

К. П. АРЖЕНИКОВ

МЕТОДИКА НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Утверждено Наркомпросом РСФСР

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА — 1936

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Методика К. П. Арженикова была одним из самых популярных методических пособий по математике среди учителей дореволюционной начальной школы. Эту популярность ей создавали:

1) простота и ясность изложения: книга написана простым, ясным и точным языком, вполне доступным для массового учителя;

2) конкретность методических указаний, доведенная до высокого предела,—методика содержала в себе не только принципиальные установки, но она указывала способы и приемы проработки каждого более или менее значительного вопроса. Аржеников довел методику проработки основных вопросов до урока, что является крупнейшим достоинством всякой методики и в особенности методики арифметики;

3) практичность и жизненность приемов обучения, рекомендуемых автором.

Наряду с вопросами чисто методического характера методика содержит в себе значительный по объему общий раздел, в котором дается большой материал по истории развития методики математики, а также сведения из теории арифметики в том разрезе, в каком эти сведения нужны для повышения квалификации учителя.

Все эти достоинства данной методики не утратили своего значения и в настоящее время. Советская методика за последние годы имеет большие достижения: она активизировала учащихся в процессе обучения, она глубже и тоньше подошла к вопросу о развитии математического мышления учащихся, весь процесс обучения арифметике она сделала более многогранным, содержательным, осмысленным. Но в то же время перед советской методикой математики со всей остротой стоят вопросы конкретности изложения методического материала, простоты и практичности приемов обучения, т. е. как раз те вопросы, которые наиболее удачно разрешаются в методике Арженикова. Вот почему Наркомпрос и Учпедгиз решили переиздать данную методику с тем, чтобы довести ее до учителей, методистов и преподавателей методики.

Для переиздания потребовалось внесение в текст методики некоторых изменений редакционного характера, которые не меняют сущности методических высказываний автора и в то же время облегчают использование ее в современной школе.

Эти изменения выразились в следующем:

- 1) старые русские меры везде заменены метрическими,
- 2) опущены многочисленные ссылки автора на свои задачки,
- 3) программы министерских и церковно-приходских школ даны в качестве приложения,
- 4) изменена редакция некоторых задач, чуждых нашей современности,
- 5) опущены некоторые главы, утратившие свой интерес и значение (например, разбор и критика дореволюционных задачников и др.),

6) опущен текст последней части методики под заглавием „Четвертый год“ как слабо разработанный и мало дающий конкретных методических указаний.

Во всех тех случаях, когда система расположