^2 b = 3 \times 2 a^4 b^3 = 6 a^4 b^3.$$

Выполняя умножение, мы перемножаем коэффициенты и складываем показатели одинаковых букв.

Подобным же образом может быть найдено произведение любых двух положительных одночленов. Отсюда вытекает

Правило.

I. Чтобы найти новый коэффициент, перемножьте данные коэффициенты.

II. Напишите за этим коэффициентом все буквы, входящие в оба одночлена, поставив у каждой из них показатель степени, равный сумме ее показателей в обоих множителях.

41. Что такое умножение? Как называется величина, которую мы умножаем? Как называется величина, на которую мы умножаем? Как называется результат умножения?

42. Скажите правило умножения одного одночлена на другой.

Приведенная выдержка точно передает характер преподавания алгебры в прошлом и представляет большой интерес, резко оттеняя контраст между прежними и современными методами обучения этому предмету. Нелишним будет отметить, что применение правила умножения положительных одночленов заканчивается следующим примером: „Умножьте $70 a^8 b^7 c^4 d^2 f x$ на $12 a^7 b^5 c^3 d x^2 y^4$ “.

В настоящее время в хороших школах редко можно услышать призыв учителя: „Скажите правило“ — при начальной стадии изучения какого-либо действия; иллюстративным примерам уделяется большое внимание; тщательно подобранных упражнений, помогающих образованию умственных связей, дается достаточно большое количество. Далее, все более входит в обычай давать учащимся сродные *арифметические* упражнения в целях восстановления умственных связей, которые ученик приобрел в результате прошлых своих занятий арифметикой, и модификации их для применения при алгебраических занятиях. Упражнения, базирующиеся на том или ином правиле, даются сейчас в таком виде, что учащиеся могут их выполнять и не понимая вначале правила.

Так, например, правило: „Чтобы сложить положительное число с отрицательным, надо найти разность их абсолютных величин и поставить знак, который имеет большее число“, сопровождается задачами о подъемнике, перемещающемся вверх и вниз, грузовике, делающем рейсы в ту и другую сторону, приходах и расходах семьи, выигрыше и проигрыше в игре и т. д. Не только психология, но и здравый смысл свидетельствуют, что эти задачи гораздо лучше помогают учащимся выучить правило, чем последнее помогает им решать подобного рода задачи.

Сами правила принимают все более и более форму удобного описания того, что мы делаем, а не изложения закона, как мы должны

думать. Так, например, правило: „Знак минус, стоящий перед числом, обозначает, что это число надо вычесть“, т. е.

— 4 обозначает, что 4 надо вычесть,

— a „ „ „ a „ „

— mp^2 „ „ „ mp^2 „ „

предназначается, очевидно, для того, чтобы избавить учащегося от необходимости думать над различием между знаком — как обозначением положения числа в отношении нуля и тем же знаком как обозначением действия вычитания. Это различие сознательно скрывается, чтобы помочь ученику в использовании тех связей, которые должны быть образованы. Приводя этот пример, автор отнюдь не берет на себя защиты указанного способа унифицирования навыков, связанных со знаком минус. Он обращает лишь внимание на то, что иногда при установлении правила „логика“ приносится в жертву удобству создания полезных и необходимых связей. Некоторые педагоги, стремясь подчеркнуть различие между двумя указанными значениями знака минус, рекомендуют ставить минус над буквой, чтобы обозначить положение числа в отношении нуля, и перед буквой, чтобы обозначить действие; таким образом, они приходят к обозначениям:

$$+\overline{a}, -\overline{a}, +\overset{+}{a} \text{ и } -\overset{+}{a}.$$

Этот прием хорош тем, что полезные, но различные умственные связи или навыки не мешают одни другим, как это наблюдается в настоящее время.

Упражнения, требующие применения правила, приобретают все более и более форму последовательных серий примеров, поясняющих значение правила. Принятый ранее обычай смотреть на упражнения преимущественно как на средство обнаружить слабые места в знании учащимися правил постепенно исчезает; подобного рода упражнения даются в небольшом числе и лишь тогда, когда изучение данной темы достаточно уже продвинулось.

Из того, что было до сих пор изложено, у читателей может сложиться впечатление, будто психологи считают сообщение правила при начале изучения какой-либо темы плохим педагогическим приемом. Это было бы неправильно. Мы полагаем, что в ряде случаев раннее сообщение правила весьма желательно. Так, иногда правило может прекрасно стимулировать постановку полезных вопросов. Это легко показать на следующем примере. Правила: „Одинаковые степени равных величин равны между собою“ и „Одинаковые корни из равных величин равны между собою, если правильно учитывать знаки“, легко подводят нас к вопросу: „Как можно возводить в квадрат и куб и извлекать квадратный и кубический корни, будучи уверенным в правильности получаемых результатов?“ Ученик, который обычно получил бы из знания указанных двух правил только первоначальное смутное представление о том, что кто-то возводит в степень и извлекает корни и что ему надо будет вскоре изучить что-то, касающееся этих действий, может с успехом воспользоваться этими правилами благодаря помощи указанного выше и вытекающего из них вопроса. Правило может быть полезным, стимулируя работу хотя бы и без подробного указания ее или указы-

вая работу, но не помогая ее выполнять, или, наконец, помогая выполнять её, но лишь в качестве менее существенного фактора. Правила находят многочисленные применения. Но все же, говоря вообще, лучше меньше применять их в качестве незыблемых законов при начале изучения данной темы и рассматривать их как удобный словесный итог того, что учащийся *уже научился выполнять*.

Обращаясь к другим вопросам, связанным с изучением алгебраического счисления, остановимся прежде всего на сравнении этого последнего с решением задач. Весьма часто приходится слышать, что оно оказывает лишь малое влияние на интеллектуальное развитие, является „механическим“, опирается только на память, носит „формальный“ характер, тогда как жизнь требует реальности. Можно подумать, что если мы произведем испытание учащихся при помощи тестов общего развития, способности к счислению и способности к решению задач, то коэффициент корреляции между вторым и первым будет равен, примерно, нулю, а между третьим и первым — единице. В действительности дело обстоит совсем не так.

Правда, можно представить себе ученика, который умеет обращаться с коэффициентами, показателями, корнями, знаками и т. д., опираясь только на некоторые твердые правила и весьма мало понимая, что он делает и почему именно. Однако научить ученика алгебраическому счислению таким путем весьма трудно. Если ученик не понимает алгебры, повторяет правила, как попугай, и выполняет действия так же, как ученый пудель проделывает свои трюки, то ему приходится запоминать огромное число не связанных между собою фактов, весьма быстро приводящих его в полное замешательство. Только при понимании алгебры каждый приобретенный навык обычно помогает образованию и удержанию в памяти других, являясь составной частью одного большого целого. Поэтому обычно наблюдается не то, что учащиеся выучиваются выполнять алгебраическое счисление механически, не понимая алгебры, а то, что они вообще не выучиваются выполнять счисления. Если же ученик выучивается счислению, то он обычно приобретает и понимание алгебры.

Что же касается вопроса о соотношении между общим развитием и способностью к счислению и решению задач, то в этом направлении автором были произведены две серии опытов. Не вдаваясь в подробности, укажем, что в первом случае испытанию подверглись две группы студентов колледжа и технологического института, общей численностью в 75 человек, причем средний коэффициент корреляции оказался равным для алгебраического счисления 0,53 и для решения алгебраических задач 0,66 по отношению к общему развитию. Во втором случае испытанию было подвергнуто свыше 700 поступающих в высшие школы, причем в отличие от первого случая соответствующий тест содержал не алгебраические, а арифметические задачи. Средний коэффициент корреляции оказался в этом случае равным 0,50 для счисления и 0,63 для решения задач. Если представить себе, что этим испытаниям были бы подвергнуты не данные учащиеся, а большая группа лиц, произвольно отобранная из состава всего населения и подвергнутая соответствующему обучению до восемнадцатилетнего возраста, то эти коэффициенты корреляции значительно увеличились бы и достигли, вероятно, 0,80 и 0,90.

Таким образом, можно считать доказанным на опыте, что способность к алгебраическому счислению является интеллектуальной способностью. Она несколько уступает в смысле влияния на общее развитие способности к решению задач частью потому, что требует меньшего отвлечения, отбора и оригинального мышления, частью потому, что оперирует только с числами, а не с числами и словами. Но это несколько не меняет того положения, что алгебраическое счисление весьма далеко от механического процесса, который можно изучить и применять без размышления.

Следующим вопросом, который уместно здесь затронуть, поскольку он касается главным образом алгебраического счисления, является влияние изменения данных на успешность выполнения заданий. Современная психология учит, что всякое изменение в частных, конкретных явлениях и фактах, лежащих в основе продуманного уже суждения, до некоторой степени вредит рассуждению, делая его менее точным или более медленным или вызывая оба эти последствия. Чтобы проверить, в какой мере это положение распространяется на алгебраические занятия, автором были произведены соответствующие испытания различных групп учащихся. Для этого им были составлены два ряда по 9 примеров, причем в первом из них задания были изложены в привычной для учащихся форме (I), а во втором — в видоизмененной (II). Ниже приводятся оба указанных ряда примеров.

I.

1. Найдите квадрат выражения $x + y$.
2. Чему равен квадрат выражения $a^2 x^3$?
3. Упростите выражение

$$4ac + \left(\frac{b^2}{c^2} \times \frac{c^2}{d^2} \times \frac{d^3}{b} \right).$$

4. Разложите на множители выражение $x^2 - y^2$.
5. Умножьте x^a на x^b .
6. Упростите выражение

$$ac - [a(b + c)].$$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 15; \\ 2x + y + 3z &= 22; \\ x + 2y + z &= 25. \end{aligned}$$

8. $e^2 + ef = \frac{g}{x}$. Чему равно x ?

9. Имеются два числа; сумма первого числа и утроенного второго числа равна 7; сумма первого числа и пять раз взятого второго числа равна 11. Чему равны эти числа?

II.

1. Найдите квадрат выражения

$$b_1 + b_2.$$

2. Чему равен квадрат выражения

$$r_1^3 r_2^2 ?$$

3. Упростите выражение $5a^2b + (b^2 : c^2)(c^2 : d^2)(d^3 : b)$.

4. Разложите на множители выражение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

5. Умножьте $4a$ на $4b$.

6. Упростите выражение

$$p_1 p_3 - [p_1(p_2 - p_3)].$$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 15; \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= 22; \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 25. \end{aligned}$$

8. $e^2 + ef = \frac{g}{p}$. Чему равно p ?

9. $y = ax + b$.

Когда $x = 3$, то $y = 7$.

Когда $x = 5$, то $y = 11$.

Чему равно a ?

Чему равно b ?

Некоторое количество этих примеров в той или иной комбинации давалось для решения учащимся, разбитым на три почти равных груп-

пы общей численностью в 97 человек; при этом некоторые задания давались не в той форме, как они приведены в столбце II, а слегка видоизмененной; так, например, возведение в квадрат выражения $b_1 + b_2$ заменялось умножением $(b_1 + b_2)$ на $(b_1 - b_2)$, для упрощения предлагалось выражение $mn - [2n(m - p)]$ и т. д. Сравнивая оба ряда заданий, легко убедиться, что решение каждого двух сопряженных примеров требует применения одного и того же принципа и что изменение касается лишь частных данных, начиная с простой замены буквы x буквой p или выражения $x + y$ выражением $b_1 + b_2$ и кончая заменой привычной формулировки условий задачи мало знакомым для учащихся изложением соотношений между ее данными. Результаты испытаний приводятся ниже в отношении каждого из примеров, причем в первом столбце таблички указан номер примера, а во втором и третьем — проценты неправильных и неполных ответов, полученных при решении заданий и обычной и, соответственно, измененной форме:

1. 6;	28.	4. 22;	41.	7. 62;	61.
2. 34	47.	5. 55;	70,5.	8. 52;	53.
3. 37,5;	64,5.	6. 25;	53.	9. 16;	70.

Легко видеть, что во всех случаях, кроме двух (примеры 7 и 8), изменение данных вызвало весьма существенные затруднения; огромное расхождение при решении примера 9 вызвалось, по всей вероятности, не столько изменением в характере данных, сколько необходимостью приложения другого принципа и выполнения иных действий; в отношении примера 6 может быть отмечено, что затруднения вызвала не только замена одних буквенных обозначений другими, но и постановка знака минус вместо знака плюс в измененном задании.

Подобные же испытания в слегка измененной форме были произведены автором над тремя другими группами учащихся, общей численностью в 118 человек. Процент неверных ответов, полученных при решении отдельных примеров, оказался при этом отличным от приведенного в таблице; однако общая тенденция подтвердилась полностью, в некоторых же случаях даже еще более ярко.

Отсюда неизбежно вытекает вывод, что даже такое незначительное изменение, как замена привычных букв a , b или x , y буквами k , p или p_1 , p_2 или p_I , p_{II} и т. д., весьма существенно затрудняет мышление. Это обстоятельство должно быть учтено при алгебраических занятиях, особенно же при изучении алгебраического счисления. В самом деле, если мы ограничимся при этих занятиях только теми буквенными обозначениями и формулировками, которые в силу традиции до сих пор применялись в алгебре, и не сделаем некоторого количества упражнений с теми символами, которые обычно встречаются в физике, технических дисциплинах и т. д., то мы очень затрудним положение учащихся, переходящих к изучению этих дисциплин. Поэтому как при изучении алгебраического счисления, так и при обращении с формулами и уравнениями необходимо уделять внимание упражнениям, в которых обычные обозначения и формулировки заменены новыми, применяемыми в других отраслях знания. Соответствующие краткие указания читатель найдет в различных главах настоящей книги.

Заканчивая раздел об изучении алгебраического счисления, полезно отметить еще следующее обстоятельство. Саймондс (Symonds, 1922)

нашел, что многие ошибки, совершаемые учащимися при занятиях алгебраическим счислением, можно объяснить, главным образом, недостаточностью умственных связей и неспособностью добиться правильного совокупного действия нескольких связей, из которых каждая достаточна в случае некоторого простого положения. При этом необходимо иметь в виду, что учащиеся, с которыми имел дело указанный автор, принадлежали к числу успевающих в других школьных предметах; они отнюдь не были неспособными к изучению общих законов алгебры и работающими на основе лишь голых навыков, определяющих их успехи и неудачи. Если подобные дефекты в алгебраической работе, вызываемые пробелами в надлежащем направлении, прочности и правильной организации алгебраических сопоставлений или связей, наблюдались в отношении учеников, обладающих, вообще говоря, хорошим развитием, то у учеников, стоящих несколько ниже по развитию, указанные недостатки проявятся в еще большей степени.

Поэтому необходимо твердо помнить, что обучение алгебраическому счислению в значительной мере сводится и должно сводиться к образованию и организации системы умственных сопоставлений или связей. Педагогам и психологам надлежит установить, каковы эти связи, какого количества упражнений требует каждая из них, как должны быть распределены эти упражнения, какой порядок и метод образования этих связей наиболее обеспечивает полезное взаимодействие их и сводит к минимуму возможную взаимную помеху.

Изучение общих принципов.

Общая психология и педагогика мышления в отношении анализа, абстракции и рассуждения остаются при обучении алгебре теми же самыми, что и при преподавании арифметики. В отношении арифметики эта тема была достаточно полно освещена автором в главах 3, 4, 9 и 10 его работы „Психология арифметики“. Поэтому здесь возможно ограничиться лишь приведением соответствующих выводов. Если читатель затруднится понять или признать эти последние, то ему следует обратиться к работам, освещающим ту же тему в отношении арифметики.

Признание важности умственных ассоциаций, связей или навыков при обучении алгебре вовсе не означает собою принесения им в жертву так называемых „высших способностей“ к абстрагированию, обобщению и рассуждению. В действительности эти высшие способности являются сотрудничеством многих малых навыков, созданных правильно и в должном соотношении, применительно к данному случаю. Равное или даже большее овладение общими принципами алгебры обеспечивается постепенным усвоением их в процессе изучения алгебры и как результат этого изучения — в большей степени, чем требованием от учащихся, чтобы они сразу овладели ими как средством изучения этого предмета. Для очень способных учащихся это, может быть, влечет за собою потерю времени и тренировки в рассуждении, но для большинства учащихся это только полезно. Вместо того чтобы требовать от учащегося овладения значениями, правилами и общими принципами на основе словесных описаний и затруднять ему изучение алгебры, пока он ими не овладеет, мы образуем связи, которые ложатся в основу алгебраических навыков, полезных во всяком случае, и стимулируют понимание принципов, поскольку он овладевает этими навыками.

СОСТАВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

(продолжение).

Выбор частных умственных связей, подлежащих образованию.

Желательные умственные связи, которыми в настоящее время часто пренебрегают.

В предыдущей главе мы отметили уже влияние изменения данных на успешность алгебраических занятий. Поэтому в целях придания большей общности алгебраическим символам, облегчения работы учащихся при последующих занятиях физико-математическими и техническими дисциплинами, а также предотвращения образования ошибочных представлений, что l' , l'' , l''' или p_1 , p_2 , p_3 и т. д., выражающие хотя бы длину маятника в сантиметрах, обозначают тем большие величины, чем больше индекс, мы должны озаботиться созданием связей (bonds) не только с прописными буквами латинского алфавита, но и с заглавными буквами, всякого рода индексами и т. д. и пользоваться не только буквами a , b , c и x , y , z , но и всеми другими. В упражнениях следует также вводить по мере надобности символы, обозначающие углы, массу, время, ускорение и т. д.

Далее необходимо обратить внимание на создание связей между положением „прочитать формулу или равенство“ и представлением соотношений, ими выражаемых. Так, уметь читать формулу $P = \frac{AV}{M} - K$, значит — знать, что P увеличивается с увеличением A и V и уменьшается с увеличением M по законам линейной зависимости, причем для определения P всякий раз необходимо отнять K от $\frac{AV}{M}$. Проф. Гедрик (Hedrick) особенно подчеркивает значение этих связей для понимания соотношений. При обычных методах преподавания, которые были приняты ранее, этим связям не уделялось никакого внимания, но и при современных методах обучения алгебре мы не добьемся образования их у учащихся, за исключением, может быть, наиболее способных, если не проделаем ряда соответствующих упражнений. Из числа 182 учеников, обучающихся алгебре в течение одного-двух лет в хорошо поставленных школах, но имевших дело только с *решением* уравнений, половина не могла правильно решить примеров, подобных изложенным ниже:

$P_1 = \frac{b_1 b_2}{c_1 + c_2}$; величины b_1 , b_2 , c_1 и c_2 все положительны. Напишите „увеличивается“ „уменьшается“ или „не знаю“ в конце каждой фразы.

Если b_1	увеличивается,	то P	...
„ b_2	„	„ P	...
„ c_1	„	„ P	...
„ c_2	„	„ P	...

В то же время три четверти этих учеников правильно решали задачи, подобные приведенным ниже, которые являлись для них привычными:

Если некоторое число удвоить и прибавить к нему 2, а затем утроить и вычесть из него 7, то получатся равные величины. Найти это число.

Если удвоить первое число и сложить с утроенным вторым числом, то получится 2; если умножить первое число на 6, а второе на 10 и сложить, то получится 7. Найдите оба числа.

Чему равна диагональ прямоугольника, стороны которого равны 8 дм и 7 дм?

Связи между „чтением таблиц значений переменной величины“ и „рассмотрением отношения между каждым из этих значений и прочими, а также совокупности их как общей системы отношений“ должны быть образованы или по крайней мере подготовлены к образованию. Упражнения в интерполировании, графическом изображении табличных данных, составлении уравнений, выражающих зависимость между теми же данными (поскольку это является целесообразным), а также оценка соотношения между этими данными (например „каждое из чисел 2-го столбца приблизительно в . . . раз больше каждого из соответствующих чисел 1-го столбца“ или — „если прибавить к каждому из чисел 2-го столбца . . . , то получатся числа в . . . раз больше соответствующих чисел 1-го столбца“) являются весьма полезными при прохождении курса алгебры. Изучение отношений и пропорций очень хорошо совмещается с упражнениями над табличными данными.

Далее, необходимо образование связей между самым видом буквенного уравнения и представлением того, что оно выражает, путь, по которому действительно протекают в жизни некоторые явления. Для этого имеются два основных средства: 1) упражнения над формулами и преобразованием их, выполняемые таким образом, чтобы каждая формула принимала вид наиболее удобный для выражения того или иного соотношения, и 2) получение общего ответа к задаче наряду с частным ответом, соответствующим и частным значениям данных отношений.

После того как будет в основном изучено уравнение $y = ax + b$ и его графическое изображение, необходимо развить навыки в переходе от общих положений к отысканию x или y по данным частным значениям x либо y из уравнения $y = ax + b$. Это является основной задачей. Решение уравнений вида $ax + b = 0$ должно рассматриваться как частный случай отыскания x , когда дан y ; изучение подобных уравнений обособленно* вредит правильному представлению учащихся о линейных уравнениях.

При изучении зависимости одной переменной величины от другой следует развить связи между графическим изображением этой зависимости в виде линии и графическим изображением данных величин в виде прямоугольных столбиков. Последние должны делаться все тоньше и тоньше, так чтобы учащийся видел, что концы их располагаются на кривой, становящейся все более плавной по мере сокращения величины оснований этих столбиков и соответственно — интервалов между табличными данными, положенными в основу составления графика. Впоследствии следует развить связь между графическим изображением зависимости одной переменной величины от другой и графиком, образуемым движущейся точкой; это может быть достигнуто, если один ученик будет перемещать свой карандаш вдоль оси x -ов, а другой будет перемещать свой карандаш, отмечая, когда $y = x$ или $2x$, $\frac{1}{2}x$, $4 + x$ и т. д.

Первое из указанных двух предлагаемых дополнений обычного приема нанесения точек и соединения их линиями преследует цель сочетать алгебраическую графику с требованиями жизни, так как в большинстве

случаев нам бывает нужно определить, как изменяется y при постепенном возрастании x от 0 до 1, от 1 до 2 и т. д. Второе дополнение имеет целью вселить в учащихся сознание, что y изменяется одновременно с x . При обычном методе изучения графических изображений x является не столько переменной величиной, сколько рядом постоянных величин; движение красного карандаша, соответствующее изменению x , и синего карандаша, соответствующее изменению y и совершаемое синхронно с первым, помогает заполнить указанный пробел.

Необходимо также обратить внимание на образование связей между фактами, касающимися отношений, и словесными формами, которыми мы пользуемся, оперируя этими отношениями. Наиболее важной из этих словесных форм является: „ p во столько-то раз больше (тяжелее, длиннее, шире и т. д.), чем q “, или „ p составляет такую-то долю q “. Следующей по важности формой надо считать: „ p относится к q , как . . . к . . .“, где помеченные точками пробелы заполняются лишь в целях более легкого запоминания или удобства вычисления. Третьей формой является: „Такой-то коэффициент или величина (удельный вес, соотношение питательности, освещенность площади и т. д.) представляет собою отношение такой-то величины к такой-то“. В этом случае надо знать, что такая-то первая величина является числителем, а такая-то вторая — знаменателем некоторой дроби. Эту форму следовало бы заменить другой, именно: „Такой-то коэффициент или величина равняются такой-то величине, деленной на такую-то“, что, вероятно, привело бы к экономии не одной сотни тысяч часов учебных занятий у обучающихся алгебре и началам физико-математических наук в течение первого года пребывания их в школе повышенного типа. Часть этого времени мы можем также сэкономить, внушив учащимся, что „отношение такой-то величины к такой-то обозначает такая-то величина“. Пока эти связи не образовались, весьма трудно усвоить, что такое отношение, и еще труднее правильно применять в нужных случаях знание отношений.

Весьма важное значение имеют связи между счислением и проверкой такового. Жизнь требует не только умения определить размер посевной площади или процентных денег, получаемых с данного капитала, и оценить приблизительно такую-то величину, но и приложения некоторых общих соотношений и законов, требующего выполнения алгебраических вычислений. Ученики готовятся к тому, чтобы вступить в жизнь и обходиться без учителя, инспектирующего их работу: к тому же они достаточно подросли, чтобы нести ответственность за свою работу. Поэтому последняя должна быть точной; в настоящее время она не является таковой, что мы покажем в главе XII.

В настоящее время учителя все же часто требуют простейшей проверки вычислений. Обычно таковая выполняется путем вторичного выполнения всей проделанной работы, скажем, через полчаса, затраченных на другую работу. Для многих учеников это является весьма приятным времяпрепровождением. Однако является более целесообразным не только советовать или требовать от учеников проверки хотя бы решения уравнений, но и сурово взыскивать с них за неправильные ответы. Далее следует ввести в практику проверку результатов вычислений с числами при применении правила знаков и упразднения скобок путем замены чисел буквенными обозначениями.

Нежелательные связи, часто образующиеся в настоящее время.

Весьма важно обнаружить и исключить все бесполезные и ненужные связи, которые в настоящее время образуются при изучении алгебры, так как мы весьма заинтересованы в том, чтобы освободить время для занятий с формулами, графическими изображениями, соотношениями двух переменных величин и хотя бы краткими упражнениями с логарифмами и применением таблиц синусов, косинусов и тангенсов. К тому же мы считаем, что изучение алгебры в течение первого года обучения в школе повышенного типа должно являться образцовым во всех отношениях.

Сложные вычисления.

В предыдущей главе мы уже отметили как общее мнение педагогов и, в частности, преподавателей математики, что сложные и запутанные вычисления, которые лишь редко или никогда не встречаются в практической работе, должны быть опущены. В принципе против этого никто не возражает, но в действительности требование умения выполнять подобного рода вычисления все еще остается в силе. В качестве примера можно указать, что в одном из американских городов, отличающемся весьма хорошей постановкой обучения, и притом в школах, руководимых прогрессивными учителями, мы встретились в 1916 г. с упражнениями, большинство из которых предполагает подробное знание разложения многочленов, т. е. наименее существенной части курса алгебры. Тишечные формы этих упражнений приводятся ниже.

I. Разложение на множители.

$$\begin{array}{ll} m^2x^2 \pm 2mnx + n^2y^2; & ax^2 \pm bx \pm a; \\ x^2 \pm ax \pm b; & a^2x^2 - b^2y^2; \\ m^2 \pm 2mn + n^2 - a^2k^2; & x^3 \pm a^3. \end{array}$$

II. Особые случаи умножения.

$$\begin{array}{ll} (ax \pm by)^2; & (m \pm n \pm a)(m \pm n \pm a); \\ (m + n)(m - n); & (x \pm a)(x \pm b); \\ (a \pm b \pm c \pm d)^2; & (ax \pm by)(cx \pm dy). \\ (a \pm x)^3; & \end{array}$$

III. Дроби.

а) Примеры на сложение и вычитание.

б) Примеры на умножение и деление.

Указанные примеры не требуют разложения на множители или сокращенного умножения, как в разделах I и II; каждый из примеров содержит не более двух дробных выражений. Примеры иллюстрируют действия над дробями простейшего вида.

IV. Уравнения.

а) Решение уравнений путем разложения на множители:

$$\begin{array}{l} x^2 - a^2 = 0; \\ x^2 \pm 2ax + a^2 = 0; \\ ax^2 \pm bx \pm c = 0. \end{array}$$

б) Решение системы уравнений:

$$ax + by = c; \quad a^2x^2 + b^2y^2 = c^2.$$

Бесполезные и фантастиче- ские задачи.

Ранее было указано, что почти половину задач, содержащихся в стандартных курсах алгебры, можно считать нереальной, так как ответы, получаемые при их решении, в действительной жизни не нужны; связывать же изучение алгебры с подобного рода занятиями явно нецелесообразно. Равным образом не следует обучать учеников применению алгебры в таких случаях, когда простой счет или измерение могут быстрее и удобнее дать требуемый результат. Наконец, учащимся не следует задавать бессодержательных или бессмысленных задач, которые принижают в их представлении значение алгебры.

Эти положения расходятся с точкой зрения многих учителей, возражающих: „Но задачи предназначаются только для детей, а последним безразлично, имеют ли они дело с людьми или гномами, футбольными мячами или последовательными числами“. Может быть в некоторых школах подобное явление и имеет место, но это несколько не ослабляет нашей позиции. В самом деле, если ученики не знают, о чем именно трактуется в данной задаче, то они приобретают весьма плохую привычку решать задачи, обращая внимание только на числа и соотношения и совершенно упуская из виду описываемые положения. Такое отношение к задачам обуславливается, по всей вероятности, тем, что последние остаются неиспользованными как средство развития мышления.

Другое возражение против нашей критики нереальных задач базируется на том, что некоторые великие математики проявляли интерес к подобного рода задачам. Так, Баскара обращается к молодой женщине со следующим вопросом: „Пчелы, в количестве корня квадратного из половины общего числа их в рое, перелетели на куст жасмина; за ними последовали восемь девятых роя, остались только пчелиная матка и один трутень, жужжащий в цветке лотоса, который привлёк его ночью своим ароматом. Скажи мне, любезная женщина, сколько пчел в этом рое“. Эвклид, как известно, является автором задачи: „Мул и осел шли на рынок, нагруженные пшеницей; мул сказал ослу: „Если бы ты дал мне одну меру пшеницы, то я нес бы вдвое больше тебя, а если бы я дал тебе одну меру, то наши ноши сравнялись бы“. Скажи мне, ученый геометр, сколько несли они пшеницы“. Надгробную эпитафию, которую сочинил Диофант, мы привели уже выше.

По этому поводу приходится сказать, что ученики, обладающие хорошими математическими способностями и большим интересом к математике, несомненно, заинтересуются этими задачами, так как математическое содержание последних будет стоять у них на первом плане; что же касается остальных учеников, то они обратят внимание в первую очередь на текст задач и найдут их весьма неразумными. Если ограничивать знакомство учащихся с алгеброй применением последней к решению подобного рода задач, то они сочтут алгебру глупым занятием; равным образом, если они будут знать об Эвклиде или Диофанте только то, что последние сочиняли такие задачи, то мнение их об этих математиках будет весьма невысоким. Необходимо отметить также, что удовольствие, которое может быть получено от решения подобного рода задач, связывается у учащихся до некоторой степени с сознанием своего превосходства.

Ненужные и нежелательные термины, определения и выражения.

При прочих равных условиях изучение алгебры не должно находиться в зависимости от редко встречающихся и несущественных выражений. От учеников не следует требовать решения задач, которые они могут прочесть лишь при помощи словаря, или заставлять их изучать объяснения, изложенные малопонятным для них языком.

Новые технические термины, применение которых желательно, должны быть, конечно, усвоены. Характер и количество их должны быть определены учителем или соответствующим руководством. При этом учащиеся должны усвоить некоторое количество слов, неизвестных значительной части их и носящих политехнический и нетехнический характер (как, например, *приближенный, оси, предпосылка*), поскольку последние полезны как для изучения алгебры, так и для общего развития учеников. Все же, как правило, изучение алгебры не должно осложняться трудными или неясными словесными выражениями.

Современные руководства в этом отношении несколько грешат. Так, на первых пятидесяти страницах трех наиболее распространенных американских учебников, предназначенных для первого года обучения алгебре, можно найти свыше пятидесяти собственных имен (*Декарт, Диофант, Лейбниц, Виета* и др.) и терминов (*элементарный, идентичный, потенциальный, многоугольник* и др.), которые требуют специальных объяснений со стороны учителя и некоторых усилий для запоминания со стороны учащихся. При этом значительная часть этих терминов могла бы быть с успехом заменена более распространенными и более известными словами. Если же мы возьмем эти руководства в целом, то обнаружим, что два из них, принадлежащих к числу наилучших, применяют в совокупности 580 выражений, которые не входят в первые десять тысяч слов, наиболее важных по своему значению; правда, некоторые из этих терминов заслуживают изучения; однако большинство из них может быть опущено без всякого ущерба для изучения алгебры.

Вообще в этом вопросе надлежит руководствоваться следующими четырьмя правилами. Во-первых, чем меньше применяется технических терминов, тем это лучше при прочих равных условиях. Во-вторых, для каждого отдельного факта или принципа, являющегося самодовлеющей единицей при умственной работе, желательно иметь и собственное имя. В-третьих, термины должны быть, насколько это возможно, описательными и точными. В-четвертых, способности, которые при этом надо развить, должны быть направлены не на установление и определение этих терминов, а на правильное пользование последними для прикладных целей.

Для определения того, какие термины существенно необходимы и какие являются излишними или малополезными, следует время от времени устанавливать: какие факты, действия или принципы учащимися вполне усвоены, хотя названия таковых ими забыты, и обратно — какие термины сохранились в их памяти, хотя представление о фактах, действиях и принципах ими утрачено. Как в том, так и в другом случае соответствующие термины являются, очевидно, малополезными. В качестве примера можно указать, что лишь весьма немногие лица отличают *уменьшаемое* от *вычитаемого*, хотя и выполняют вычитание совершенно правильно; обратно — весьма многие помнят слова *парабола, гиперболы, синус и косинус*, хотя и не представляют себе реального значения этих терминов.

В целях проверки, какие из терминов, обычно встречающихся в курсах элементарной алгебры (числом более 500), имеют существенное значение и какие являются излишними, автор произвел соответствующий опрос шести известных математиков и авторов руководств, шести психологов, знакомых с условиями обучения алгебре, и двенадцати студентов, знакомых с практикой преподавания этого предмета. Результаты получились не очень отчетливыми, но в общем подтвердили положение, что число терминов и собственных имен, которое встречается в настоящее время в курсах элементарной алгебры, является чрезмерно большим.

Излишние связи. Одна из аксиом элементарного обучения гласит: „Не создавайте двух или более привычек в тех случаях, когда можно вполне обойтись одной“. К сожалению, современное преподавание алгебры часто не считается с этим разумным положением.

Ярким примером этого является решение квадратных уравнений. Последнее обычно базируют вначале на разложении трехчлена на множители; однако впоследствии переходят к решению квадратных уравнений

при помощи формулы: $\frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, чаще всего применяемой

в упрощенной форме: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; к этому нередко присоединяют

еще решение квадратных уравнений путем проб и подстановок в качестве третьего способа.

В реальных жизненных условиях пользование формулой не только заменяет два других способа решения квадратных уравнений, но и является наилучшим способом их решения. Пристрастие педагогов к решению квадратных уравнений при помощи разложения трехчлена на множители может быть объяснено двумя причинами: с одной стороны, увлечением находчивостью, которая требуется от учеников при разложении трехчлена на множители, а с другой — опасением, что пользование формулой не дает наглядного и доказательного ответа и сопряжено для учащихся в ряде случаев с затруднениями; так, имея дело с уравнением $x^2 + \frac{x}{2} - 7 = 4$, учащийся не знает, что же принять за a ,

может поставить 2 вместо b и не сообразить, что надо принять за c : 4,7 или — 11. По поводу первого соображения приходится возразить, что разложение трехчлена на множители может представлять интерес только для наиболее способных учеников, в жизни же не имеет никакого практического значения и не является более тонкой и остроумной операцией, чем применение формулы. По поводу второго соображения следует указать, что обращение с формулой требует некоторого навыка, но что последний приобретается гораздо легче, чем умение разлагать трехчлен на множители, и что убеждение в правильности ответов, получаемых при помощи формулы, может быть легко получено путем подстановки. Таким образом, единственным правильным методом является решение уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ при помощи формулы, при установлении которой надо добиться представления о роли и значении коэффициентов a , b и c .

Следующим ярким примером образования излишних связей при преподавании алгебры является изучение иррациональных величин. Здесь

мы то пытаемся обратить их в рациональные величины, то заменяем корни приближенным значением их, то оставляем некоторое время в нетронутном виде в надежде, что в результате умножения и деления они исчезнут сами собою и перестанут нам докучать.

Представим себе, что эти способы обращения с иррациональными величинами мы заменяем одним правилом (исходя из предположения,

что учащиеся уже знают, что $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, что $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ и

что равные степени равных величин равны между собою), а именно:

„Когда вы приходите при вычислениях до корней $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д., то заменяйте их числами 1,414, 1,732; 2,236 и т. д., если вы не находите более простого способа освободиться от них“. Такое предложение может показаться на первый взгляд просто диким. Но в конце концов, если учащийся не находит способов обращения с иррациональными величинами, разумно ли учить его пользоваться ими?! Далее, не этим ли именно путем решается целый ряд числовых задач, которые учащемуся попадают вне курсов алгебры? Автору кажется, что лучше заставить учеников потерять изредка время на применение 1,414 вместо $\sqrt{2}$, хотя это последнее выражение и было бы более удобным, чем оставлять их

в полной растерянности перед таким хотя бы выражением, как $\frac{1,6\sqrt{2,94}}{6 + \sqrt{2}}$.

которое они то пытаются упростить путем умножения на $\sqrt{2}$ или $6 - \sqrt{2}$ или же $6 + \sqrt{2}$, то просто оставляют нетронутым, забыв, что надо в таких случаях предпринимать. Впрочем, более существенное улучшение в дело изучения иррациональных величин может быть внесено введением дробных и отрицательных показателей, как уже было указано в главе VII.

Способы сокращенных вычислений.

Если имеются два метода, один из которых более сложен, но общеприменим, другой же более прост, но имеет ограниченную область применения, то, вообще говоря, полезно владеть ими обоими. Однако предварительно надо посмотреть, окупается ли затрата времени на изучение второго метода той экономией усилий, которую он может нам впоследствии дать.

В настоящее время при обучении алгебре на ознакомление со способами сокращенных вычислений (сокращенным умножением, разложением на множители, обращением с иррациональными величинами) затрачивается довольно значительное количество времени. При этом изучение таких выражений, как

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \text{ и } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

приведение знаменателей к виду $(\quad)^{\frac{1}{2}} - (\quad)^{\frac{1}{2}}$ или $(\quad)^{\frac{1}{2}} +$

$(\quad)^{\frac{1}{2}}$, а также знакомство с биномом Ньютона, представляет существенное значение, связанное к тому же не только с сокращенными вычислениями, поскольку соответствующие знания весьма полезны в ряде физико-математических дисциплин и при выполнении статистических работ

и приобретаются к тому же довольно легко. Казалось бы, что и умение разложить трехчлен вида $c_1x^2 + c_2x + c_3$ на произведение двух двучленов вида $c_4x + c_5$ и $c_6x + c_7$ представляет собою полезное знание, так как его можно применить при сложении и вычитании дробей, имеющих подобные трехчлены знаменателями, и тем упростить вычисления, равно как при решении квадратных уравнений, где подобный трехчлен приравнивается 0. К тому же отыскание c_4 , c_5 , c_6 и c_7 развивает в учащихся находчивость.

Таким образом разложение на множители можно взять за образец такого способа сокращенных вычислений, который как будто следует изучать. С точки зрения психолога дело обстоит, однако, несколько иначе. В самом деле, и в жизни и в научной работе мы встречаемся с дробями, имеющими в знаменателе трехчлены, крайне редко; если же учесть, что значительная доля этих трехчленов не поддается удобному разложению на множители и что даже выполненное разложение при данной комбинации знаменателей в задаче не приводит к желаемому упрощению, то мы приходим к заключению, что экономия времени, получаемая в исключительно редких случаях выгодного применения разложения, не составляет, может быть, и одной миллионной доли времени, затрачиваемого всеми учениками на изучение указанного способа сокращенного вычисления. Равным образом и разложение на множители как способ решения квадратных уравнений ни в какой мере не оправдывает затраты времени на его изучение.

Далее, частое применение способов сокращенных вычислений создает у учащихся привычку рассчитывать на то, что конечный результат придет „сам собою“, без большой затраты труда, и рассматривать получение целых чисел и простых буквенных выражений как доказательство (хотя бы частичное) правильности полученного ответа. Правда, для выяснения принципов, анализа их и облегчения их применения желательно и даже необходимо воздерживаться от сложных и запутанных вычислений и допускать широкое применение целых чисел, простых множителей, точных квадратов и т. д. Однако расширять область применения этих последних отнюдь не следует. Поэтому нужна большая осмотрительность и в применении способов сокращенных вычислений, которые основаны на некоторых специальных комбинациях целых чисел, простейших множителей и т. д. К тому же сокращенные вычисления затуманивают в представлении учащихся значение буквенных обозначений как абстрактных величин, независимых от данных положений и обладающих большой общностью; в интересах развития этого представления и экономии времени при обучении счислению мы должны проделывать очень большую работу над a , b и другими буквенными обозначениями, рассматриваемыми абстрактно; разумно ли усложнять эту работу сотнями упражнений, долженствующими развить навык в выполнении сокращенных вычислений?

Часто приходится слышать, что ученики, обладающие большим общим развитием и лучшими математическими способностями, чем другие, легче и охотнее справляются с разложением на множители трехчленов $c_1x^2 + c_2x + c_3$, чем с однообразным применением формулы

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Но это отнюдь еще не доказывает, что для них изучение разложения имеет преимущества перед изучением общих способов выполнения вычислений; еще менее это доказывает, что именно так надо вести преподавание в отношении всей группы учащихся в целом.

Наконец, не следует закрывать глаза на то, что допущение изучения способов сокращенных вычислений невольно толкает учителя на дальнейшую затрату времени и предъявление ученикам для решения таких, например, остроумных задач:

1. Упростите:

$$2a^2 + 3b^2 - \frac{4a^3 + 9b^3 - x^3 - 49 + 12a^2b^2 + 14x^2}{(2a^2 + 3b^2 + 3) - (x^2 - 4)}.$$

2. Разложите на множители:

$$6a^2 - 9ay - 15by - 20bx - 12ax + 10ab.$$

3. То же:

$$64a^3 - 125b^3 - c^3 - 48a^2 + 12a - 75b^2 - 15bc^2 - 1.$$

Единственным неоспоримым достоинством сокращенных вычислений психологи признают то, что они несколько расширяют и укрепляют представление об a , b , c и т. д. как *любых* числах. В самом деле, одна из существеннейших частей общего знания алгебры начинается с усвоения таких простейших формул, справедливых в отношении „любых чисел“, как $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, $3a + 2a = (3 + 2)a$ и т. д., и оканчивается, пройдя длинный ряд положений, усвоением того, что $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, что при $b^2 - 4ac > 0$ корни квадратного уравнения действительны и различны и т. д. Формулы сокращенных вычислений безусловно пополняют указанный ряд, как хотя бы знание того, что $c_1a^2 + c_2a + c_3 = (c_4a + c_5)(c_6a + c_7)$, если $c_4c_6 = c_1$, $c_5c_7 = c_3$ и $c_7c_4 + c_6c_5 = c_2$.

В конечном счете обучение способам сокращенных вычислений может быть допущено в элементарном курсе алгебры при условии, что оно распространяется лишь на более способных учеников и что соответствующие упражнения ограничиваются лишь действительно полезными случаями применения их в математике и других научных дисциплинах.

Общее наименьшее кратное и общий наибольший делитель.

Отыскание общего наименьшего знаменателя при сложении и вычитании дробей, а также освобождении от дробных выражений уравнения считается почти стандартным приемом. Однако ценность его весьма проблематична. Представим себе тысячу учеников, которых обучили обязательно находить общий наименьший знаменатель, и другую тысячу, которую обучили находить самостоятельно *любой* общий знаменатель, хотя бы путем последовательного умножения на каждый из знаменателей. Если как в том, так и другом случае на обучение затрачено одно и то же количество времени, то нельзя утверждать, что первая группа учеников будет справляться с соответствующими задачами, выйдя из школы, лучше, чем вторая. У последней большим преимуществом явится лучшее понимание основного принципа и навык в самостоятельном осмысленном выборе величин, тогда как первая будет находиться в значительной мере во власти некоего таинственного обряда, именуемого отысканием общего наименьшего кратного.

Что же касается отыскания общего наибольшего делителя, то учеников вовсе не следует этому обучать. Им надо только указать, что дроби следует сокращать на любой общий множитель, как только они его обнаружат.

Алгебра и арифметика.

При преподавании алгебры необходимо принимать во внимание те связи, которые сложились у учеников при изучении арифметики. Конечно, многие из них кое-что позабыли, некоторые же, быть может, не проходили тех или иных отдельных частей курса арифметики. Но было бы совершенно неправильным не считаться со знаниями, приобретенными учащимися в начальной школе. С точки зрения психолога необходимо исходить из предположения, что ученики знают арифметику, указывать им, к каким частям учебника арифметики они должны обращаться, чтобы пополнить недостающие знания, и перечислять их в этой области лишь в самом крайнем случае. Между тем во многих курсах алгебры подобные треугольников, Пифагорова теорема и многие другие положения излагаются так, как если бы учащиеся никогда не имели с ними дела. Ученики, естественно, рассчитывающие найти в алгебре новые темы, испытывают при этом смущение и поражаются легкостью предмета. Поэтому все то, что является повторением или смотром арифметических познаний, должно быть четко выявлено именно как таковое.

Далее, при прочих равных условиях не следует образовывать новые связи между некоторыми положениями и алгебраическим трактованием их, если известное уже ученикам арифметическое трактование их лучше, так как это понижает в глазах учащихся значение алгебры. На эту сторону дела редко обращают сейчас внимание, в чем легко можно убедиться, ознакомившись с приступом к изучению уравнений, практическим почти всеми руководствами и учителями.

Некоторое число, взятое шесть раз, равно 18. Найти это число.

Пусть x равно искомому числу.

Тогда $6x$ равны тому же числу, взятому шесть раз.

Так как 18 равно шесть раз взятому числу,
то $6x = 18$.

Деля на 6, получаем, что $x = 3$.

Поэтому искомое число равно 3.

Встречаясь с подобного рода вступительным объяснением, ученик справедливо недоумевает, зачем надо полагать x равным некоторому числу и т. д., когда ответ так просто находится делением 18 на 3. Конечно, для ясности того или иного нового алгебраического факта или принципа мы не должны усложнять введения его какими-либо излишними трудностями. Но все же это введение должно быть таким, чтобы необходимость и выгодность алгебраического трактования данного вопроса были совершенно очевидными. Поэтому ознакомление с алгебраическими уравнениями лучше начинать с решения хотя бы такой задачи:

Некоторое число, взятое шесть раз, равно $a + 2b$. Чему равно это число, если $a = 10$ и $b = 4$?

Вообще, какое бы новое алгебраическое положение мы ни вводили, мы должны тщательно проверить, не является ли оно в глазах учащихся лишь усложненным изложением фактов, известных им уже из курса арифметики.

Целые числа
в ответе как
доказатель-
ство правиль-
ности реше-
ния задачи.

Учащиеся склонны рассматривать получение ответа в виде целого числа, простой дроби или простого смешанного числа $\left(\text{например, } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2\frac{1}{2} \text{ и } 12\frac{1}{2} \right)$, а также простого буквенного выражения $\left(\text{например, } a, \frac{b}{c} \text{ и } m+n \right)$

как доказательство правильности решения задачи; получение же ответа в более сложной форме — как повод для проверки полученного результата. С этой тенденцией надо решительно бороться, так как она совершенно неуместна в реальной жизненной обстановке.

Как мы уже указывали выше, некоторое количество упражнений, отводимых ознакомлению с новыми фактами и принципами, не должно содержать трудных вычислений. Поэтому некоторое количество примеров, дающих в ответе очень простые числа и выражения, должно быть сохранено. Однако, если мы обратимся к задачам, содержащимся в руководствах и предлагаемым учителями, то найдем, что процент подобного рода примеров непомерно велик. Так, изучив девять наиболее распространенных учебников алгебры, автор обнаружил, что число примеров, приводящих в ответе к целым числам, составляет в целом 59,4% общего числа примеров, то же к обыкновенным дробям — 15,4%, к десятичным дробям — 15,8%, к иррациональным величинам — 8,1% и к мнимым величинам — 1,4%. Автор полагает, что в случае умышленного применения форм счисления, которые не затрудняли бы усвоения какого-либо принципа или процесса, учащихся следует предупреждать: „Ответами к задачам таким-то и таким-то будут только целые числа“. Это позволит ученикам установить, в каких случаях им следует прибегать к проверке полученных результатов и предохранит их от недоразумений в прочих случаях.

ГЛАВА X.

НОВЫЕ ВИДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ.

Мы очень нуждаемся в опытах, которые подтвердили бы возможность изучения алгебраических символов и техники алгебраических вычислений таким образом, чтобы оно было подчинено изучению формул или уравнений, выражающих некоторые общие соотношения. Желательно, чтобы ученики весьма быстро приобрели ясное и устойчивое представление о том, что a, b, c, x, y, z и т. д. выражают действительные числа и количества, чего мы не наблюдаем весьма часто в настоящее время.

Далее желательно осуществление следующего положения, выдвигаемого Национальным комитетом:

„Основным и руководящим принципом курса, особенно в случае алгебры и тригонометрии, должно быть понятие о соотношении между переменными величинами, включая методы определения и выражения этого соотношения. Понятие о соотношении является основным как в алгебре, так и геометрии. Учитель должен всегда иметь в виду это обстоятельство и сознательно направлять работу учеников таким образом, чтобы они усваивали одну за другой те частности и детали, от которых в конечном счете зависит образование общего представления о функциональной зависимости“.

Конечно, для этого нужны и специальные упражнения; Гедрик (Hedrick, 1921, стр. 193) справедливо указывает: „Приобретение подобного рода идей является весьма медленным процессом. Его надо начинать возможно раньше и наиболее простым способом, пользуясь вначале лишь отдельными данными простейшего и числового характера; в последующем его надо фиксировать в сознании путем многократных повторений от случая к случаю, пока мышление, базирующееся на соответствующих понятиях и терминах, не станет привычным для данного индивидуума. Только таким путем может быть приобретено то, что мы привыкли называть индивидуальным навыком в функциональном мышлении“.

Равным образом мы нуждаемся в упражнениях, которые главным образом стимулировали бы *изучение алгебры* учениками, путем соответствующего направления их работы, и менее заботились бы об *оценке усвоения* учащимися тех тем, которые им в данное время излагаются. Ниже приводятся некоторые упражнения, которые были разработаны сотрудниками автора Вудьярд (Miss Woodyard) и Орлеанс (Mr. Orleans) и которые предназначаются хотя бы для частичного удовлетворения этих указанных выше требований.

РАЗДЕЛ В.

I.

$N = nr$ является формулой для определения числа (N) деревьев во фруктовом саду, в котором имеется r рядов по n деревьев в каждом ряду.

Выражение nr в этой формуле обозначает, что n умножается на r . Так, если $n = 7$ и $r = 6$, то $N = 42$; если же $n = 10$ и $r = 8$, то $N = 80$.

Найдите N по следующим значениям n и r : 6 и 9; 5 и 8; 10 и 13; 6 и 12; 14 и 20; 20 и 15; 14 и 12.

Примечание. Как в этом примере, так и последующих, данные и искомые величины лучше всего располагать в форме таблиц.

II.

Зрительный зал в кинематографе разделен проходом на две части, причем в каждой части имеется p рядов сидений, по n сидений в каждом ряду. Общее число зрителей (N), которое может одновременно присутствовать на сеансе, определяется формулой $N = 2pn$.

а) Объясните, что обозначает $2pn$.

б) Если $p = 25$ и $n = 8$, то $N = 2 \times 25 \times 8 = 400$.

Найдите N при следующих значениях p и n : 20 и 9; 25 и 15; 15 и 10; 24 и 12; 16 и 8; 22 и 8, 24 и 12.

(Упражнения III, IV и V носят в основном тот же характер.)

VI.

Скорость распространения волны в метрах в секунду (V) равна длине волны в метрах (L), деленной на время (T) одного колебания волны (т. е. как подъема, так и опускания ее) в секундах. Это соотношение выражается формулой:

$V = \frac{L}{T}$. Здесь $\frac{L}{T}$ обозначает, что L делится на T . Так, если $L = 16$ и $T = 8$,

то $V = \frac{L}{T} = \frac{16}{8} = 2$. Найдите, чему равняется V , если L и T равны соответственно 20 и 12; 20 и 14; 16 и 10; 15 и 10; 24 и 18; 28 и 18; 18 и 10.

(Упражнение VII аналогично упражнению VI.)

VIII.

а) Плотность материи равна массе последней в граммах, деленной на объем ее в кубических сантиметрах. Составьте соответствующую формулу, обозначив через D плотность материи, M — ее массу и V — ее объем.

Составьте таблицу величин D , M и V , пользуясь следующими значениями M и V и определяя D (т. е. находя, чему равно D) при данных величинах M и V .

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. $M = 258$; $V = 100$. | 6. $M = 489,5$; $V = 55$. |
| 2. $M = 170$; $V = 20$. | 7. $M = 757,1$; $V = 67$. |
| 3. $M = 97,9$; $V = 11$. | 8. $M = 1145,9$; $V = 53,5$. |
| 4. $M = 1,2$; $V = 5$. | 9. $M = 64,2$; $V = 4,2$. |
| 5. $M = 31,2$; $V = 12$. | 10. $M = 41,89$; $V = 5,6$. |

1. Возрастает ли D , когда возрастает M ?
2. Возрастает ли D , когда возрастает V ?
3. Уменьшается ли D , когда уменьшается V ?
4. Уменьшается ли D , когда уменьшается M ?
5. Уменьшается ли D , когда возрастает V ?
6. Возрастает ли D , когда уменьшается M ?

(Упражнение IX аналогично упражнению VIII.)

X.

а) Скорость отдачи орудия находится путем умножения веса снаряда (в килограммах) на скорость снаряда в конце дула орудия (в метрах в секунду) и деления произведения на вес орудия (в килограммах). Выразите это соотношение формулой, приняв следующие обозначения:

V — скорость отдачи орудия;

w — вес снаряда;

v — скорость снаряда при выходе из дула орудия;

W — вес орудия.

б) Составьте таблицу, пользуясь следующими значениями v , w и W и вычисленными значениями V :

- | | |
|--|---|
| 1. $v = 25$; $w = 500$; $W = 5\,000$. | 5. $v = 45$; $w = 500$; $W = 5\,500$. |
| 2. $v = 150$; $w = 800$; $W = 22\,000$. | 6. $v = 48$; $w = 600$; $W = 12\,500$. |
| 3. $v = 120$; $w = 700$; $W = 15\,150$. | 7. $v = 85$; $w = 625$; $W = 15\,000$. |
| 4. $v = 125$; $w = 750$; $W = 22\,500$. | 8. $v = 60$; $w = 575$; $W = 11\,250$. |

1. Если w возрастает, то возрастает ли V ?
2. Если v уменьшается, то уменьшается ли V ?
3. Если W уменьшается, то возрастает ли V ?
4. Если W возрастает, то возрастает ли V ?
5. Если W возрастает, то уменьшается ли V ?

XI.

а) Для определения числа литров воды, которое надо добавить к крепкому раствору, чтобы получить более слабый раствор, пользуются формулой $N = \frac{S}{W} - 1$, где N — число литров добавляемой воды, S — крепость данного раствора и W — крепость слабого раствора, которую хотят получить.

Если $S = 0,08$ и $W = 0,005$, то $N = \frac{0,08}{0,005} - 1 = 16 - 1 = 15$.

б) Составьте таблицу, пользуясь вычисленными значениями N и данными значениями S и W : 0,08 и 0,005; 0,05 и 0,02; 0,10 и 0,01; 0,20 и 0,05; 0,40 и 0,18; 0,14 и 0,009.

1. Если S возрастает, то возрастает ли N ?
2. Если S уменьшается, то уменьшается ли N ?
3. Если W возрастает, то возрастает ли N ?
4. Если W уменьшается, то возрастает ли N ?
5. Если W возрастает, то уменьшается ли N ?

(Упражнения XII, XIII и XIV опускаются.)

XV.

а) Надо окрасить стену дома, длиною L метров и высотой H метров, имеющую 3 окна по l метров ширины и h метров высоты. Составьте формулу для определения числа кв. метров (A) площади стены, которую надо окрасить.

б) Найдите значения A , если L, H, l и h равны соответственно: 13, 3, 2 и $1\frac{1}{2}$; 10, $2\frac{1}{2}$, 2 и 1; $8, 2\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}$ и 1; 18, $3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$; 15, 3, 2 и 1.

с) Если L, H, l и h выражены в дециметрах, то в каких мерах выразится A ?

д) Как называется число 3, входящее в составленную формулу?

е) Если в стене имеется только одно окно, то формула принимает вид: $A = LH - ih$.

Если коэффициент равен 1, то его не пишут, так как всякое число, умноженное на 1, равно тому же числу; поэтому b и $1b$ одно и то же. Каков коэффициент в выражении LH ? в выражении ih ?

РАЗДЕЛ С.

(Упражнение I значительно проще упражнения II.)

II.

$N = nr$ является формулой для определения числа (N) деревьев во фруктовом саду, в котором имеется r рядов по n деревьев в каждом ряду. Поэтому, если $n=10$ и $r=7$, то $N=10 \times 7=70$, если же $n=10$ и $r=14$, то $N=10 \times 14=140$.

а) Найдите и запишите в табличке I значения N , вычисленные по данным значениям n и r .

Таблица I.

$n=$	10	10	15	16	20	30	32	15	30	30	15	32
$r=$	7	14	6	11	14	6	22	12	7	14	18	11
$N=$	70	140										

б) Впишите недостающие значения N , вычисленные подобным же образом по данным значениям n и r , в таблички II, III и IV.

Таблица II.

$n=$	15	30	16	32	10	10	15	15
$r=$	6	6	11	11	7	14	6	12
$N=$								

Таблица III.

$n=$	10	30	15	15
$r=$	7	7	6	18
$N=$				

Таблица IV.

$n=$	10	20	16	32
$r=$	7	14	11	22
$N=$				

с) Просмотрите внимательно таблички II — IV, а затем впишите пропущенные слова в приводимых ниже предложениях.

1. Если n увеличивается вдвое, а r остается без изменения, то N увеличивается...

2. Если n остается без изменения, а r увеличивается вдвое, то N увеличивается...

3. Если n остается без изменения, а r уменьшается вдвое, то N уменьшается...

4. Если n уменьшается вдвое, а r остается без изменения, то N уменьшается...

5. Если n остается без изменения, а r увеличивается втрое, то N ...

6. Если n уменьшается втрое, а r остается без изменения, то N ...

7. Если n увеличивается втрое, а r остается без изменения, то N ...

8. Если n остается без изменения, а r уменьшается втрое, то N ...

9. Если n увеличивается вдвое и r увеличивается вдвое, то N ...

10. Если n увеличивается вдвое, а r увеличивается втрое, то N ...

11. Если n увеличивается вдвое, а r уменьшается вдвое, то N ...

12. Если n уменьшается вдвое, а r увеличивается вдвое, то N ...

(Упражнения III и IV являются подготовительными к упражнениям V, VI и VII)

V.

Формула $D = \frac{M}{V}$ выражает плотность вещества. В ней

D — обозначает плотность вещества,

M — число граммов вещества,

V — объем данной массы вещества.

а) Составьте таблицу величин D , M и V , пользуясь следующими значениями M и V и определяя по ним D :

1. $M = 258$; $V = 100$.

6. $M = 43$; $V = 50$.

2. $M = 129$; $V = 50$.

7. $M = 86$; $V = 100$.

3. $M = 129$; $V = 100$.

8. $M = 86$; $V = 150$.

4. $M = 258$; $V = 25$.

9. $M = 172$; $V = 150$.

5. $M = 64,5$; $V = 100$.

10. $M = 48$; $V = 25$.

Впишите пропущенные слова в приводимых ниже предложениях:

1. Если M увеличивается вдвое, а V остается без изменения, то D ...

2. Если M увеличивается вдвое и V увеличивается вдвое, то D ...

3. Если M увеличивается втрое и V увеличивается втрое, то D ...

4. Если M уменьшается вдвое и V уменьшается вдвое, то D ...

5. Если M остается без изменения, а V увеличивается вдвое, то D ...

6. Если M остается без изменения и V увеличивается втрое, то D ...

7. Если M остается без изменения, а V уменьшается вдвое, то D ...

8. Если M уменьшается вдвое, а V остается без изменения, то D ...

9. Если M увеличивается втрое, а V остается без изменения, то D ...

10. Если M уменьшается вдвое, а V увеличивается вдвое, то D ...

11. Если M увеличивается вдвое, а V уменьшается вдвое, то D ...

12. D увеличивается вдвое, если ... увеличивается вдвое и ... остается без изменения.

13. D уменьшается вдвое, если ... уменьшается вдвое и ... остается без изменения.

14. D увеличивается втрое, если ... увеличивается ... и ...

15. D увеличивается вдвое, если ... увеличивается ... и ...

16. D увеличивается в четыре раза, если ... увеличивается вдвое и ... уменьшается вдвое.

В упражнениях VI — VIII излагается аналогичное определение соотношения величин, входящих в формулы $W = \frac{g}{ab}$, $W = b + nm$ и $L = 4j + 3g$.

Упражнение IX посвящено изучению формулы $A = CD - cd$ (площадь стены без площади окна), которое проводится следующим образом:

Впишите пропущенные слова в приводимых ниже предложениях:

а) 1. Если C увеличивается, а D , c , d остаются без изменения, то A ...

2. Если D увеличивается, а C, c, d остаются без изменения, то $A \dots$
3. Если c увеличивается, а C, D, d остаются без изменения, то $A \dots$
4. Если d увеличивается, а C, D, c остаются без изменения, то $A \dots$
5. Если C уменьшается, а D, c, d остаются без изменения, то $A \dots$
6. Если D уменьшается, а C, c, d остаются без изменения, то $A \dots$
7. Если c уменьшается, а C, D, d остаются без изменения, то $A \dots$
8. Если d уменьшается, а C, D, c остаются без изменения, то $A \dots$
9. Если C и c увеличиваются вдвое, а D и d остаются без изменения, то $A \dots$
10. Если D и d увеличиваются вдвое, а C и c остаются без изменения, то $A \dots$
11. Если C и d увеличиваются вдвое, а c и D остаются без изменения, то $A \dots$
12. Если D и c увеличиваются вдвое, а C и d остаются без изменения, то $A \dots$
13. Если C, D, c и d увеличиваются вдвое, то $A \dots$
14. Если C и d уменьшаются вдвое, а c и D остаются без изменения, то $A \dots$
- б) 1. Если C увеличивается вдвое, а D, c и d остаются без изменения, то увеличивается ли A также вдвое?
Если нет, то как изменяется A ?
2. Если d увеличивается вдвое, а C, D и c остаются без изменения, то увеличивается ли A также вдвое? Если нет, то как изменяется A ?
3. Если D уменьшается вдвое, а C, c и d остаются без изменения, то уменьшается ли A также вдвое? Если нет, то как изменяется A ?
4. Если c уменьшается вдвое, а C, D и d остаются без изменения, то уменьшается ли A также вдвое? Если нет, то как изменяется A ?

РАЗДЕЛ Е.

(I упражнение касается соотношения метрических и английских мер.)

II.

Если [число абонентов телефонной станции равно s ; то число соединений

(N), которые должна выполнять эта станция, равно $\frac{s(s-1)}{2}$.

- а) Вычислите N для s , равного 100, 250, 500, 1000, 480, 291, 100 000.
- б) Найдите, насколько увеличивается N при увеличении s от 0 до 10, от 10 до 20, от 20 до 30 ... от 90 до 100.
- с) Найдите, насколько увеличивается N при увеличении s от 100 до 200, от 200 до 300 ... от 400 до 500.

III.

Предельная нагрузка, которую может выдержать свая, забиваемая в грунт копром, определяется по формуле:

$$P = \frac{h \cdot Q^2 \cdot q}{e(Q + q)^2},$$

где P — предельная нагрузка сваи в килограммах,

Q — вес бабы в килограммах,

q — вес сваи в килограммах,

h — высота падения бабы в миллиметрах,

e — наблюдаемая осадка сваи при последнем ударе в миллиметрах.

Вычислите P для следующих значений Q, q, h и e : 1500, 600, 1200 и 40; 1000, 700, 1650 и 50; 750, 500, 1350 и 60; 800, 600, 1500 и 50; 1000, 8000, 1350 и 40.

IV.]

Для расчета отопления здания необходимо знать, какова потеря им тепла. В помещениях большого объема, которыми не пользуются в течение круглых

суток (клубы, концертные залы и пр.), потеря тепла определяется следующей формулой:

$$W = \frac{F \cdot k (t - t_0)}{2} + F_1 \left[23 + \frac{5(t - t_1)}{Z} \right],$$

где: W — потеря тепла в час в больших calorиях,

F_1 — площадь всех стен, потолка и пола в кв. метрах,

F — площадь всех окон в кв. метрах,

k — коэффициент теплопередачи для больших одиночных окон, равный 5, 3,

t — требуемая внутренняя температура помещения,

t_1 — начальная температура помещения, при растопке,

t_0 — наружная температура и

Z — продолжительность растопки в часах.

а) Определите W для здания, длиной 60 м, шириною 25 м и высотой 8,5 м, имеющего 12 окон размерами $1,8 \times 3,2$ м, если начальная температура помещения равна $+7^\circ$, требуемая $+16^\circ$ и наружная -18° , продолжительность же растопки равна 4 часам.

б) Чему будет равно W для того же здания, если начальная температура падет до $+5^\circ$, а наружная до -20° , требуемая же температура сохранится в $+16^\circ$?

V.

Для определения общей мощности паровых машин судна пользуются следующей приближенной формулой: $N = \frac{Sv^3}{c}$,

где: N обозначает общую мощность паровых машин судна в лошадиных силах

S — площадь миделя, т. е. поперечного сечения судна в месте наибольшей его ширины в кв. метрах,

c — коэффициент, изменяющийся от 15 до 70 в зависимости от типа судна и его конструкции, и

v — скорость судна в узлах или морских милях.

а) Найдите N для двух крейсеров при S , равном 130 и 140 м², v , равном 21 и 22,5 узла, и c , равном для обоих крейсеров 70.

Найдите N для двух морских скорых пароходов при S , равном 90 и 100 м², v , равном 18 и 19,5 узла, и c , равном для обоих пароходов 55.

Найдите N для двух речных колесных пассажирских пароходов при S , равном 12 и 15 м², v , равном 6 и 6,5 узла, и c , равном для обоих пароходов 30.

б) 1. Как влияет на N удвоение v при остающихся без изменения S и c ?

2. Влияет ли на N удвоение S так же, как удвоение v ?

3. Как влияет на N удвоение c при остающихся без изменения S и v ?

4. Изменится ли N , если при той же величине v увеличатся в полтора раза S и c ?

VI.

Номинальная мощность автомобильного мотора определяется приближенной формулой $N = 0,3 \cdot i \cdot d^2 \cdot S$,

где: N — число лошадиных сил мотора,

i — число цилиндров,

d — диаметр каждого цилиндра в сантиметрах и

S — ход каждого поршня в сантиметрах.

а) Найдите N , если i , d и S равны соответственно: 4, 10 и 12,5; 6, 11 и 15; 8, 10 и 14; 8, 11 и 15.

б) 1. Как влияет на N удвоение i ?

2. Удвоение какой другой величины, помимо i , также приводит к удвоению N ?

3. Во сколько раз увеличится N , если увеличить d в полтора раза?

VII.

Сила тяги у основания дымовой трубы определяется по формуле

$$z = H \left(1,29 \frac{273}{273 + T_0} - 1,35 \frac{273}{273 + T_1} \right),$$

где: z обозначает силу тяги в миллиметрах водного столба,

H — высоту дымовой трубы в метрах,

T_0 — температуру наружного воздуха и

T_1 — среднюю температуру газов внутри дымовой трубы.

а) Найдите z , если H , T_0 и T_1 равны соответственно: 50, 20° и 250°; 70, 15° и 270°; 40, 10° и 220°; 80, 0° и 350°; 75, — 10°, 300°; 70, — 20° и 250°.

б) Покажите, что приведенная выше формула и следующие две равнозначущи:

$$P = 273H \left(\frac{1,29}{273 + T_0} - \frac{1,35}{273 + T_1} \right);$$

$$P = 352H \left(\frac{1}{273 + T_0} - \frac{1,05}{273 + T_1} \right).$$

с) 1. Если H увеличивается вдвое, то как изменяется z (при неизменных T_0 и T_1)?

2. Если H уменьшается вдвое, то как изменяется z (при неизменных T_0 и T_1)?

3. Как влияет на z увеличение T_0 ?

4. Как влияет на z увеличение T_1 ?

5. Если необходимо увеличить z , то каким образом это может быть достигнуто?

[Упражнение VIII посвящено изучению формулы $(ab - 4\pi r^2)\gamma$ или $(ab - \pi b^2)\gamma$.] Месячный оборот торгового предприятия определяется по формуле

$$O = \frac{K + \frac{K}{n}}{t},$$

где: O — обозначает месячный оборот в рублях,

K — собственный оборотный капитал предприятия,

$\frac{1}{n}$ — долю, которую привлеченные (заемные) средства составляют по сравнению с собственным капиталом, и

t — время оборота капитала в месяцах.

а) Найдите O , если K , $\frac{1}{n}$ и t равны соответственно: 50 000, $\frac{1}{2}$ и 2; 250 000, $\frac{2}{3}$ и 6; 100 000, 0,9 и 3; 10 000, $\frac{3}{4}$ и 2.

б) 1. Если увеличивается t , в то время как K и n остаются постоянными, то увеличивается или уменьшается O ?

2. Если K увеличивается, в то время как n и t остаются постоянными, то увеличивается или уменьшается O ?

3. Если n увеличивается, в то время как K и t остаются постоянными, то увеличивается или уменьшается O ?

4. Как надо изменять K , n и t , чтобы уменьшить O вдвое?

(Упражнение X, аналогичное предыдущему, выполняется над формулой

$$C = \frac{E}{\frac{r}{n} + \dot{R}}.)$$

XI.

Если чугунная труба прочно заделана в стену одним концом, то к другому концу ее можно безопасно повесить груз, величина которого определяется формулой:

$$P = 75\pi \left(R^3 - \frac{r^3}{R} \right) : L,$$

где: P обозначает нагрузку в килограммах,

R — радиус внешнего сечения трубы в сантиметрах,
 r — радиус внутреннего сечения трубы в сантиметрах и
 L — длину трубы в сантиметрах.

1. Как влияет изменение L на изменение P ?
2. Увеличивается ли P с увеличением R ?
3. Как влияет изменение r на изменение P ?

ГЛАВА XI.

РАСПОЛОЖЕНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ КУРСА АЛГЕБРЫ.

После того как мы выбрали связи, подлежащие образованию, мы нуждаемся в установлении порядка их образования, который обеспечивал бы максимум облегчения и минимум затруднений, а также наилучшие условия для развития каждой существенной алгебраической способности.

Некоторые основания для установления такого порядка совершенно бесспорны, поскольку ряд связей для своего образования нуждается в других связях как необходимой предпосылке. Так, например, решение системы линейных уравнений должно следовать за решением уравнений первой степени с одним неизвестным. Другие основания так же ясны, как, например, откладывание изучения буквенных показателей до того времени, как учащимся будет приобретен основательный навык в обращении с буквенной символикой и надлежащее понимание алгебраических обобщений. Не останавливаясь на этих очевидных фактах, которые учитываются всеми опытными педагогами, обратимся к рассмотрению более сложных оснований, выдвигаемых психологами и находящих подтверждение в практике преподавания.

Учителя обычно обнаруживают большое пристрастие к строго систематическому изложению тем, причем изучение последних разделяется на отделы и подотделы, которые проходятся каждый в свое время и в определенном порядке. К этому их побуждает свойственное всякому представителю точного знания пристрастие к системе, а также то обстоятельство, что при этом очень легко определить в каждый данный момент, что уже сделано и что еще осталось пройти.

Но порядок, являющийся наилучшим для углубления уже сложившихся алгебраических знаний, может оказаться совсем неудачным, если им воспользоваться для приобретения тех же знаний. Так, для нас, знающих алгебру, кажется совершенно естественным применение и усвоение термина „одночлен“ в отношении таких выражений, как $3ab^2$ и аналогичные. Однако этот термин остается для учеников весьма туманным до тех пор, пока они не переходят к изучению многочленов. То же относится практически почти ко всем определениям. До сих пор еще принято начинать всякую главу, посвященную новым видам упражнений, с полного, логически обоснованного разъяснения значения всех новых понятий и терминов, с которыми учащийся должен будет иметь дело. Так, при первом появлении уравнения ученикам не так давно еще преподносилось предварительное определение: 1) равенства, 2) тождества, 3) уравнения, 4) неизвестной величины, 5) корней уравнения, 6) правой и левой части уравнения, 7) решения уравнения, 8) аксиомы, 9) четырех правил действия в отношении частей уравнения (о возможности возведения последних в одинаковую степень и извлечения корней

одинаковой степени при этом не говорилось ничего). Еще бóльшим количеством определений обременяли изучение учащимися радикалов. Сознание учащихся перегружалось новыми понятиями, которые они фактически не могли понять до тех пор, пока не проделывали большинства упражнений данного раздела курса.

Приобретение понимания значения выражения путем применения последнего, а затем овладение определением как моделью точного и немногословного фиксирования этого значения прекрасно помогают изучению алгебры. После того как мы изучили алгебру, нам кажется совершенно естественным предпосылать действия над a и $a + a$ действиям над $4a$ или $6a$ и $3a + 5a$ как более „простые“. Однако это обусловливается тем, что мы уже прекрасно сознаем тождественность выражений a и $1a$; для учеников же выражение $4a$ и $6a$ понятнее, чем a , и сложение $3a + 5a = 8a$ доступнее для них на первых порах, чем сложение $a + a$. Равным образом начинающий легче усваивает смысл и значение выражения „дважды $3a$ “, чем выражение „2 плюс $3a$ “; „ a на a “ для него труднее, чем „ a^3 на a^4 “ и „ $3a$ плюс $4b$ “ труднее, чем „ $3a$ на $4b$ “; точно так же „ $3b$ на $4b$ “ для него легче, чем „ $3b$ плюс $4b$ “. В первом случае он видит, что изменение постигает как b , так и цифры 3 и 4, тогда как в последнем он должен усвоить, что к этим величинам надо подходить различно, и „делая то-то и то-то с 3 и 4, надо оставить одно b без изменения, лишь приписав его к ответу, и почему-то опустить второе b “. Лицу, сведущему в алгебре, но не искушенному в вопросах психологии, крайне трудно понять ту борьбу противоположных представлений, которую испытывает сознание ребенка при встрече с подобного рода случаями, и даже многие учителя не отдают себе ясного отчета в том, почему исчезновение второго b смущает учащегося.

Многие разделы алгебры, признаваемые трудными и требующими для своего усвоения большой затраты труда со стороны учеников средних способностей, становятся гораздо более легкими от одного изменения порядка их изучения. Так, обычное неудачное стремление учеников вычеркивать при сокращении дробей не столько множители, общие у числителя и знаменателя, сколько сходные члены (приводя, например, дробь $\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 4x + 3}$ к сумме $2 + 5$, дающую в ответе 7), является совершенно естественным приложением навыка, приобретенного ранее при сокращении одночленов (когда ответом к примеру $\frac{35a^4x^2y^3}{21a^5xy^4}$ являлось $\frac{5a^2}{3x^3y}$). В сущности, нет никаких оснований к тому, чтобы не начинать изучения сокращения дробей с тех случаев, когда числители и знаменатели их являются многочленами, и лишь после этого переходить к сокращению дробей, числителями и знаменателями коих являются одночлены. Опыты, произведенные автором, подтверждают справедливость этого положения.

Равным образом многие ошибки, наблюдаемые при обращении учеников со знаком минус, вызываются тем, что последнему уделяется слишком много внимания при раскрытии скобок со знаком минус перед ними, вычитанию и сложению. Не только автор, но и многие другие

экспериментаторы убедились, что если раскрытие скобок связывать в основном с умножением, то это вызывает значительное сокращение наблюдаемых ошибок.

Все это приводит к признанию желательности установления и опытной проверки таких планов расположения алгебраического учебного материала, которые могут показаться весьма странными и непривычными для лиц, уже владеющих алгеброй. Таких планов можно составить весьма много, и возможно, что они будут почти равноценны по своим качествам. Предлагаемый ниже порядок расположения учебного материала представляется автору наиболее целесообразным по соображениям психологии предмета.

Раздел А. Формула.

(Включаются необходимые пояснения, вычисления и преобразования формул.)

1. Легкие формулы: а) понимание, б) применение, с) составление.

2. Формулы со скобками и сложными дробями.

3. Формулы, содержащие корни.

4. Формулы, содержащие отвлеченные количества.

5. Формулы, содержащие отрицательные числа.

(Примечание. Отделы 2 — 5 распадаются на те же три составных части, как и отдел 1.)

6. Преобразование формулы для определения другой величины.

Раздел В. Задача.

(Всякий количественный ответ может быть найден путем применения специальной подходящей формулы или ряда формул и решения задачи.)

7. Задачи, которые обычно трактуются как содержащие одну неизвестную величину.

8. Задачи, которые обычно трактуются как содержащие две или более неизвестных величины.

а) Решение путем подстановки.

б) Решение путем сложения или вычитания (тракуемое как сокращенный метод вычисления).

Раздел С. Взаимно связанные переменные величины.

9. Статистические графики.

а) Понимание и объяснение графиков, изображающих совершенно реальные явления, например стоимость жизни, рост населения и т. д., причем используются только положительные координаты.

б) Составление подобных графиков.

10. Математические графики.

а) Декартова система координат, знаки $-$ и $+$, $-$ и $-$, $+$ и $-$ для различных квадрантов.

б) Изучение некоторых важных кривых, например $y = Kx$, $y = K$ процентов от x , $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.

11. Прямая и обратная пропорциональность.

а) Уравнение $y = kx$ и график.

б) Уравнение $y = \frac{k}{x}$ и график.

12. Общий график прямой линии.

а) Уравнение $y = kx + b$.

13. Система линейных уравнений.

б) Найти постоянные общего линейного уравнения $y = kx + b$ по двум парным значениям x и y .

14. Квадратный корень:

а) из чисел,

б) из трехчленов.

15. Тригонометрические отношения.
 - а) Тангенс, синус, косинус углов в первом квадранте,
16. Логарифмы.
 - а) Применение для облегчения счисления.
 - б) Начала теории логарифмов, базирующиеся на графике $y = 10x$.
17. Решение квадратных уравнений с одним неизвестным при помощи:
 - а) графика,
 - б) дополнения квадрата,
 - с) формулы.
18. Общее понятие о переменных: итоги и систематизация.

Раздел D. Отвлеченные формулы.

19. Прогрессии:
 - а) арифметическая прогрессия,
 - б) геометрическая прогрессия.
20. Дробные и отрицательные степени.
21. Бином Ньютона.
22. Отвлеченные формулы.

Предлагаемый порядок отличается от общепринятого следующими основными чертами.

Алгебраическая символика и счисление сделаны орудием понимания, применения, составления и преобразования формул. Дроби и корни вводятся рано, применение формул занимает место решения многих численных уравнений, а преобразование формул для определения другой величины заменяет обычные упражнения с отвлеченными буквенными уравнениями. За графическими изображениями прямых линий следует некоторое количество графиков с кривыми линиями. Системы уравнений первой степени используются преимущественно для определения постоянных величин линейного уравнения с двумя неизвестными, вида $y = ax + b$, по двум данным парным значениям x и y . Подобным же образом упражнения над трехчленом вида $ax^2 + bx + c$ сводятся главным образом не к решению уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а к определению постоянных величин уравнения $y = ax^2 + bx + c$ по трем данным парным значениям x и y . Вследствие этого приобретает существенное значение решение системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными величинами.

Раннее введение упрощения простейших корней (например $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$) имеет целью проложить путь к возможно раннему усвоению некоторых полезнейших отделов алгебры. Так, это позволяет относительно рано ввести такие ценные приложения алгебраической техники, как вычисление диагонали квадрата или прямоугольника и высоты треугольника, и значительно облегчает вычисление соотношений тригонометрических величин для данных углов. Кроме того, действия с простыми корнями могут с успехом заменить при начале изучения алгебры упражнения над сложными многочленами.

Автор не предполагает излагать здесь психологических фактов, которые привели его к предложенному порядку распределения алгебраического учебного материала; во многих случаях приходилось очень тщательно

взвешивать целый ряд доводов как за, так и против места данной темы в общем плане; один из сотрудников автора занят в настоящее время выяснением достоинств и недостатков изложенного плана путем соответственно поставленных опытов. Вместе с тем автор считает целесообразным остановиться особо на двух вопросах, поскольку в первом случае он весьма далеко уходит от общепринятой системы, во втором же случае защищает прежнюю систему от новаторов Рогга — Кларка и Нонна.

Решение задач как самостоятельный отдел, а не ряд приложений всех изученных технических приемов.

Обычно принято давать задачи как материал для приложения и усвоения технических приемов, изученных в каждом новом отделе курса. Вместо этого автор сгруппировал их вместе, поместив между „формулой“ и „соотношением переменных величин“. К этому его побудили следующие основные соображения:

1. Сосредоточение большей части упражнений в одном отделе решения задач позволяет легче добиться твердого знания того, что всякий количественный ответ, который может быть получен при наличии данных величин, может быть найден путем составления на основе этих величин уравнения или системы уравнений и решения их при помощи соответствующих вычислений, а также привычки пытаться составлять уравнение или систему уравнений, если более простые способы непосредственного вычисления не приводят прямо к цели.

2. Использование задач для приложения к ним данного изученного технического навыка приводит учеников к знанию наперед, какого характера уравнения должны быть составлены (например квадратное), что серьезно понижает ценность задач.

3. Организация связей на основе положений значительно лучше, чем организация их на основе вида составляемых уравнений. Этот педагогический принцип легче провести, если сосредоточить решение задач в одном отделе.

4. Мы должны стремиться к составлению общих уравнений, формул или соотношений в большей степени, а к составлению особых уравнений для решения типичных словесных задач в меньшей степени, чем это принято сейчас. Одновременно следует чаще подчеркивать значение для счисления и применения счисления подобных общих уравнений и графиков и реже — значение особых типовых словесных задач. Это также может быть лучше достигнуто при концентрации решения задач.

5. Оригинальных, жизненных и действительно ценных задач не хватает для параллельного использования при прохождении техники решения несложных уравнений, дробных уравнений, квадратных уравнений, уравнений, содержащих корни, прогрессий и т. д. Из пятисот, приблизительно, задач, входящих в стандартный курс первого года обучения алгебре, едва ли сто потребуют в жизни решения при помощи алгебраических методов. Прекрасный материал для задач можно черпать из статистики, экономики, физики, химии, механики и т. д., но он редко пригоден для занятий с новичками. Поэтому ограниченный круг задач, касающихся предметов и явлений, доступных пониманию учащихся, следует сосредоточить в одном месте.

Само собою разумеется, что предлагаемое автором сосредоточение задач в одном разделе не исключает применения их в качестве введения,

пояснения, доказательства полезности приема и т. д. во всех тех случаях, когда это полезно для обучения; автор борется не за изъятие задач из всех других отделов, а за отказ от принятого расчленения их согласно шаблонному правилу: прием А, применение приема А к решению задач; прием В, применение приема В к решению задач и т. д.

Когда следует проходить отрицательные числа.

Вопрос о том, когда следует вводить изучение отрицательных чисел, является довольно спорным. Так, Нонн (1914, стр. 53) не переходит к изучению указанного расширения числового ряда до тех пор, пока не пройдены следующие отделы алгебры: формулы, разложение на множители, несложные дроби, прямая и обратная пропорциональность, простейшие тригонометрические соотношения, графические изображения, квадратный корень, квадраты и кубы суммы и разности двух количеств, вычисление некоторых статистических величин.

Рогг и Кларк (1918, стр. IX) на основе школьных опытов откладывают изучение отрицательных чисел до второго семестра, предполагая ему прохождение следующих тем: буквенные обозначения, алгебраические выражения и формулы, простые уравнения с одним неизвестным, построение простейших графиков, подобие треугольников, простейшие тригонометрические соотношения и теорема Пифагора, статистические таблицы и графики, графическое изображение функции $y = ax + b$.

Предлагаемая указанными педагогами задержка с введением отрицательных чисел кажется автору недоказанной, и в этом вопросе он отстаивает традиционную позицию. Во-первых, очень многие обобщения и положения, заключающиеся в формулах, справедливы лишь наполовину, если мы вынуждены ограничиваться только положительными числами. В качестве примера можно привести известную задачу о двух поездах. Во-вторых, вводя слишком поздно отрицательные числа, мы вынуждены в ряде случаев составлять две формулы, хотя по существу достаточно одной. В-третьих, заставляя учащегося переучиваться, когда после длинного ряда алгебраических выражений, которые он встречал и получал, пользуясь только положительными числами, ему придется иметь дело с теми же самыми выражениями, но заключающими отрицательные числа, явно нерационально. Это не в интересах учащегося, который не найдет ничего привлекательного в повторении алгебраического сложения, вычитания, умножения, деления, действий над дробями и т. д., осложненных отрицательными числами; да и учителю будет весьма нелегко подыскать достаточное количество вполне пригодного материала для действий над отрицательными числами, если действия над положительными числами изучены уже ранее достаточно подробно и хорошо. Далее, дети не только не боятся новизны, но стремятся к ней; поэтому относительно раннее расширение представления о числовом ряде путем введения отрицательных чисел оправдывается и с точки зрения психологии.

Исходя из этих соображений, автор полагает, что основное понятие об отрицательном числе должно приобретаться вскоре же после того, как учащиеся освоятся с применением буквенных обозначений, т. е., приблизительно, в течение шестой недели первого года обучения алгебре.

Основные соображения, побуждающие Нонна и Рогга-Кларка откладывать изучение отрицательных чисел, сводятся к следующему: 1) что две существеннейших алгебраических темы — символику и зависимость

переменных величин — можно изучать, не прибегая к отрицательным числам; 2) что овладение ими желательно не осложнять другими темами, могущими явиться источником дополнительных ошибок; 3) что повторение этих тем и всей техники счисления при распространении упражнений на отрицательные числа полезно, давая большой дополнительный учебный материал и последовательное расширение понятия о числе.

Автор признает серьезность этих доводов и готов согласиться, что из трех вещей — символики, соотношения переменных и обобщения понятия числа — последняя является наименее ценной. Точно так же, если бы было доказано, что изучение всех их трех в течение первых трех месяцев обучения алгебре невозможно без взаимной помехи, то автор согласился бы несколько отсрочить изучение последней темы. Он полагает, однако, что при некотором внимании и старании весьма многих затруднений можно будет избежать, так что выигрыш от более раннего введения отрицательных чисел будет значительно превышать проигрыш. В частности, затруднения могут быть в значительной степени избегнуты, если доказательства будут заменены усвоением принципа и приобретением путем опыта уверенности в том, что правила знаков верны, так как они всегда приводят к правильным ответам [например в случае $(100 + 2)$ $(100 - 2)$, проверяем умножением (102×98)], если при классных занятиях будут широко применены положительные и отрицательные отметки, получаемые при тестах, отклонения от стандартов роста, возраста и т. д., равно как и другие факты, подходящие для объяснения и применения понятия отрицательного числа. Многие из трудностей, встречаемых в этом случае учащимися, обуславливаются только нашими объяснениями, а смущение — нашими требованиями пользоваться последними и в тех случаях, когда простейшие арифметические соображения быстрее и естественнее приводят к желаемому результату.

ГЛАВА XII.

ПРОЧНОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ.

В настоящее время установлено, что учащиеся, вообще говоря, не владеют элементами алгебры. Об этом красноречиво свидетельствуют результаты соответствующих тестов. В помещаемой ниже таблице приведены результаты выполнения первых 28 упражнений из общего числа их 40, причем на работу давалось от 90 до 100 минут вместо 25, которых достаточно для безошибочного решения всех примеров (исключая случайные ляпсусы) теми, кто хорошо владеет алгеброй. Жалоб на недостаточное количество времени было очень немного, часто же не было вовсе, и почти все ученики успевали проделать все 28 упражнений, некоторые же из них и перейти к дальнейшим примерам. Школы, в которых производились испытания, принадлежали к числу наилучших по постановке учебного дела, и учащиеся в этих школах превосходили по общему развитию и математическим способностям общий средний уровень, установленный для обучающихся второй год в школе повышенного типа. Все ученики изучали алгебру в течение года и более; испытания производились в октябре — декабре (1921 г.), т. е. в тот период, когда учащиеся продолжали занятия алгеброй.

ТАБЛИЦА ПРОЦЕНТА НЕВЕРНЫХ И НЕПОЛНЫХ ОТВЕТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПЕРВЫХ
28 ПРИМЕРОВ ТЕСТА В 10 ШКОЛАХ

Примеры	ШКОЛЫ									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1. $(5a^2 + 4 - 3a^2) + (a^2 - 2 - 7a^2 - 5)$. .	11	4	10	7	23	18	23	54	46	47
2. $(-2a^3 - 10a - 4a^3) + (5a + 3a^3 - 4a)$	14	19	4	7	20	25	35	45	44	51
3. Вычтешь $5a - 9b - 3c$ из $3a + 4b$. . .	6	9	8	7	17	17	35	35	52	65
4. Вычтешь $3c - 3a$ из $5a - b - 2c$. . .	4	6	7	10	9	18	51	32	59	65
5. $8a + 8b + (3a + 6b)$	4	9	7	12	11	17	39	38	53	63
6. $(5d - e) - (7e + 2f)$	14	11	12	21	20	28	42	41	66	61
7. $7d \times 2de^2$	7	2	1	0	6	11	26	30	28	26
8. $de^2 \times d^2e$	9	9	8	2	8	24	28	38	48	37
9. $8 - 5(d + 2)$	10	6	24	21	20	34	29	61	80	63
10. $4e^2 + e(-4e - 3)$	10	6	17	14	14	30	43	60	73	70
11. $5np - 3p(4n + 3p)$	14	9	21	14	15	28	36	58	74	61
12. $m + \frac{8m^2n^2}{mn}$	39	11	31	26	20	44	72	71	75	81
13. $4m + \frac{2m^2np^3}{mp}$	39	26	36	45	23	40	78	80	88	84
14. $\frac{m^2np}{mn} - \frac{m^2n - mp}{m}$	47	30	44	45	42	62	87	84	94	95
15. $(m^3n)(m^2n^3)$	3	2	9	5	5	23	39	58	52	35
16. $(2a - 7)^2$	4	6	7	14	6	13	26	34	46	49
17. Если $a=2$ и $b=3$, то чему равно $5a^2 - 2ab?$	11	0	8	5	15	18	32	44	62	51
18. Если $a=0,7$ и $b=1,2$, то чему равно $2a^2 - 5ab?$	57	45	46	50	63	64	80	78	91	91
19. Если $a=1$, $b=2$, $c=0,4$ и $d=100$, то чему равно $a^2 - b + cd?$	44	26	36	35	32	54	71	69	90	84
20. Если $a=12$, $b=6$, $c=5$, $d=3$ и $e=1$, то чему равно $\frac{22}{7}[ab + c(d - e)]?$	59	30	42	33	37	63	71	74	93	84
21. Если $d=2$, $e=3$ и $f=4$, то чему равно $\frac{df}{d+e} \cdot \frac{ef}{ef}$	16	9	17	19	22	28	48	63	81	77
22. $d = \frac{ef}{g}$. Чему равно $f?$	14	15	13	21	31	35	58	70	91	86
23. $\frac{e}{W} = \frac{r}{R}$. Чему равно $W?$	31	17	9	21	35	28	67	80	95	91
24. $\frac{PV}{T} = \frac{P_1V_1}{T_1}$. Чему равно $V?$	40	30	12	21	49	44	77	82	96	91
25. $4q = 7q + 5$. Чему равно $q?$	17	19	9	17	26	33	46	63	71	63
26. $15 = 7w - 4$. Чему равно $w?$	13	9	7	10	25	26	33	55	53	49
27. $\frac{V}{4} = a - 2$. Чему равно $V?$	10	2	5	5	22	19	49	62	74	74
28. $\frac{6}{2-u} - \frac{11}{3-u} = 0$. Чему равно $u?$	36	21	28	50	32	54	62	89	95	98

Рассматривая результаты этих испытаний, нельзя не сказать без боязни впасть в преувеличение, что учащиеся не владеют ни одним элементом алгебры, поскольку они не могут проделать ни одного упражнения с надежностью, близкой к 100%. Конечно, если бы мы спросили их, „сколько будет $3a$ и $7a$ “ или „сколько будет $3b$, умноженное на $2b$ “, то мы получили бы только правильные ответы. Однако это еще не свидетельствовало бы об их умении безошибочно выполнять сложение и умножение одночленов. Незначительного усложнения, как в случае примеров № 7, 8 и 10 [$7d \times 2de^2$, $de^2 \times d^2e$, $4e^2 + e(-4e - 3)$], уже достаточно, чтобы процент ошибок стал значительным.

Факты, установленные автором, подтверждаются всеми результатами испытаний алгебраических способностей, которые были до сих пор опубликованы; если в некоторых случаях они и не выступали столь отчетливо, то это вызывалось только тем, что в некоторых случаях дело осложнялось требованием большей скорости, а в других — большей трудностью примеров. Чтобы не быть голословными, можно указать на работы Монроэ (Monroe, 1915), Рогга и Кларка (1917), Чайльдса (Childs, 1917), Гоца (1918) и др.

Указанные обстоятельства побуждают рассмотреть вопрос о прочности умственных связей, требуемых при изучении алгебры, с точки зрения психологии. При этом в первую очередь надо остановиться на следующих двух основных положениях.

А. Ученики, подвергнутые испытаниям, могли приобрести навыки, которые позволили бы им выполнять простые упражнения, подобные приведенным, со значительно меньшим числом ошибок; примеры по своей трудности не превосходили способностей большинства учащихся и не содержали каких-либо хитростей, которых ученики не могли постигнуть.

В. Многие из учеников могли бы получить большие познания, если бы часть времени и умственной работы, затраченной как ими, так и педагогами на другие цели, была направлена на обучение вычитанию $3c - 3a$ из $5a - b - 2c$, умножению $2de^2$ на $7d$, отысканию V , когда

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_1V_1}{T_1} \text{ и т. д.}$$

Было бы лучше, если бы они хорошо знали половину или две трети тем, вместо того чтобы знать понемногу обо всем.

Вероятно, найдется очень и очень мало математиков, педагогов или психологов, которые станут оспаривать эти положения. Правильность первого из них легко показать, исходя из психологических соображений; кроме того, она доказывается *a posteriori* тем фактом, что в некоторых школах, в которых состав учеников был не выше по своему развитию, тот же тест обнаруживал лучшие алгебраические знания у учащихся. Что же касается справедливости второго положения, то ее можно аргументировать следующим образом. Если ученики не могут решить в среднем одного алгебраического примера из четырех, то дисциплинирующее значение алгебры сводится к нулю; если они столь неуверены в технике, то близко к нулю и значение алгебры как орудия счисления; можно опасаться также, что дети, так плохо оперирующие с символами и уравнениями, лишены каких-либо ценных представлений об алгебраической символике и уравнении.

Само собою разумеется, что мы не распространяем положения В на всю сумму алгебраических познаний и имеем в виду только те основные связи, которые требуются для решения приведенных выше примеров № 1—28. Все же надо сказать, что одним из наиболее надежных путей обеспечения близкой к ста процентам эффективности некоторых связей является принесение им в жертву других связей. Так, например, затрата весьма значительного количества времени на запоминание очень большого количества связей после их образования может отпасть, если мы применим следующий прием: „Перепишите тщательно эти формулы на карточку и всегда носите ее с собой в кармане“. Далее, можно достигнуть значительной экономии времени, не образуя систематических связей с многочисленными разновидностями выражений $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$ и пр. и рассматривая последние одновременно с множителями, на которые они разлагаются, как „оригинальные“ упражнения. Наконец, сам собою обнаружится ряд других случаев, в которых можно допустить весьма малую прочность образуемых связей.

Указывая на эти возможности, мы отнюдь не собираемся ни приносить в жертву формальной работе над символами приложений алгебры и изучения соотношений, ни стремиться выработать из учеников находчивых и быстрых алгебраических вычислителей. Мы подчеркиваем лишь необходимость усиления основных связей, которому до настоящего времени не уделяется должного внимания. Что касается формальной работы, то мы готовы значительно ее сократить. Так, например, мы считаем возможным опустить все упражнения с многочленными знаменателями дробей, деление на многочлен, извлечение квадратного и кубического корня из многочленов, что должно освободить значительное количество времени для укрепления основных связей. Равным образом мы отнюдь не гонимся за специальной тренировкой в алгебраических вычислениях: „практическая“ полезность алгебраических вычислений далеко не столь широка, как полезность простых арифметических вычислений. К тому же способность выполнять алгебраические вычисления никак нельзя рассматривать с точки зрения одной лишь практической полезности. Эта способность является доказательством понимания изученных принципов алгебры и средством для изучения других принципов. Пока ученики не овладели навыками, требующимися для решения приведенных выше примеров, они не могут обладать и правильными представлениями о природе алгебраической символики, об отрицательных числах, показателях, уравнениях и способах решения последних.

Заканчивая на этом аргументы в пользу необходимости усиления основных связей, обратимся к изложению способов, при помощи которых это усиление может быть достигнуто.

Прежде всего необходимо добиться лучшего и более раннего усвоения того существенного факта, что буквы обозначают числа. Встречаясь с выражением $ab \times b = ab^2$, учащийся должен научиться мыслить, что „произведение двух чисел, умноженное на одно из них, равняется тому“ и что $cd \times d$ будет равно cd^2 , $xu \times u$ будет равно xu^2 и т. д., причем под a , b , $c \dots x$, u следует подразумевать реальные числа реальных предметов или количеств.

Далее необходимо добиться того, чтобы путем применения проверки и „ключей“ учащиеся приобрели такую же уверенность в выполнении некоторых простейших алгебраических вычислений, какую они

обладают в отношении хотя бы сложения 2 и 2 или умножения до 10 на 10.

Если ученик пишет, что $ax \times 3ax^2 = 3a^2x^3$, не чувствуя уверенности в правильности ответа, и готов написать $3ax^3$ или $3a^2x^2$ с той же легкостью, как и $3a^2x^3$, то от него едва ли можно ожидать проявления в будущем значительных успехов; совершенно очевидно, что соответствующие связи нуждаются в усилении. В этом отношении здесь могут прийти на помощь способы, уже испытанные при преподавании арифметики. Ниже приводится „упражнение 1“, в котором наряду с примерами приводятся и ответы, чтобы учащийся сразу же мог определить правильно или неправильно решена им та или иная задача. Закрывая ответы и заглядывая в соответствующую колонку сперва после решения каждого данного примера, а затем после решения целого столбца их, учащийся имеет возможность проверять каждый этап своей работы. Давая „упражнение 2“, которое приводится ниже, следует сопроводить его указанием: „Решайте примеры до тех пор, пока вы не сможете написать правильные ответы в течение 15 минут“. Это упражнение также целесообразно проводить „ключом“.

Упражнение 1.

$5a \times 3$	$15a$	$a \times 3$	$3a$
$7b \times 4$	$28b$	$b \times 4$	$4b$
$6n \times 5$	$30n$	$k \times 9$	$9k$
$8p \times 6$	$48p$	$t \times 7$	$7t$
$10q \times 8$	$80q$	$y \times 6$	$6y$
$6a^3 \times 2$	$12a^3$	$c^2 \times 5$	$5c^2$
$4c^2 \times 3$	$12c^2$	$d^3 \times 7$	$7d^3$
$9d^4 \times 5$	$45d^4$	$x^2 \times 6$	$6x^2$
$6f^2 \times 7$	$42f^2$	$ay \times 4$	$4ay$
$2n^2 \times 10$	$20n^2$	$bn \times 8$	$8bn$
$4p^3 \times 5$	$20p^3$	$cq^2 \times 2$	$2cq^2$
$3q^3 \times 6$	$18q^3$	$ep^3 \times 5$	$5ep^3$
$5x^4 \times 7$	$35x^4$	$d^2z \times 9$	$9d^2z$
$2y^4 \times 8$	$16y^4$	$adx \times 2$	$2adx$
$3q^5 \times 9$	$27q^5$	$cy^2z^3 \times 3$	$3cy^2z^3$
$4a \times 2$	$8a$	$3a \times 2a$	$6a^2$
$5bd \times 3$	$15bd$	$9b \times 5b$	$45b^2$
$7ex \times 4$	$28ex$	$4c \times 6c$	$24c^2$
$8mt \times 5$	$40mt$	$2x \times 7x$	$14x^2$
$2xy \times 6$	$12xy$	$8y \times 9y$	$72y^2$
$2a^2 \times 7$	$14a^2$	$4ab \times 3c$	$12abc$
$5c^2k \times 8$	$40c^2k$	$9cg \times 8c$	$72c^2g$
$2ef^2 \times 9$	$18ef^2$	$6xy \times 5x$	$30x^2y$
$4h^2m \times 7$	$28h^2m$	$2pv \times 3p$	$6p^2v$
$5mn^2 \times 6$	$30mn^2$	$7mp \times 4m$	$28m^2p$
$3ab^2d \times 4$	$12ab^2d$	$2ad \times 8d$	$16ad^2$
$5de^2f^2 \times 5$	$25de^2f^2$	$8ab \times 3b$	$24ab^2$
$3p^2q^2t \times 7$	$21p^2q^2t$	$7ak \times 2k$	$14ak^2$
$2x^2yz^3 \times 8$	$16x^2yz^3$	$9cx \times 5x$	$45cx^2$
$3w^3y^2z \times 9$	$27w^3y^2z$	$5my \times 4y$	$20my^2$
$7x \times 2$	$14x$	$2ax \times 3ab$	$6a^2bx$
$5u^2t \times 3$	$15u^2t$	$4cy \times 8ck$	$32c^2ky$
$4a^3 \times 4$	$16a^3$	$6my \times 7mx$	$42m^2xy$
$4mn^2p \times 5$	$20mn^2p$	$5kp \times 8ep$	$40ekp^2$
$9axy \times 6$	$54axy$	$3ap \times 9mp$	$27amp^2$

Упражнение 2.

$6m \times 6$	$cx \times ab$	$2d(a - 6cd^2)$	$ax^2(dx + 12)$
$7axy \times 4$	$a^2z \times 7$	$-am(mn - a)$	$f(x - 16)$
$6ax \times 3ab$		$p^2(5px + s)$	$-cp(y - op)$
$d^3 \times d$	$4p^3 \times 5$	$-cx(x - 5y)$	$-4p(p + 4)$
$1,6h \times cm$	$m \times 3$	$acy(2y - c)$	$kms(4 - 2p)$
	$y \times 2y^2$		$-mn(pm - n)$
$1,4 \times 2x$	$5d \times 4dw$	$3y(n - asy)$	$9n(-a - 4n)$
$8 \times x$	$5p \times -3n$	$bfk(b + 4k)$	$ay^2(r + 5)$
$5x^4 \times 7$		$-bx(y - b)$	$2q^2(3q - 5)$
$np^2 \times an$	$6b \times 5b$	$3b(6 - bc)$	$-a^2d^2(a + ab)$
$4md \times cd$	$8cx \times 3x$	$-dv^2(3d - 8z)$	$m^2p(mp - 8)$
	$7ab \times 4b$	$-b^2(-b + y)$	$-8n^3(b - an)$
$3x \times ay$	$2de^2 \times 7d$	$4an^2(cn + 2a^2)$	$e^2y(y - 3)$
$cfh^2 \times 4ch$	$p^2w \times -pw^2$	$e(p - 8bc)$	
$3np \times 5df$		$-d^2x(11 - 2ax)$	$5x(7 + akx)$
$4nd^2y \times 2ady$	$4mn^2p \times 5$	$4y(x + c)$	$7n^2(3d - 2b)$
$2x^2y^2 \times 8$	$3ky \times 6bkx$		$-x^2y^2(x - 3dy)$
	$4ady \times 2dy$	$5m(x - am^2)$	$6a(9 + b)$
$3ef^2 \times 9$	$x \times b$	$-bdy(y - 3)$	$-ps(p - 8s)$
$x^3 \times x$	$y^2 \times p$		
$3v \times 2cv$			

Помимо письменных упражнений желательно применять и устные, следуя и в этом случае обычаю, укоренившемуся при преподавании арифметики; эти упражнения хороши тем, что неправильные ответы исправляются тотчас же.

Третьим способом усиления желательных связей является внесение в занятия большего интереса. В этом отношении заслуживают усиленного внимания работы Нонна, особенно много потрудившегося над приложением алгебраического счисления к преобразованию формул, которое, вообще говоря, может дать интересный материал для занятий алгеброй.

Четвертым способом является создание „моста“ между изучением A , B , C , D раздельно, изучением A и B совместно и C и D совместно, а затем всех четырех элементов A , B , C и D совместно. Так, ученик выучивается постепенно находить произведения $a \times bx$, $x \times y$ и $x^a \times y^b$ (где a , b , c и т. д. обозначают любые числа, а x , y и т. д. — любые буквы) и усваивает, что $+\times +$ дает $+$, $-\times -$ дает $+$, $+\times -$ или $-\times +$ дает $-$. Встречаясь с умножением $3p \times 4qr$, он должен использовать первые два положения; при умножении $p^2 \times (-p^3)$ он пользуется двумя последними положениями; если же ему надо выполнить умножение $(2^cmx) \times (-0,03m^2px^3)$, то ему приходится, очевидно, пользоваться всеми четырьмя положениями.

Но умение организовать и совместно использовать ряд связей нуждается в таком же развитии, как и создание отдельных связей. Здесь могут помочь ключи и упражнения, в которых примеры располагаются по степени их трудности, а также тщательный и всесторонний контроль результатов, при котором обращается внимание на знаки, коэффициенты, буквы и показатели. Тем из учеников, которые не могут сразу удовлетворить предъявляемых к ним требований, следует помогать, спрашивая их, что от них требуется, что они намерены делать и почему именно.

Мы не указали еще одного способа, именно — общего увеличения количества практических упражнений в счислении. Это объясняется отсутствием в нас уверенности, что общее увеличение количества тех упражнений, которые даются учащимся в настоящее время, является

достаточно экономичным путем усиления связей. Для нас еще неясно, в какой мере увеличение упражнений в общем счислении может вызвать укрепление слабых основных связей; этот вопрос нуждается еще в освещении путем постановки соответствующих исследований и опытов, тем более что характер и количество упражнений, которые мы заставляем учащихся проделывать в настоящее время, весьма далеки от совершенства, как мы это покажем в следующей главе.

Таковы соображения, касающиеся связей, которые должны быть сделаны более прочными, чем это наблюдается в настоящее время. Рассмотрим теперь те связи, которые могут быть сделаны менее прочными. Здесь прежде всего приходится отметить те связи, которые мы вообще признаем ненужными; их прочность, очевидно, может быть равной нулю. Далее следуют связи, носящие чисто мнемонический характер. Таковы, например, формулы, относящиеся к арифметической и геометрической прогрессиям и биному Ньютона. Несомненно, что ученики весьма выиграют, если мы позволим им заглядывать в учебники или выводить эти формулы, вместо того чтобы требовать от них знания этих формул наизусть. Возможны и дальнейшие поиски в этом направлении. Все же надо сказать, что если мы последуем советам и указаниям, изложенным в настоящей книге, то едва ли обнаружим сколько-нибудь значительное количество связей, которые из общего числа в 50 ответов не потребовали бы 49 правильных.

Нам остается рассмотреть здесь еще один специальный вопрос, именно — о „костылях“, т. е. о тех связях, которые должны быть образованы как временные и быстро уступающие свое место другим, постоянным связям. К числу их может быть отнесено записывание 1 как коэффициента или показателя и проставление скобок, включающих многочлен, являющийся числителем или знаменателем дроби, подкоренной величиной и т. д. Подобного рода „костыли“ редко находят себе защиту со стороны авторов руководств и преподавателей алгебры.

Вообще говоря, следуя основному принципу психологии, что „при прочих равных условиях связи надо образовывать тем же путем, который имеет место при их применении“, мы должны отказаться от пользования „костылями“, если только для создания их нет особо веских соображений. Если последние имеются, то все же для предотвращения отрицательного влияния „костылей“ надо принимать соответствующие меры, резко разграничивая нормальный „стандартный“ процесс от применения „костылей“. Это может быть достигнуто путем следующей, например, формулировки упражнений:

В следующих примерах вы можете проставить a^1 вместо a , b^1 вместо b , c^1 вместо c и т. д., чтобы запомнить, что отсутствие напечатанного показателя степени подразумевает 1 как показатель степени.

Решая следующие примеры, имейте в виду, что отсутствие напечатанного показателя степени 1 подразумевает его наличие.

$$a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} + a \right) \quad c^{\frac{1}{2}} \left(c^{\frac{1}{2}} - c + c^{\frac{3}{2}} \right) \quad a \left(a^{\frac{3}{2}} - a \right) \quad \left(c^{\frac{1}{2}} + d \right) \left(c + d^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$b^{\frac{1}{2}} \left(a + a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} \right) \left(e + e^{\frac{1}{2}} \right) \left(e - e^{\frac{1}{2}} \right) \quad d \left(\sqrt{d} - \sqrt{cd} \right) \quad b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} b + a b^{\frac{1}{2}} + b \right) \quad e^{\frac{2}{3}} \left(e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{2}} + e \right)$$

и т. д.

Имеются основания полагать, что преподаватели алгебры допускают слишком быстрое и значительное ослабление совершенно необходимых основных связей. Так, например, многие ученики не имеют ясного и твердого представления о том, почему общий знаменатель исчезает, когда мы избавляем от дробных выражений уравнение, и почему он остается при сложении и вычитании дробей. Повидимому, было бы весьма целесообразным научить учеников сперва помножать на наибольший знаменатель, затем на следующий по величине и т. д. Это, по всей вероятности, было бы лучшим приемом, чем отыскание общего наименьшего кратного, приведение к нему всех данных величин, а затем исчезновение всех знаменателей. Этот прием легче запоминается и вполне соответствует требованиям жизни. К тому же, если мы впоследствии все же обратимся к отысканию общего наименьшего знаменателя, то ученики будут уже подготовлены к этому и выполнят указанную операцию с большим смыслом.

Следует заметить, что в ряде случаев учителя принимают за „костыли“ то, что мы называем основным процессом, и приносят последний в жертву сокращенным способам вычисления. Так, учеников часто упрекают за то, что они выполняют умножение $(2m+7)(2m+7)$ непосредственно, не прибегая к формуле $a^2 + 2ab + b^2$, делят $m^6n^3 - 27p^3$ на $m^2n - 3p$, не пользуясь равенством $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ и т. д. Имея в виду весьма малую прочность основных связей, мы не можем рекомендовать слишком скоро забрасывать последние. Быстроту и находчивость при выполнении алгебраического счисления следует ценить, главным образом, как симптом понимания буквенных обозначений, отрицательных величин, формул, уравнений и основных алгебраических обобщений. Основные процессы обычно способствуют приобретению соответствующих познаний лучше, чем сокращенные способы вычислений; кроме того, и эти последние являются более поучительными, если они базируются на навыках, уже приобретенных на выполнении основных процессов.

ГЛАВА XIII.

ПСИХОЛОГИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ.

Оценка и изменение количества упражнений.

Подозревая, что у преподавателей алгебры и составителей соответствующих руководств нет ясного представления о количестве упражнений, необходимых для успешного изучения различных отделов алгебры, автор обратился к 68 авторитетным педагогам с просьбой ответить на следующий вопрос: „Если ученик проделает всю работу, требуемую обычным учебником алгебры, рассчитанным на одногодичное прохождение курса ее, то сколько раз, по вашему мнению, встретится он с каждым из следующих упражнений?“ Оценку надлежало дать всего 30 упражнениям-темам: они приведены ниже в таблице, к которой мы еще вернемся, причем два упражнения (5 и 6) опущены, как не вошедшие по некоторым причинам в общий подсчет результатов.

Обработав полученные ответы, автор обнаружил чрезвычайную пестроту оценки. Так, наивысшая оценка отдельных тем почти во всех случаях превышала наинизшую в сто или более раз, колеблясь от нескольких десятков до 10 000 для примера 1, от нескольких единиц до 2000 для

примера 3 и до 500 для примера 7 и т. д.; если же откинуть крайние оценки и взять только половину имеющихся оценок, наиболее близких к средним, то колебания будут все же составлять от одного до четырех, пяти, восьми раз и выше. Просуммировав оценку всех 28 тем, данную каждым педагогом, автор получил цифры, колеблющиеся от нескольких сот до 94 000, причем голоса опрошенных педагогов разбились весьма прихотливо. Так, указанная наинизшая оценка дана всего одним преподавателем; то же число голосов приходится на оценку (5000—5499); оценка (1000—1999) дана 12 преподавателями, а оценка (10 000—14 999) дана 9 преподавателями. Отсюда ясно, как велики колебания в представлении учителей о общем объеме упражнений, которые ученик должен проделать в течение одного года занятий алгеброй. Чтобы выяснить точку зрения педагогов на соотношение количества упражнений для различных видов их, автор поделил оценку каждой отдельной темы на сумму 28 отдельных оценок, данных каждым педагогом. Результаты получились также весьма расходящиеся: упражнения, встречающиеся наиболее часто, оценены различными педагогами как составляющие каждое от 1 до 20 процентов общего числа их; упражнения же, встречающиеся относительно реже — как составляющие от (0,5—1) до 10 %.

Нельзя отрицать того, что некоторые колебания в оценке вызывались разным пониманием отдельными педагогами выражения — „обозначить число буквой“, „составить уравнение“ и т. д. Известную роль сыграло также различие в учебниках, которыми отдельные педагоги привыкли пользоваться и которые дают различное количество упражнений по одним и тем же разделам курса. Но эти обстоятельства не могут существенно повлиять на основной вывод, что преподаватели не имеют ясного представления о количестве различных алгебраических упражнений, содержащихся в учебниках: еще меньше знают они, какое количество алгебраических упражнений фактически проделывается каждым учеником при школьных занятиях алгеброй. Выяснить последний вопрос можно было бы лишь путем тщательного подсчета, сколько и каких упражнений проделывает каждый учащийся как в школе, так и дома, и когда он их проделывает. Однако подобного рода работа столь грандиозна, что надо искать какие-то другие пути решения этого вопроса, хотя бы и дающие лишь приближенный результат.

Полагая, что количество упражнений, содержащихся в учебниках, вполне пригодно для характеристики учебной работы, автор организовал тщательный подсчет количества упражнений, содержащихся в четырех учебниках; при этом упражнения были столь детализированы, что общее число видов их получилось равным нескольким сотням. Результаты подсчета по тем 28 видам упражнений-тем (из 30), по которым была произведена описанная выше экспертная оценка педагогами, приведены в соответствующей таблице (графы А, В, С, D); анализ некоторых других результатов будет приведен ниже. Следует отметить, что составитель подобного инвентаря не может быть во всех отношениях приравнен к ученику; как бы он ни старался поставить себя на место последнего, все же он может выбрать не те методы решения, которые избрал бы ученик, он не делает ошибок, неизбежных для последнего, и т. д.; кроме того, в ряде случаев выбор способа решения, а, следовательно, и отнесение того или иного примера к определенному виду упражнений, носит условный характер. Несмотря на это, равно как и отмеченное выше отсутствие точного

соответствия между количеством упражнений, содержащихся в руководстве и фактически выполняемых учениками, автор считает полученные результаты весьма показательными; нельзя оспаривать того, что учебник является все же основной путеводной нитью для преподавателя, и соотношение между различными видами упражнений, содержащихся в нем, сохраняется в основном и при школьных занятиях.

Таблица

Упражнение-тема	A	B	C	D
1. Обозначение числа буквой	427	559	367	507
2. Составление уравнения	476	536	429	627
3. Словесное объяснение алгебраического выражения	49	30	52	72
4. Преобразование формулы	43	25	54	43
7. Раскрытие скобок при знаке — перед ними	200	232	41	121
8. Применение правил: + на — дает — и — на — дает +	412	813	87 + 9 к.	138
9. Сложение или вычитание многочленов .	38 258	39 49	1 3	39 38
10. Применение правила, что одинаковые степени равных количеств равны между собой	38	30	1	6
11. То же в отношении корней	107	98	102	48
12. Трехчлен $x^2 + bx + c$	215	208	131 + 18 к.	61
13. Трехчлен $ax^2 + bx + c$	164	123	—	66
14. Решение системы уравнений путем сложения или вычитания	131	132	60	80
15. То же путем подстановки	47	78	50	48
16. Выражение отношения	14	13	30	49
17. Изменение знака одного из членов дроби или перед дробью	30	43	8	14
18. Разность квадратов двух величин	183	280	—	139
19. Освобождение от дробей { в одночленах в многочленах	278 266	144 181	196 77	178 58
20. Деление на дробь	60	62	30	38
В последующем a, b, c обозначают любые числа и z, y, x — любые буквы				
21. $ax : x$	124	141	5	18
22. $x : ax$	0	3	5	3
23. $x^2 : x$	185	107	88	9
24. $x : x^2$	2	10	0	1
25. $a : bx$	4	0	1	0
26. Сложение и вычитание дробей	231	129	90	102
27. $x^2 : x^3$	0	0	0	0
28. $x^3 : x^2$	8	16	2	12
29. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$. . .	109	112	106	1
30. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ и $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. . .				

Что касается учебников, выбранных автором для составления перечня упражнений и значащихся под литерами А, В, С и D, то все они относятся к числу весьма распространенных в САСШ руководств. При этом

книги А и В являются типичными учебниками алгебры; книга С является руководством для одновременного преподавания алгебры и геометрии. В руководстве С в некоторых случаях указывается на необходимость проделывать для приобретения навыка дополнительные упражнения; не зная количества последних, автор отмечал их в таблице буквой k с соответствующим коэффициентом, указывающим, сколько раз встречалось подобное указание.

В дополнение к приведенной выше таблице ниже помещается другая, содержащая некоторые сводные результаты. Общие выводы, которые могут быть сделаны после сличения количества упражнений, содержащихся в указанных руководствах, таковы. Более или менее сложные упражнения в сложении, вычитании, умножении и делении встречаются в руководствах А и В в десять раз чаще, чем в С; действия над простейшими дробями — в три раза чаще; упражнения в понимании, составлении и преобразовании формул встречаются, наоборот, в руководстве С вдвое чаще, чем в А, и в пять раз чаще, чем в В. Вообще говоря, учебники А и В содержат гораздо больше упражнений, развивающих навыки в счислении, чем руководство С; если первые дают их в количестве, приблизительно, отвечающем нуждам школы, то последнее содержит их в явно недостаточном количестве.

Далее заслуживает упоминания следующее обстоятельство. В книге А раскрытие скобок при знаке $+$ перед ними встречается приблизительно в 20 раз чаще, чем при знаке $-$; деление $4x : x$ или $x^3 : x^2$ встречается в 150 раз чаще, чем деление $x : 4x$ или $x^2 : x^3$; правило, что „корни из равных величин равны между собой“, встречается втрое чаще, чем аналогичное правило относительно степеней; таково же соотношение между количеством упражнений над $a^3 - b^3$ и $a^3 + b^3$. Ненормальность подобного соотношения, характерного и для руководства В, резко бросается в глаза, и надо думать, что авторы этих руководств не допустили бы его, если бы имели представление о количестве даваемых ими упражнений. Экспертная оценка соотношения между теми же упражнениями, выполненная 69 педагогами, показала, что оно должно быть приблизительно равно единице для последних 3 случаев; в случае же раскрытия скобок знак $-$ должен встречаться раза в два чаще, чем знак $+$.

Таблица

Упражнение-тема	А	В	С	Д
Многочлен на многочлен (за исключением специальных случаев и умножения двучлена на двучлен)	28	61	0	106
Многочлен, деленный на многочлен (за исключением специальных случаев)	73	71	21	33
Разложение трехчленов, сумма или разность кубов двух величин и разность квадратов двух величин	790	865	223+21 к.	432
Составление и преобразование формул	54	25	119	65
Выражения ax , ax^2 , . . . ax^c ; $ab \cdot x$, $a \cdot bx$, . . . $a \cdot b \cdot xc$; $x \cdot x^2$, $x^2 \cdot x$, . . . $x^c \cdot x^d$	3 059	3 240	1 290	1 542
Выражения $x \cdot x$ и вообще квадраты одночленов	905	848	249+16 к.	440

Наконец, для психолога представят большой интерес следующие данные: разложение трехчлена $x^2 + bx + c$ встречается в А — 215 раз и в В — 208 раз; то же $ax^2 + bx + c$, соответственно — 164 и 123 раза; решение системы уравнений при помощи сложения и вычитания встречается в А — 131 раз и в В — 132 раза; то же при помощи подстановки, соответственно — 47 и 78 раз; решение квадратных уравнений при помощи разложения встречается в А — 111 раз и в В — 224 раза; то же при помощи формулы, соответственно — 50 и 29 раз. Разложение трехчленов проходится обычно как подготовительный путь к решению некоторых квадратных уравнений. Когда ученик научится применять универсальную формулу, то надобность в каких-либо других способах решения их отпадает. Поэтому позволительно усомниться, надо ли давать такое относительно большое количество упражнений в разложении трехчленов и придерживаться такого соотношения между двумя способами решения квадратных уравнений, которое рекомендуется учебниками. Далее, непонятно, почему учащийся должен иметь дело с трехчленом $x^2 + bx + c$ вдвое чаще, чем с трехчленом $ax^2 + bx + c$; отсутствие буквенного коэффициента при x^2 может создать навыки, скорее затрудняющие, чем облегчающие разложение трехчлена $ax^2 + bx + c$. Наконец, трудно согласиться с тем, что решение системы уравнений при помощи сложения и вычитания предпочтительнее, чем при помощи подстановки; хотя учащиеся обычно очень охотно применяют первый метод, все же второй является более универсальным и ценным.

Недостаточное и избыточное количество упражнений.

Из изложенного выше вытекает, что в ряде случаев мы имеем как недостаточное, так и избыточное количество упражнений, необходимых для создания и укрепления определенных алгебраических навыков. Данные, содержащиеся в помещенной ниже таблице и базирующиеся на подсчетах автора, наглядно иллюстрируют недостаточность некоторых видов упражнений даже для наиболее способных учеников.

Таблица

Упражнение-тема	А	В	С	Д
Записывание формулы	11	0	65	21
$a:bx$	4	0	1	0
$x:ax$	0	3	5	3
$x:x^2$	2	10	0	1
$x:x^3$	0	5	0	0
$ax:bx^2$	0	11	0	0
$x^2:x^3$	0	0	0	0
Изменение знака одного из членов дроби при изменении знака перед дробью	30	43	8	14
Изменение знака обоих членов дроби	0	16	0	4

Что касается избыточного количества упражнений, то в некоторых случаях оно явно вредно, так как ведет к непроизводительной затрате времени и падению интереса к работе, в других же случаях оно не

только полезно, но и необходимо. Последнее обстоятельство вызывается несколькими причинами. Во-первых, некоторые связи, достаточно прочные для овладения данными простейшими положениями, требуют большего количества дополнительных упражнений для овладения измененными и более сложными положениями. Так, овладение правилом, „чтобы вычесть число, измените его знак и приложите его“, в применении к случаям „вычитите 11 из 2“ или „вычитите $3x$ из $4x$ “, потребует решения, может быть, всего сотни примеров; но понадобится, вероятно, вдвое большее количество упражнений, чтобы то же правило могло быстро и безошибочно вести к решению таких примеров, как „найдите x , вычитая по 11 из обеих частей равенства $x + 11 = -2$ “, или „найдите x , вычитая по $-3x$ из обеих частей уравнения $4x = 14 - 3x$ “. Во-вторых, нам часто приходится вводить или иллюстрировать новые принципы и технические примеры, пользуясь положениями, которые должны быть усвоены превосходно. Так, все изучение степеней и корней базируется на факте $a \cdot a = a^2$, который должен быть настолько ясным, чтобы при последующем пользовании им внимание и мысль ни в коем случае не возвращались к его обоснованию. В-третьих, понятие об избыточном количестве упражнений относительно. Так, для нас почти безразлично, затратит ли ученик 5, 10 или 20 секунд прежде, чем использует равенство $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ для решения какого-либо сложного примера; но совершенно недопустимо, чтобы он столько же времени обдумывал целесообразность использования в соответствующих случаях равенства $ax : x = a$. К тому же, если навык уже приобретен, то дальнейшие упражнения выполняются крайне быстро. Так, усвоив правило знаков при умножении, учащийся едва ли будет затрачивать более 1—2 секунд на его применение, когда это нужно. Указанную быстроту можно иллюстрировать также следующим фактом. Автор поручил двум студентам, хорошо знающим алгебру, решить все примеры и задачи, содержащиеся в двух руководствах для первого года обучения алгебре; работа эта была выполнена ими в течение всего 25 и 24,5 часов. Отсюда ясно, что потеря времени на „переучивание“ после приобретения соответствующего навыка весьма невелика.

Само собою разумеется, что не следует допускать слишком большого количества упражнений в тех случаях, когда тема этого не заслуживает. Но и в отношении ценных фактов количество упражнений, вероятно, может быть значительно сокращено. Так, если мы обратимся снова к указанным выше руководствам, то обнаружим, что перенос членов уравнения встречается в книге С — 674 раза, а в книге В — 1262 раза, квадратный же корень из одночлена, являющегося квадратом, встречается в книге D — 358 раз, а в книге А — 771 раз. Поскольку обучение алгебре по руководствам С и D не уступает такому же по учебникам А и В, можно думать, что последние книги содержат избыточное количество упражнений.

Желательное количество упражнений. Располагаем ли мы в настоящее время достаточными данными, чтобы установить, какое количество упражнений необходимо и достаточно для развития тех или иных алгебраических навыков? На этот вопрос приходится ответить отрицательно. Следует заметить, что в случае обучения алгебре наше положение гораздо более сложно, чем при обучении арифметике. Если в последнем случае имели дело с такими обособленными и специфическими

связями, как $2 + 3 = 5$, $3 + 2 = 5$, $2 + 4 = 6$; $4 \times 7 = 28$ и т. д., и такими правилами, как „делитель $\times$ частное = делимому“, которые сохраняют постоянство и единообразие при применении, то в первом мы встречаемся с аналогичными связями и правилами гораздо реже. В самом деле, даже такое, видимо, твердое правило, как: „чтобы вычесть число, измените его знак и приложите его“, имеет совершенно различное значение в применении к вычитанию хотя бы a , $+ \frac{a}{2}$, $-a + b + c$,

$a^{-\frac{2}{3}}$. В первом случае мы меняем подразумеваемый знак $+$ на $-$; во втором случае меняем знак перед дробью, но не меняем знаков у членов ее, в третьем случае мы меняем знаки у всех букв: в четвертом случае мы меняем знак перед a , но не меняем знака перед дробным показателем степени. Далее, количество упражнений, необходимых для развития данной алгебраической связи, в сильнейшей степени зависит от помощи, которую ей могут оказать другие связи, и особенно от степени организованности и прочности всей совокупности связей, обуславливающей наличие алгебраических познаний или умения обращаться с буквенными выражениями. Конечно, учащимся надо давать некоторое количество упражнений в чтении и применении хотя бы следующих формул счисления, в которых a , b , c и т. д. обозначают любые числа, а x , y , z и т. д. — любые буквы: $ax + ay = a(x + y)$; $ax \times by = (a \times b)(xy)$; $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$; $x^a \times x^b = x^{a+b}$.

Однако количество этих упражнений зависит от живости представления учащихся, что буквы обозначают реальные числа реальных предметов, от количества упражнений с иными формулами и от степени претворения его опыта и навыков в сознание, подсказывающее ему, какие члены „равны“, что является „коэффициентом“ и что надо принять за „искомое число“ в каждом данном случае.

Количество упражнений, необходимых для развития каждой связи, зависит таким образом от общего учебного плана, включающего как составную часть развитие данной связи. Поэтому стандарт желательных достижений является решающим при определении этого количества.

Вообще говоря, к концу первого года обучения алгебре каждая из простейших связей, подобная „ $3x + 5x = 8x$ “ или „ $a^2 \times a^3 = a^5$ “, должна действовать безошибочно, скажем, 99 раз из 100 (т. е. с допущением лишь случайных погрешностей) и требовать для своего применения 2,5 сек. или менее; более трудные, но так же одиночные связи, как „ $-(a \dots) = -a \dots$ “, „12 может быть разложено на множители 2 и 6“ или

„ $\sqrt[3]{a}$ обозначает $a^{\frac{1}{3}}$ “, могут при той же степени надежности требовать 4 сек. или менее. Вычисления, требующие обращения к принципу и простейшего применения его, как „ $\frac{ab}{a} = b$ “, „ $\frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$ “, „ $x - 2a = 3a$ можно

привести к виду $x = 5a$ “ или „ $(a^2)^3 = a^6$ “, должны требовать при той же степени надежности 6 или 7 сек. В тех случаях, когда совместно действуют 4 — 5 однородных связей, как хотя бы в случае $x^2 y z^3 \times x y z^2$, наблюдается значительное сбережение времени, так как сознанию достаточно зафиксировать выбор принципа и способ его применения один только раз. Если же надо установить два элементарных факта или более,

выбрать две подходящих связи или более или определить правильный порядок их применения, то можно допустить и большую затрату времени и большее количество погрешностей. Так, не будет беды, если ученик подумает 2—3 сек., прежде чем примется за упрощение выражения

$$8 - 7(d - e) \text{ или } 5m + \frac{m^2np^3}{mp}.$$

Если мы рассмотрим первые 11 тем-упражнений, приведенных ниже в качестве примера, то обнаружим, что решение их требует применения

- | | |
|--|---|
| 1. $(5a^2 + 4 - 3a^2) + (a^2 - 2 - 7a^2 - 5).$ | 11. $5np - 3p(4n + 3p).$ |
| 2. $(-2a^4 - 10a - 4a^3) + (5a + 3a^2 - 4a).$ | 12. $m + \frac{8m^2n^2}{mn}.$ |
| 3. Из $3a + 4b$ вычесть $5a - 9b - 3c.$ | 13. $4m + \frac{2m^2np^3}{mp}.$ |
| 4. Из $5a - b - 2c$ вычесть $3c - 3a.$ | 14. $\frac{m^2np}{mn} - \frac{m^2n - mp}{m}.$ |
| 5. $8a + 8b - (3a + 6b).$ | 15. $(m^5n)(m^2n).$ |
| 6. $(5d - e) - (7e + 2f).$ | 16. $(2a - 7)^2.$ |
| 7. $7d \times 2ae^2.$ | 17. Если $a = 2$ и $b = 3$, то |
| 8. $de^2 \times d^2e.$ | чему равно $5a^2 - 2ab^2$? |
| 9. $8 - 5(d + 2).$ | |
| 10. $4e^2 + e(-4e - 3).$ | |

всего около 60 связей (по преимуществу простых) при весьма легком выборе их и установлении, что и когда надо делать. Принимая затрату времени в 2,5 сек. на каждую связь, а число ошибок — в 10 на 1000 для каждой связи, мы получаем для 11 упражнений 150 сек. и 0,6 ошибок. Если увеличить количество времени на 4 сек. для каждого примера и считать, что число погрешностей при чтении, записи, переносе данных и т. д. будет несколько большим, то получится, что 11 упражнений потребуют затраты 194 сек. и будут сопровождаться 1,8 ошибки. При выполнении учащимся проверки всех решений и получении для каждого примера двух совпадающих решений работа его будет практически безошибочной, но потребует около 40 сек. в среднем на каждый пример; если же мы предоставим ему самому определять, какие решения нуждаются в проверке, и выполнять последнюю частично, то получение не менее 9 правильных ответов из 10 потребует от него затраты времени в среднем по 30 сек. на пример. Взрослые, хорошо владеющие алгеброй, могут решить те же 11 примеров, затрачивая в среднем по 8 сек. на пример и получая 19 правильных ответов из 20; решение остальных 6 примеров потребует от них затраты по 11 сек. на пример при 11 правильных ответах из 12. В случае проверки сомнительных ответов практически безошибочная работа получается при затрате в среднем по 17 сек. на каждый из примеров 1—11 и по 24 сек. на каждый из примеров 12—17.

Учитывая эти обстоятельства, мы рекомендуем проделывать при обучении алгебре такое количество упражнений, которое гарантировало бы решение учащимися основных примеров, подобных 1—11, при затрате в среднем по 30 сек. или менее на каждый пример и получение не менее 9 правильных ответов из 10 (без проверки); для примеров 12—17 затрата времени может быть повышена соответственно до 40 сек.; в случае

применения проверки и предоставления для этого дополнительного количества времени учащиеся должны научиться выполнять работу практически безошибочно. Может показаться, что этот стандарт слишком высок: ведь и взрослые добились указанных выше результатов не сразу, а лишь после указания на необходимость более тщательной работы. Но это не так: овладение столь фундаментальными правилами, а также быстрота и надежность применения их совершенно необходимы для всех учеников, изучающих алгебру; понимание данного принципа, без которого нельзя правильно решить и одного из двух примеров, совершенно еще не гарантирует учащегося от ошибок в применении его и от других погрешностей в счислении; к тому же на выполнение работы мы даем им приблизительно в четыре раза больше времени, чем взрослым.

Для приемов, требующих большего участия избирательного мышления (например для решения уравнений, требующего выбора аксиом и определения того, что надо складывать, умножать и т. д.), установление стандарта быстроты менее желательно и существенно, так как здесь приходится иметь дело с влиянием значительной разницы в прирожденных способностях: способные дети быстро соображают, что и как им надо делать, тогда как тупые вынуждены долго выбирать, а может быть и испытывать различные возможности решения. Практическую безошибочность решения (обеспечиваемую, когда это нужно, проверкой) следует требовать и в этом случае.

Таким образом, количество времени, затрачиваемого на упражнения, и число повторений следовало бы привести в соответствие со стандартами желательных достижений. Поскольку современные руководства совершенно оставляют в стороне вопрос о повторяемости, автор попытался получить оценку числа повторений, желательных в отношении некоторых примерных тем-упражнений, путем хотя бы приближенной экспертной оценки.

С этой целью он обратился к 5 психологам и 64 преподавателям математики с просьбой указать, какое количество упражнений считают они разумным давать в течение первого года обучения алгебре для каждой из 12 тем, указанных в помещенной ниже таблице, принимая, что на изучение этих тем должна приходиться всего одна четверть времени, посвящаемого занятиям алгеброй, и включая в подсчет желательного количества как специальные упражнения над данной темой, так и продельваемые попутно с другими упражнениями. Средние оценки, данные психологами, приведены в гр. I, то же учителями — в гр. II; в гр. III даются средние из оценок гр. I и гр. II; гр. IV содержит средние из подсчета по четырем упоминавшимся выше руководствам (см. табл. на стр. 176).

Индивидуальные колебания в оценках были в этом случае довольно значительными как среди психологов, так и среди педагогов; среди отдельных экспертов наблюдалась и некоторая неуверенность при производстве частных оценок. Это не должно, однако, подрывать нашего доверия к общим результатам, показывающим чрезвычайную близость средних величин оценки как со стороны психологов, так и педагогов. Поэтому мы считаем возможным принять их как разумное мерило для количества упражнений над перечисленными темами, по крайней мере до тех пор, пока в этом отношении не будут произведены соответствующие опыты. Читателю не безынтересно будет сопоставить результаты этой экспертной

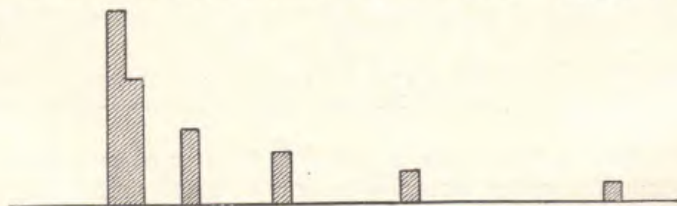
Т а б л и ц а

Упражнения-темы	I	II	III	IV
1. Словесное объяснение алгебраического выражения, уравнения или формулы	125	125	125	51
2. Составление уравнения и решение его в случае частной словесной задачи	300	215	260	506
3. Составление формулы для общего правила или соотношения	125	100	110	16
4. Преобразование формулы	200	110	155	43
5. Знак — перед скобкой	100	100	100	161
6. Сложение и вычитание дробей с числами в знаменателе	125	100	110	116
7. Сложение и вычитание дробей с буквенными знаменателями	100	100	100	
8. Перенос членов из одной части равенства в другую	500	500	500	909
9. Квадратный корень из одночлена, являющегося квадратом	175	100	140	565
10. Решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными	75	100	90	156
11. Разность квадратов двух количеств	75	85	80	163
12. Пользование графическими изображениями	100	75	90	20

оценки со средними данными подсчета количества упражнений, фактически содержащихся в четырех упомянутых выше руководствах (гр. IV).

Распределение упражнений.

Одно и то же количество однородных упражнений может быть распределено в течение учебного года весьма неравномерно: их можно давать или все сразу в течение короткого периода, или в более или менее постоянном количестве в течение всего учебного года, или в убывающем количестве через некоторые промежутки времени в течение всего учебного сезона или же части его и т. д. Если изобразить это распределение упражнений графически, откладывая по оси абсцисс отрезки времени, а по оси ординат — количества упражнений, то в первом случае мы получим



Фиг. 18.

одиноким стоящим столбиком, во втором случае — вытянутым прямоугольником, в третьем случае — рядом столбиков убывающей высоты, разделенных между собой более или менее значительными промежутками. Последний случай иллюстрируется двумя диаграммами (фиг. 18 и 19), для которых автором избран следующий масштаб: 2,8 мм по оси абсцисс соответствует одной учебной неделе, а по оси ординат — четырем упражнениям.

Первый способ распределения упражнений, вообще говоря, нежелателен, так как при нем ученик может потерять интерес к занятиям в первоначальной стадии изучения данного факта благодаря избытку упражнений и не связать этого факта со всеми последующими благодаря отсутствию упражнений в дальнейшем. Второй способ также неудачен: если для усвоения данного факта достаточно небольшого количества первоначальных упражнений, то равномерное распределение их в течение всего последующего периода обучения безусловно приведет к общему



Фиг. 19.

избытку данных упражнений; поэтому применение его, как такового, не вызывает возражения лишь в отношении таких, весьма часто встречающихся фактов, как „ $+$ на $-$ и $-$ на $+$ дают $-$ “ или „при прибавлении равных величин к равным получаются равные величины“. Таким образом, наилучшим способом распределения упражнений является при прочих равных условиях третий способ, иллюстрированный диаграммами. В этом случае при первоначальном изучении данного факта дается достаточное количество упражнений для овладения им; спустя некоторый промежуток времени приобретенные знания проверяются и обнаруженные пробелы исправляются; спустя большой промежуток времени (в течение которого однородные упражнения возможно и встречаются) проверка и пополнение знаний производятся снова; так продолжается до тех пор, пока данный навык не приобретает необходимой степени жизненности и прочности.

Чтобы установить, как же распределяются упражнения разных видов (например: $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$, деление одночлена на одночлен и т. д.) при фактических занятиях алгеброй, автор произвел многочисленные выборки из алгебраических руководств и составил соответствующие диаграммы. Они наглядно показывают, что распределение упражнений, предусматриваемое даже лучшими руководствами, весьма несовершенно: упражнения то сгруппированы в избыточном количестве при первоначальном изучении данной темы, то разделены слишком большими промежутками времени, то размещены совершенно случайно. В этом нет ничего удивительного. Как бы ни был талантлив составитель учебника, он совершенно не в состоянии следить за распределением упражнений сразу по ста или более изучаемым темам, когда перед ним одновременно стоят огромной важности задачи установления общей системы преподавания, выбора тем и т. д. Единственный путь, по которому ему надлежит идти в данном случае, это — составлять диаграммы предполагаемого распределения упражнений, сопоставлять их между собой, вносить необходимые коррективы и последовательно приближаться к тому наилучшему распределению, которого можно достигнуть без ущерба для

жизненности, интереса, последовательности и других существенных сторон обучения алгебре. К тому же психология слишком еще недавно пришла на помощь педагогам, указывая им, как надо анализировать и устанавливать умственные связи, которые должны создаться у обучающегося алгебре.

С точки зрения психолога, следует бороться как с „переучиванием“ в период приступа к данной теме, так и с „недоучиванием“ в течение последующего периода; возвращение к данной теме во избежание потери как представления о ней, так и соответствующих навыков совершенно необходимо. Поэтому автор считает крайне нежелательным такое концентрированное распределение упражнений, которое было обнаружено им в отношении следующих, например, тем: многочлен, умноженный на многочлен — 112 упражнений, в том числе 89 в течение одной недели; решение системы уравнений с двумя неизвестными — 59 упражнений, в том числе 52 в течение одной недели; буквенные уравнения, отличные от формул, — 26 упражнений в течение одной недели; умножение корней — 20 упражнений в течение одной недели и т. д. Опытные педагоги, конечно, стараются исправить этот дефект распределения упражнений во время занятий „обзорами пройденного“. Однако и здесь они вынуждены в основном руководствоваться учебниками; а последние и в этих отделах обычно недооценивают значения повторения некоторых тем и приемов. В заключение еще одно замечание, касающееся концентрирования упражнений в период первоначального изучения данной темы. Если на создание какого-либо навыка необходимо затратить в течение первой недели изучения его, допустим, 100 мин., то обычно все это время затрачивается сразу в один день, например 40 мин. при занятиях в школе и 60 мин. при занятиях дома. Это допустимо лишь в отношении очень немногих алгебраических фактов; для таких же простейших тем, как умножение и деление одночленов, сокращение дробей, приведение членов уравнения и т. д. гораздо лучше следующее примерное распределение времени: 45 мин. в первый день, 35 мин. во второй день и 20 мин. в четвертый. Эти упражнения в ряде случаев полезно сочетать с упражнениями в каком-либо другом навыке, который сопряжен с первым; так, умножение и деление одночленов, умножение и деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, степени и корни, умножение $(a + b)(a - b)$ и разложение $a^2 - b^2$ на множители следует изучать совместно. Равным образом мы не видим оснований, почему ученик, изучающий деление одночленов, должен в течение целого часа заниматься только этим делением и ничем иным; это может повести к пренебрежению знаком деления и отрыву изучаемого процесса от всех прочих. Поэтому представляется целесообразным после первого ознакомления с делением начать чередовать последнее со сложением, вычитанием и умножением, хотя бы в отношении 3:1:1:1 по количеству даваемых упражнений.

ГЛАВА XIV.

ИНТЕРЕС УЧАЩИХСЯ К ЗАНЯТИЯМ АЛГЕБРОЙ.

Чтобы выяснить склонность учащихся к занятиям алгеброй по сравнению с другими предметами, автор произвел, учитывая скудость литературных материалов по данному вопросу, анкетное обследование

свыше 1300 учащихся в школах повышенного типа, предложив им отметить, какой из изучаемых предметов они любят более всего, предпочитают другим, любят менее других и не любят вовсе; против названия каждого предмета они должны были поставить одну из соответствующих четырех отметок; обследованию подверглись дети, обучающиеся в школе двенадцатый и отчасти одиннадцатый год. Рассмотрение результатов этой анкеты (не претендующей на особую углубленность или точность), равно как и ознакомление с имеющимися литературными данными показывают, вообще говоря, что интерес учащихся к занятиям алгеброй уступает интересу их к занятиям многими другими предметами и теоретическими и прикладными (химией, физикой, биологией, стенографией, бухгалтерией и т. д.); на первом месте по расположению учащихся стоит родной (английский) язык, на последнем — латынь; алгебра занимает среднее положение, но все же более близкое к английскому языку. Вызывается ли этот относительно низкий интерес учащихся к занятиям алгеброй трудностью последней, ее отвлеченностью или же особым пристрастием американской молодежи к более „модным“ и утилитарным предметам — сказать трудно. Нужно еще дополнительное обследование этого вопроса, особенно если мы хотим как-либо изменить то отношение учащихся к занятиям алгеброй, которое наблюдается в настоящее время.

Вопрос об интересе учащихся к изучению различных отделов алгебры также оставался до последнего времени мало выясненным, если не считать совершенно общих утверждений, как то, что ученики предпочитают иметь дело с числовыми, а не с буквенными уравнениями и пр. Данные для решения этого вопроса можно черпать из трех источников: экспертных наблюдений за поведением учеников при тех или иных видах алгебраических занятий, показаний самих учеников и свидетельств учителей. Автор решил использовать по преимуществу второй источник. С этой целью он составил три перечня задач (a , b и c), по восемь задач в каждом, и распространил их среди учащихся. Перечень a был роздан 417 ученикам и ученицам, перечень b — 311 и перечень c — 381. Получив тот или иной перечень, учащийся должен был поставить одну из четырех условных буквенных отметок, характеризующих, как и в предыдущей анкете, его расположение или нелюбовь к каждой из восьми задач, выбранных намеренно из числа совершенно конкретных примеров. Автор полагает, что оценка последних могла быть произведена учащимися гораздо точнее, чем каких-либо тем, поставленных в общем виде; давая каждому учащемуся для оценки большее число задач автор затруднился, опасаясь, как бы это не вселило в них подозрения, что производится какой-то тест их индивидуальных способностей, и не натолкнуло их на путь списывания у соседей; к тому же оценка меньшего количества примеров легче для учащихся и менее способна оттолкнуть их от этой работы. Последнее соображение руководило автором и при установлении числа разрядов отметок: автор остановился на четырех, опасаясь, что при большей дробности учащиеся встретят затруднения в оценке градаций своего отношения к различным примерам. Участие учителей в этой работе, как таковой, было совершенно исключено: они только раздавали листки учащимся и собирали их после заполнения. Необходимо отметить также, что перечень c содержал по две задачи, помещенных в перечнях a и b ; это дало возмож-

ность сопоставить результаты оценки всех двадцати различных примеров, содержащихся в трех перечнях, в их совокупности, и расположить все двадцать примеров в порядке склонности учащихся к их решению.

Обработка полученных оценок была произведена следующим образом. Цифрой 5 отмечалось пристрастие ученика к решению данного примера, цифрой 1—его нерасположение, цифрой 4 и 2—соответственные промежуточные оценки; примеры, не получившие со стороны учеников буквенной оценки, т. е. вызвавшие безразличное к себе отношение, отмечались цифрой 3. В отношении каждого примера была высчитана средняя отметка из показаний, отдельно для учеников и учениц. Так, пример $a2/c2$ получил отметку 2,90 со стороны учеников и 2,96 со стороны учениц; пример $a1$ — 3,34 со стороны учеников и 4,05 со стороны учениц и т. д. Приняв отметку примера $a2/c2$ за условный ноль и вычитая ее из прочих отметок (например для $a1: 3,34 - 2,90 = 0,44$; $4,05 - 2,96 = 1,09$), автор получил ряд положительных и отрицательных отметок для всех примеров перечней a , b и c . Переход к относительной оценке примеров перечня b был совершен путем использования отметки для примера $c3$, совпадающего с примером $b2$. Для сопоставления всех трех перечней можно было бы использовать и другие пары совпадающих примеров, ида, например, не от отметок для $a2$ и $b2$, а хотя бы для $a6$ и $a8$. Результаты получились бы хотя и несколько отличные, но довольно близкие. Поскольку речь идет здесь о приблизительном установлении лишь порядка отметок, а не их абсолютной величины, возможное расхождение не имеет для нас никакого практического значения.

Результаты выполненных подсчетов приведены в следующей таблице. Здесь в гр. I указана нумерация задач и литеры перечней, в гр. II — отметки, высчитанные по оценкам учеников, в гр. III — то же по оценкам учениц, в гр. IV — средние из отметок, помещенных в гр. II и III; в гр. V приводятся результаты экспертной оценки относительной склонности учащихся к тем же примерам, выполненной двадцатью двумя учителями, причем отметки ставились последними по двадцатибалльной системе. Из сопоставления цифр гр. IV и V можно заключить, что расхождения в оценке, данной как педагогами, так и самими учащимися, в общем не очень значительны; в отношении же наименее любимых примеров наблюдается почти полное совпадение оценки.

Рассмотрение данных, помещенных в таблице, позволяет нам притти к некоторым достаточно достоверным выводам.

Во-первых, не подтверждается утверждение, будто ученики предпочитают прикладные задачи вычислениям; все три прикладных задачи ($c7 - b8$, $a6 - c6$ и $b6$) получили относительно низкую оценку, причем наименее „прикладная“ задача ($c7 - b8$) получила относительно более высокую оценку.

Во-вторых, совершенно определенно подтверждается распространенное мнение, что действия над числовыми выражениями учащиеся предпочитают действиям с буквенными выражениями; это явствует из сравнения оценок для следующих пар однотипных примеров: $a1$ и $b1$; $a4$ и $c8$, $c5$ и $a5$; единственное исключение составляют сопряженные примеры $b3$ и $a3$; здесь буквенное выражение оценено слегка выше, чем числовое.

Примеры	I	II	III	IV	V
$2x + 4y = 11$ }	$c5$	1,60	1,40	1,50	3,5
$4x + 2y = 9$ }	$c1$	1,05	0,85	0,95	1
$x + 9 = 2x - 5$	$a5$	0,91	0,72	0,82	13
$2x + y = 2(a + b)$ }	$a1$	0,44	1,09	0,77	2
$4x + 2y = a + 4b$ }	$a7$	0,45	0,32	0,39	9
$4x - 7 = 5x - 4 - (3x - 1)$	$\left\{ \begin{array}{l} b2 \\ c3 \end{array} \right.$	0,39	0,15	0,27	6
Графическое изображение $x + 2, x + 4,$	$c4$	0,27	0,13	0,20	8
$x + 6$	$b5$	0,14	-0,05	0,05	3,5
$a = 1, b = 2, c = 3 \frac{a^2}{b} - \frac{a}{a+b}$	$a3$	-0,03	0,09	0,03	15
$\frac{a^3 - b^3}{(a^2 + b^2)(a + b)^2}$	$b1$	-0,01	0,06	0,02	7
$2x + \frac{x}{2} = 3x - 4$	$\left\{ \begin{array}{l} a2 \\ c2 \end{array} \right.$	0,00	0,00	0,00	11
$\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} - a^2c = b^2c$	$\left\{ \begin{array}{l} c7 \\ b8 \end{array} \right.$	0,35	-0,06	-0,01	11
$4x + a = 2x - b - (x - a)$	$b3$	0,01	-0,07	-0,03	5
Вычесь $\frac{a^2 - b}{c}$ из $a - \frac{b}{c}$	$b7$	-0,06	-0,16	-0,11	11
Сумма половины, трети и одной пятой данного числа на 1 больше этого числа. Определить последнее	$a8$	-0,28	-0,23	-0,26	16
$\frac{x}{4} + \frac{5}{x+3} = \frac{x-2}{3}$	$\left\{ \begin{array}{l} a6 \\ c6 \end{array} \right.$	0,07	-1,21	-0,40	14
$\frac{x}{4} + \frac{5}{x+3} = \frac{x-2}{3}$	$a4$	-0,62	-0,45	-0,54	19
Графическое изображение $y = 2x,$	$b6$	-0,35	-1,21	-0,78	17
$y = x^2$	$b4$	-1,33	-0,93	-1,13	18
$2a^2 - 18 - (a + 3) \left\{ \frac{a^2 + 3a - 18}{a + 16} \right\}$	$c8$	-1,41	-1,34	-1,38	20
Моторная лодка идет в стоячей воде со скоростью 18 км в час. Сколько требуется времени, чтоб подняться в этой лодке против течения на 15 км и вернуться обратно, если скорость течения равна 3 км в час?					
$\frac{\left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}}\right) + \frac{1}{11}}{4}$					
Во сколько обойдутся n предметов по c за штуку, включая расходы на пересылку p и страхование 0,02 nc ?					
$\frac{2a^2}{(a^2 + b^2) - (a - b)^2} - \frac{a^2 + 2ab - 3b^2}{a - b}$					
$\frac{\left(a + \frac{b}{c - \frac{a}{b}}\right) - \frac{abc}{bc - a}}{b - a}$					

В-третьих, можно установить, что учащиеся чувствуют такое же нерасположение к дробным выражениям, как и к буквенным; в этом отношении весьма характерна оценка однотипных примеров $b5$ и $c1$, отличающихся с точки зрения трудности решения лишь наличием двойки в знаменателе одного из членов уравнения. Повидимому, изучение дробных выражений при занятиях как арифметикой, так и алгеброй, вселило в учащихся общую антипатию к дробям.

В-четвертых, учащиеся не любят длинных упрощений, особенно если дело касается буквенных выражений; соответствующие примеры получили наиболее низкую оценку. Явление это обуславливается в значительной степени относительной трудностью этих упрощений, так как трудность вообще понижает оценку примеров учащимися; наиболее легкие примеры (уравнения, подстановки и графические изображения) получили с их стороны наивысшую оценку.

В-пятых, подстановка численных значений нескольких переменных величин (пример $b2 - c3$) представляет для учеников интерес, несмотря на то, что в курсах алгебры этому виду упражнений уделяется весьма малое внимание и работу эту ученики выполняют обычно весьма плохо.

В-шестых, графическое изображение уравнений отнюдь не представляет собой столь неприятного упражнения, как думают многие преподаватели математики: легкий пример $a7$ оценен учащимися относительно очень высоко, а более трудный пример $b7$, содержащий x^2 и наводящий на мысль о сложных вычислениях, связанных с квадратами, получил оценку лишь немногим ниже средней. Надо полагать, что учащиеся поняли данные примеры и что самое выражение „графические изображения“ ассоциировалось в их представлении с интересными и жизненными статистическими диаграммами.

В-седьмых, ученики не любят трудных примеров и чувствуют большое расположение к легким, особенно таким, в которых малая затрата мысли и работы может дать существенный результат. Так, наивысшую оценку получил пример $c5$ (решить уравнения $2x + 4y = 11$ и $4x + 2y = 9$), в котором ученик сразу видит, что ему надо делать, чувствует уверенность в своих силах и решает оба уравнения „одним взмахом“. Многие учителя истолкуют этот результат оценки упражнений учащимися как проявление со стороны последних умственной лени и отвращения к затрате усилий, особенно на решение прикладных задач. Подобные качества довольно часто наблюдаются у немногих учащихся и изредка — у многих. Но объяснять ими отношение учеников к различным видам упражнений было бы неправильным. Природа человека такова, что он, вообще говоря, предпочитает обилие, сложность и запутанность положений, создающие затруднения для размышления, однако при непременном условии, что он может выполнять работу плодотворно, уверенно и искусно. Большинство из нас, вероятно, предпочтет заниматься в течение часа примерами типа $c8$, а не $c5$, как это делают учащиеся. Но причины такого различия в пристрастии не противоположны, а скорее одинаковы; и мы и учащиеся одинаково любим сложность и запутанность, с которыми мы легко можем справиться; этому условию отвечает для нас пример $c8$, а для учащихся — $c5$.

В заключение отметим, что трудность, сложность, „дробность“ и „буквенность“ алгебраических выражений тесно переплетаются во многих из двадцати указанных выше примеров. Для того чтобы проследить

влияние каждого из этих факторов на отношение учащихся к упражнениям, необходимо поставить ряд дальнейших наблюдений, используя такие примеры, в которых эти факторы не переплетались бы. В тех случаях, когда применение экспериментального анализа представит затруднения, следует пользоваться методом парциальной корреляции, который, вообще говоря, должен найти себе широкое применение при изучении психологии обучения.

ГЛАВА XV.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ И ПОЛОВЫЕ РАЗЛИЧИЯ В УСПЕШНОСТИ ЗАНЯТИЙ АЛГЕБРОЙ.

Повседневный опыт убеждает учителей, что между мальчиками и девочками не существует, вообще говоря, сколько-нибудь заметного различия в способностях к занятиям алгеброй. Специальные испытания, проведенные в этом направлении, полностью подтвердили указанную точку зрения. Поэтому автор может только повторить положение, высказанное им еще в 1914 г., что „индивидуальные отклонения в пределах каждого пола превышают разницу между обоими полами, как таковыми, в столь огромное число раз, что с последней можно практически не считаться“.

Что касается интереса к алгебре по сравнению с прочими школьными предметами, то у мальчиков он стоит несколько выше, чем у девочек. Возможно, что это вызывается повышенным интересом мальчиков к физическим и инженерным наукам, в которых алгебра находит свое применение.

Приведенные выше данные относительно интереса учащихся к различного рода алгебраическим упражнениям указывают как будто на некоторое различие в оценке последних со стороны мальчиков и девочек. Так, „прикладные“ задачи оцениваются девочками значительно ниже, чем мальчиками, сложные упрощения смущают первых несколько меньше, чем вторых; упразднение скобок, перенос и приведение членов привлекают первых немного более, чем вторых. Различие в оценке прикладных задач должно привлечь внимание педагогов. При составлении задач авторами руководств круг интересов мальчиков используется обычно лучше, чем круг интересов девочек; возможно, что именно это обстоятельство создало среди последних известное предубеждение против словесных задач вообще, так ярко выразившееся в примере с моторной лодкой. Если это подтвердится, то надо будет принять меры к замене неясных и малопонятных положений, лежащих в основе многих задач, такими, которые были бы известны и полезны как мальчикам, так и девочкам.

Переходя к вопросу об индивидуальных отличиях в успешности занятий алгеброй, необходимо отметить, что основным материалом по этому вопросу являются результаты испытаний учащихся, изучавших алгебру в течение 9 месяцев, при помощи тестов Гоца (Hotz, 1918). Последние были опубликованы Гоцом суммарно для многих школ и обнаружили невероятно большие колебания в способностях отдельных учащихся. Автор попытался пересоставить данные Гоца таким образом, чтобы можно было судить об успешности учащихся каждой школы, и

влияние разницы в школьных системах и качестве преподавания, свойственных отдельным школам, было исключено. Пределы колебаний сблизились при этом на $\frac{2}{5}$, но остались весьма большими по абсолютной величине. Так в школе А 8 учеников имели сумму отметок от 90 до 99; 12 — от 80 до 89; 10 — от 70 до 79; 5 — от 60 до 69; 4 — от 50 до 59, 4 — от 40 до 49; 1 ученик имел сумму отметок ниже 20; средняя величина составила для 44 учащихся 74,7. В школе В 2 ученика имели сумму отметок от 50 до 59; 5 — от 40 до 49; 7 — от 30 до 39; 16 — от 20 до 29; 13 — от 10 до 19 и 5 учеников имели сумму отметок от 0 до 5; средняя величина составляла для 48 учащихся 25,0. Если в школе применяется распределение учащихся по группам в зависимости от их успешности в занятиях, то пределы колебаний в индивидуальных способностях внутри данной группы оказываются меньшими, чем во всех однородных группах данной школы, взятых вместе. Все же они остаются весьма широкими. Некоторые ученики из группы в 30 учащихся могут выполнять к концу года в единицу времени по меньшей мере вдвое большую работу, чем все остальные ученики, и решать задачи значительно большей трудности, чем слабые ученики группы; так, когда слабые научились решать $7x - x + 6 = 4$ или $7n - 12 - 3n + 4 = 0$, тогда сильные могут свободно обращаться с примерами:

$$\frac{3+2x}{(x-1)^3} + \frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = 0; \quad \text{или} \quad \frac{6x-2}{x+3} - 6 = \frac{3x^2+13}{x^2-9}.$$

Конечно, добиться при преподавании алгебры совершенно идентичных результатов для всех учеников данной группы было бы невозможно и в том случае, если бы все они обладали одинаковыми способностями; однако подавляющая часть разницы в успешности занятий отдельных учеников алгеброй обуславливается, вероятно, различием в их прирожденных способностях.

Переходя к этому вопросу, необходимо отметить, прежде всего, что указанная разница вызывается в большей своей части различием в общей способности учащихся к овладению абстрактными предметами (у некоторых учеников превышающей средний академический уровень, у других — не достигающей его) и лишь в значительно меньшей части различием в специальной способности учащихся к усвоению алгебры. Предположим, что мы располагаем точными данными как об общей успеваемости ста учеников, так и об их успехах в алгебраических занятиях. Выбрав систему координат, как на фигуре 20, и отмечая маленьким штрихом способность каждого отдельного ученика, мы получим диаграмму, подобную изображенной на указанной фигуре, где штрихи расположены в определенной системе, соответствующей коэффициенту корреляции $r = 0,70$. Заметим, что если бы способность к изучению алгебры находилась в точном соответствии с общей успеваемостью учащихся, то все сто штрихов расположились бы на прямой, имеющей наклон к оси абсцисс в 45° ; так как этого в действительности не наблюдается и некоторые способные ученики не успевают в алгебре, неспособные же иногда обнаруживают в ней хорошие успехи, то часть штрихов располагается как ниже, так и выше указанной прямой.

Приняв за грубое мерило общего развития учащихся их успеваемость в (школьных занятиях, исследователь Берлейн (Weglein, 1917) и Крэсорн (Crathorne, 1922) нашли коэффициент корреляции между успеваемостью

в алгебре на первом году изучения ее и средней успеваемостью в других предметах равными для разных школ от 0,50 до 0,64. Прочие исследователи — Буккингем (Buckingham, 1921), Проктор (Proctor, 1921), Торндайк (1922) и другие, воспользовавшись тестами общего развития, получили коэффициент корреляции для разных школ и групп изменяющимся от 0,38 до 0,50. Таким образом, последний колеблется как будто в широких пределах — от 0,38 до 0,64. Полученный результат нуждается, однако, в двух коррективах. Первый должен учесть неточность наблюдений, вызываемую недостаточной отчетливостью тестов, различием в обстановке испытаний (разное время дня, различные исследователи и т. д.) и различием в способе испытаний (длинный или короткий тест и т. д.); второй — различие в составе групп, не приведенных к определенному стандарту, поскольку численность последних оказывает заметное влияние на корреляцию. Проведя соответствующие пересчеты, автор пришел к заключению, что наиболее вероятной величиной коэффициента корреляции для обучающихся алгебре первый год является 0,70. Соответствующая „диаграмма рассеивания“ в случае



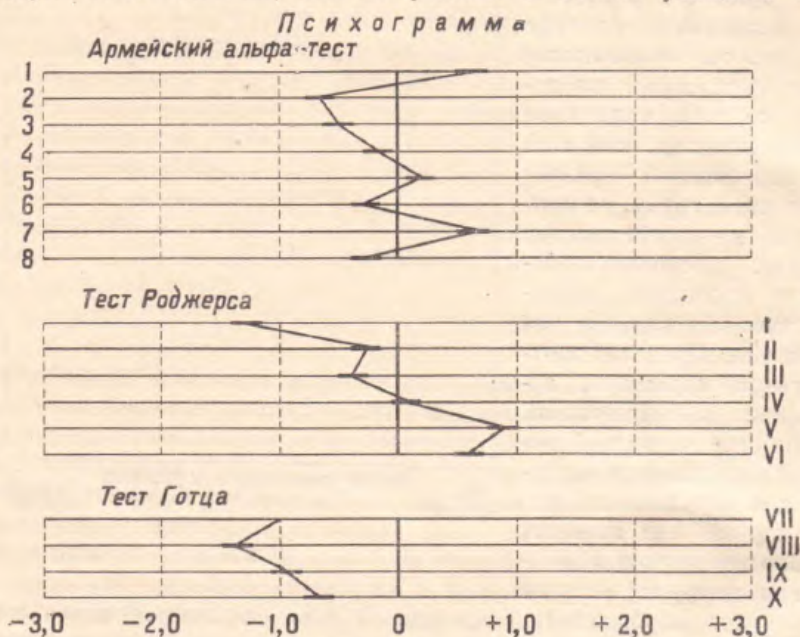
Фиг. 20.

ста учеников изображена на фигуре 20. Она показывает наличие значительных отклонений от соответствия между общим развитием и успешностью занятий алгеброй. Если бы мы построили аналогичную диаграмму для тысячи учеников, то отдельные индивидуальные отклонения были бы еще большими. Однако это не должно поколебать правильности общего вывода, что высокий уровень общего развития обычно обуславливает хорошие успехи в занятиях алгеброй, а низкий — плохие: та же диаграмма показывает, что из числа 22 наиболее одаренных учеников 17 занимаются алгеброй успешнее, чем их группа в среднем, а из 22 наименее способных учеников 17 обнаруживают успехи ниже средних для группы.

Вопрос о несоответствии между высоким уровнем общего развития и успеваемостью в алгебраических занятиях представляет особый интерес. Учеников, мало сведущих в математике и прекрасно работающих в области экономики, литературы, искусства, мы встречаем довольно часто, хотя, быть может, не в таком большом количестве, как это принято думать; об этом свидетельствует и наша диаграмма, и непосредственное ознакомление с такими учениками, обучавшимися в четырех школах. Многие из них испытывают трепет перед одним видом алгебраической формулы и мирятся с относительно низкими отметками за успеваемость в математике; однако последние являются низкими не в сравнении

с отметками по математике других учеников той же группы, а с их же собственными отметками по другим предметам, что и порождает в них чувство неудовлетворенности своими успехами в области алгебры.

В целях изучения размера и характера неуспеваемости в занятиях математикой весной 1921 г. было произведено специальное обследование неуспевающих учеников в четырех школах. При испытании применялись: армейский альфа-тест (форма 7), алгебраические тесты Гоца (серия А), тест алгебраических способностей Роджерса, тест в чтении Торндайка — Мак-Колла (форма 1) и тест основных арифметических познаний Вуди — Мак-Колла (форма 1). Результаты применения последних двух тестов показали, что по успехам в чтении учащиеся могли



Фиг. 21.

быть отнесены к двенадцатому году обучения, тогда как по успехам в арифметике — всего к восьмому. Сравнение суммарных результатов испытания учащихся при помощи отдельных тестов удобнее всего произвести на основании „психограммы“ (фиг. 21). Здесь вправо и влево от вертикальной срединной линии нанесены соответствующим образом оцененные индивидуальные отклонения от среднего уровня, изображенного указанной чертой; горизонтальные линии соответствуют отдельным изучаемым способностям; ломаные линии, проходящие через концы отрезков, отложенных вправо и влево от срединной черты, проведены только для наглядности и самостоятельного значения не имеют. Первое, что должно быть отмечено, это относительно низкие оценки способности в алгебраическом счислении вообще (линия I), умножении и делении (линия VIII), сложении и вычитании (линия VII); поскольку то же наблюдается в отношении арифметических задач (линия II), приходится думать, что корни неуспешности в алгебраическом счислении лежат в малой способности учащихся к арифметике. Далее обращает на себя внимание

значительно более высокая оценка способностей решения задач (линия X). Если сопоставить с этим низкую оценку численных подстановок и интерполяций (линия II) и относительно высокую оценку аналогичных приемов, но применяемых к словесным задачам (линия VI), то станет ясным, что учащиеся не питают расположения к счислению над буквенным и числовым материалом, в какой бы форме он им ни давался, и в то же время не обнаруживают каких-либо серьезных дефектов в области способности рассуждать и находить пути, необходимые для решения задач вообще. Оценка способностей учащихся к занятиям геометрией, характеризваемая линией III, указывает на отсутствие близкого соответствия между достижениями в занятиях алгеброй и геометрией, хотя эти предметы объединяются общим наименованием математики. Высокую оценку, полученную в отношении обращения с отношениями и пропорциями (линия V), автор не сравнивает с другими оценками, считаясь с некоторым своеобразием соответствующих примеров теста Роджерса. Помимо „психогаммы“, иллюстрирующей суммарные результаты, автором были составлены психогаммы результатов изучения способностей отдельных учеников. Эти последние подтверждают приведенные выше общие выводы.

ГЛАВА XVI.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ЖЕЛАТЕЛЬНЫЕ ИЗЫСКАНИЯ В ОБЛАСТИ ПСИХОЛОГИИ АЛГЕБРЫ.

В настоящей работе была сделана попытка осветить наименее известные стороны психологии элементарной алгебры. При этом относительно менее подробно были изложены три темы, которых мы здесь сейчас и коснемся.

1. Относительно меньшее внимание, уделенное автором вопросам влияния алгебры на общее умственное развитие и влияния усовершенствования алгебраических способностей на более широкие способности, интересы и склонности, вызывалось, с одной стороны, наличием обстоятельного отчета о современном состоянии наших познаний в этой области, выпущенного Национальным комитетом о нуждах математического образования, с другой стороны, — слишком большим масштабом тех дополнительных исследований, которые необходимо было бы произвести, чтобы получить новые, более подробные данные. В этом направлении можно ожидать весьма многого от продолжения работ Келлэ, упомянутых в главе VI, и сравнения изучения алгебры с изучением других предметов и другими видами деятельности при помощи повторных тестов в мышлении при отборе, установлении соотношений, обобщений, организации и применении символов; над этим вопросом в настоящее время работает Институт по изучению вопросов образования при Учительском колледже Колумбийского университета.

2. Условия обучения алгебре, включая методы и способы повышения интереса, укрепления понимания принципов и обеспечения овладения техническими приемами, представляют собой широкое поле для психологических экспериментов и выводов. Особенно необходимы наблюдения над тем, что ученики находят трудным и легким при изучении алгебры, на что они тратят время продуктивно и непродуктивно, какую пользу выносят они от специализированных упражнений. Данные, которые мы почерпнули из приложения психологии к изучению состава алгебраических способностей, а также выбора необходимых и устранения излиш-

них умственных связей, подвели нас вплотную к ряду вопросов, касающихся детальных условий наиболее целесообразного преподавания алгебры. Эти вопросы не освещены в настоящей работе и будут служить предметом дальнейшего изучения со стороны автора или других лиц.

3. В главе XI были рассмотрены вопросы расположения учебного материала при преподавании алгебры, т. е. порядок образования алгебраических связей и применение психологии для разрешения некоторых проблем, связанных с этим расположением. При этом многие стороны современной учебной практики остались неосвещенными; надо думать, что психология сможет внести в это дело значительные улучшения. В этом направлении изыскания также будут продолжены, а результаты опубликованы.

Помимо этих трех тем, над которыми работа будет вестись автором или его сотрудниками, существует значительное количество вопросов, которые весьма пригодны для изучения и заслуживают его. Ниже приводится перечень этих вопросов с краткими пояснительными замечаниями.

Точность в математической работе.

Наблюдения над выполнением алгебраической работы взрослыми, владеющими математикой, показывают, что различие в совершаемых ими ошибках не совсем совпадает с различием между незнанием принципов и незнанием счисления или различием между отсутствием общих математических познаний и небрежностью, хотя и сродни им обоим. Это обстоятельство проявляется особенно наглядно, когда действия требуется выполнить над q элементами в определенном порядке r : данное действие опускается, связывается с ненадлежащим элементом или применяется в неправильном порядке, нужный элемент опускается или отбирается не тогда, когда это нужно, и т. д. Пока какая-либо способность не развита, подобного рода ошибки могут свидетельствовать об отсутствии достаточных математических навыков; так, ученик может еще не располагать основными связями такой прочности, чтобы их можно было безошибочно применить к новому комплексу. Но когда данная способность уже развита, то подобного рода ошибки могут скорее свидетельствовать об отсутствии системы, внимания и осмоторительности, свойственных более хорошему клерку, чем способному математику. Точность в работе вычислителя является, конечно, ценной вещью, но не она имеет в виду, когда мы говорим о точности в математической работе. Этот вопрос представляется нам заслуживающим дальнейшего изучения.

Математическое рассуждение и пробы.

Психологи считают, что выбор отдельных цифр частного при подробном делении в арифметике, разложение на множители и упрощение алгебраических выражений, доказательство геометрических теорем и т. д. выполняются способными учениками и должны выполняться всеми учащимися путем проб или создания гипотез, исправляемых и совершенствуемых по ходу дела, пока проба или гипотеза не приводит к желаемому результату. Если же это так, то обучение разложению алгебраических выражений на множители должно быть значительно изменено и стать руководством в надлежащем выборе проб с отказом от претензии на непогрешимость указаний, каковы же должны быть множители. Проглядывая учебники алгебры, невольно приходишь к заключению, что преподаватели математики рассматривают умственный процесс создания удачных гипотез как сомнительный или почти неприличный и во всяком случае неизмеримо

менее ценный, чем доказательство справедливости данной гипотезы. Не следует ли считать правильным обратное положение?

Достоверность и значимость данных, получаемых при измерении алгебраических способностей и достижений.

В последние годы была проделана весьма большая работа по выделению и стандартизации алгебраических тестов. Однако и сами составители этих тестов, вероятно, согласятся с тем, что мы не знаем еще, какова „достоверность“ этих тестов, т. е. размер и характер возможных ошибок в определениях при помощи этих тестов, а также их „значимость“, т. е. соответствие между ними и различными другими критериями алгебраических способностей и достижений. Еще хуже обстоит дело с обыкновенными тестами и теми задачами, которые применяются при обычных испытаниях; надо думать, что преподаватели математики очень желали бы знать, какие именно достижения измеряются их испытаниями.

Соответствующие исследования, хотя и весьма сложные, все же значительно продвинулись вперед, причем главным затруднением оказалось обеспечение группы учащихся, способности которых могут измеряться различными испытаниями и наблюдениями, такой системой сложных и составных оценок, которая давала бы единообразный критерий для характеристики ценности каждого отдельного производимого испытания.

Пусть имеется тест, содержащий элементы E_1, E_2, E_3 и т. д., который дает результаты с коэффициентом корреляции, скажем, 0,60 по сравнению с наиболее совершенным критерием способности, которую он призван измерить или предопределить. Нашей задачей является улучшение его, если это вообще возможно, или установление того факта, что при современном уровне познаний мы неспособны его улучшить. Поэтому мы должны установить отдельные коэффициенты корреляции для E_1, E_2, E_3 и т. д. в отношении основного критерия и попытаться отыскать такие элементы, которые дали бы наилучшие относительные результаты. Если совокупность последних даст общий коэффициент корреляции, превышающий 0,60, то мы сможем улучшить тест, введя эти лучшие элементы взамен применявшихся ранее и опустив вовсе некоторые из последних. При этом наилучшими новыми элементами явятся такие, которые дают наиболее высокий коэффициент корреляции в отношении критерия и наиболее низкие в отношении других элементов; их-то и следует ввести в тест, а затем применить последний в новой форме.

Почти все изменения, вносимые в настоящее время или предлагаемые к внесению в общую систему алгебраических занятий, являются подходящими объектами для исследования. Мы отметим только некоторые из них, которые кажутся нам особенно практичными или особенно важными по существу.

Применение „статистических графических изображений“ или линий, выражающих незаконмерные отношения.

В главе III мы рекомендовали применение небольшого количества (например в объеме, даваемом Нонном) „статистических графических изображений“ в качестве введения к занятиям закономерными или „математическими изображениями“ в целях повышения интереса к последним. При этом мы исходили из определенных данных психологии и педагогики. Однако этот вопрос нуждается в дополнительном освещении. Графические изображения стали широко применяться лишь в последнее время, и психология чтения

и составления их мало еще известна. Необходимы тщательные наблюдения, чтобы выяснить результаты работы учеников над графическими изображениями, применяемыми ныне (например Роггом и Кларком или Скорлингом и Ривом), по сравнению с занятиями их над большим или меньшим количеством статистических графических изображений.

Применение вывода и доказа- тельства формул.

Этот вид упражнений сейчас не в моде при занятиях алгеброй и, пожалуй, в обычной своей форме может свестись для большинства учеников к заучиванию наизусть. Нельзя ли, однако, попытаться использовать хорошие его стороны, избавившись от плохих?

Мы вовсе не намерены добиваться от учеников понимания таких обобщений, которые превышают их способности; с другой стороны, мы совсем не хотим, чтобы алгебра выродилась в ряд приемов счисления и решения отдельных уравнений. Поэтому мы считаем необходимым установить, какие результаты может дать более научный и творческий подход к этому виду упражнений, сопровождаемый отказом от доказательства того, что уже прекрасно известно.

Реальная по- мощь алгебре со стороны геометрии.

Вопросы психологии так называемых „комбинированных“ занятий, служащих в настоящее время предметом широкой дискуссии и экспериментирования, выходят, вообще говоря, за пределы настоящей работы, и автор воздержался здесь от рассмотрения даже тех случаев, когда те или иные сведения из области геометрии могли бы быть с успехом изучены в целях

укрепления самих алгебраических познаний. Таких сведений найдется, вероятно, немного. Сомнительно, например, чтобы многие из учащихся, занимающихся в настоящее время алгеброй, получили при изучении иррациональных чисел столь же большую помощь от знания того, что длина гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника может быть выражена формулой $\sqrt{1+1}$, какую они получают при изучении дробных чисел от сравнения $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, 4 и 5 или цены мяса, за 4 и $4\frac{1}{2}$ кг которого заплачено по 6 руб. Кое-что полезное здесь все же найти возможно. Поэтому было бы целесообразным составить перечень соответствующих геометрических сведений, взвесить их достоинства и недостатки и, произведя соответствующий отбор, предоставить им надлежащее место в курсах алгебры.

Стандартиза- ция материала для задач.

По мнению психологов и математиков, качество алгебраических задач, применяемых в настоящее время, весьма неоднородно. Преподавание алгебры весьма выиграло бы, если бы можно было отобрать 400 — 500 наилучших задач, расположить их надлежащим образом и установить в отношении каждой из них, каким специальным целям она служит и какова степень ее трудности. Этот основной тест можно было бы пополнять задачами, имеющими более узкое или временное значение. Составители учебников и преподаватели алгебры должны были бы в основном руководствоваться этим перечнем, добавляя только такие задачи, которые могут серьезно претендовать на лучшее качество по сравнению со включенными в список. Фантастические, непонятные и вводящие в заблуждение задачи следовало бы изъять из практики совершенно так же, как это было сделано со

всякого рода индивидуальными извращениями в прописях и руководствах правописания.

Стандартизация материала для упражнений.

Естественным практическим следствием изучения психологии алгебраических занятий должна явиться разработка системы упражнений, призванных создавать желательные умственные связи максимально легко и интересно. Так, мы обнаружили, например, что учащиеся нуждаются в большем числе упражнений над дробями вида $\frac{a}{ax}$, $\frac{x}{ax}$, $\frac{ax}{bx}$, чем это наблюдается в нас-

тоящее время, и что упражнения над выражениями вида $\frac{ax \pm x}{x}$, $\frac{x}{ax \pm x}$, $\frac{ax \pm ay}{ax}$, $\frac{ax}{ax \pm ay}$ и т. д. надо давать учащимся вскоре же после изу-

чения деления одночленов, чтобы оградить их от стремления сокращать члены вместо множителей. Системы упражнений, которые учтут подобного рода сокращения и включают примеры, служащие для развития определенных навыков взамен модных в настоящее время „импрессионистских“ и мало продуманных примеров, безусловно будут скоро оценены и получат широкое применение.

Значение объяснений.

Существует много способов объяснения алгебраических принципов и технических приемов. Так, в случае отрицательных чисел мы встречаемся с применением температуры выше и ниже нуля, суммы денег, взятой в долг и отданной взаймы, силы тяготения и подъема воздушного шара, расстояние к северу и югу или востоку и западу, расположение выше и ниже уровня моря, движение подъемника вверх и вниз. Хорошим применением, используемым, вероятно, многими учителями, являются также отклонения отдельных учеников от средних величин для их групп или установленных стандартов при выполнении различных тестов, относительная высота отметок при различных испытаниях и т. д.

Надо полагать, что в результате наблюдения и испытания наилучшие способы объяснения переживут со временем менее совершенные. Однако мы считаем необходимым выполнить систематическое сравнение этих способов в целях ускорения их отбора и усиления нашего знания общих принципов продуктивного объяснения и иллюстрирования; здесь перед исследователями психологии алгебраических занятий могут быть поставлены две темы, особенно нуждающиеся в освещении: применение объяснений, имеющих целью обеспечить полное овладение данным фактом, и применение объяснений, базирующихся на аналогии с пространственными соотношениями. Первая тема нуждается в изучении потому, что мы, вероятно, недооцениваем зависимости мышления и рассуждения от содержания того вопроса, над которым мы думаем и по поводу которого рассуждаем, и вторая потому, что пространственные отношения кажутся, повидимому, значительно более интересными и плодотворными математикам, чем всем другим лицам равного с ним развития; поэтому возможно, что мы несколько злоупотребляем ими при объяснении алгебраических принципов и приемов; в частности, было бы чрезвычайно желательно изучить рекомендуемое Нонном применение пространственных аналогий

к объяснению правила знаков и обращения с особыми произведениями и множителями.

Значение различных способов повышения интереса.

Главной опорой алгебры является и, вероятно, всегда будет являться любовь к мышлению ради укрепления мышления со стороны тех, кто может хорошо мыслить. Если мы организуем обучение таким образом, чтобы ученики стали охотно заниматься алгеброй, то они полюбят ее в достаточной степени. При преподавании алгебры многие учителя пытаются, как известно, использовать те или иные общечеловеческие интересы к активности, соревнованию, поощрению, приобретению мастерства и т. д. Все эти способы использования различных интересов должны быть изучены с точки зрения вызываемого ими психологического эффекта, а действительные результаты применения их в школе оценены путем соответствующих испытаний.

Применяются и другие способы повышения интереса учащихся к занятиям алгеброй. Наиболее видное место среди них заняли в последнее время, пожалуй, следующие два: ознакомление с портретами и биографиями великих математиков и превращение алгебраических навыков в орудие для построения учащимися собственных планов и предположений, не связанных с алгеброй. Ни тот, ни другой способ не может быть принят на веру.

В отношении первого из них каждый психолог решительно заявит, что портреты странно выглядящих почтенных седовласых старцев и большая часть того, что написано о них, действуют на интерес отрицательно, согласится с Миллером (G. A. Miller, 1915), что подобного рода портреты и биографии создают представления об алгебре, как мертвой, антикварной, отсталой науке и поддержит его предложение о замене или по меньшей мере пополнении этого материала портретами математиков XX столетия и изложением того, что наблюдается в области математики в настоящее время. Поскольку по этому вопросу существует различие во взглядах, необходимы все же соответствующие исследования.

Что касается второго способа, то все мы, конечно, поддерживаем применение индивидуальных планов и предположений учащегося наряду с теми, которые составляют для него другие, и признаем теоретическую важность личных планов учащегося, а не только плана, согласно которому изучать алгебру нужно, так как сведущие люди находят это для него необходимым. Однако каковы на самом деле те планы и предположения, для которых алгебра может служить орудием? В какой мере и в каком направлении будут они способствовать приобретению алгебраических способностей? Ответить на эти вопросы могут только специальные исследования.

То же относится к математическим состязаниям, математическим развлечениям, математическим кружкам, приложениям к технологии и социологии и многим другим средствам, рекомендуемым для повышения интереса к алгебраическим занятиям.

Изложенные предложения, касающиеся дальнейших желательных изысканий в области психологии и преподавания алгебры, являются лишь примерами; они могут быть значительно пополнены, расширены и детализированы.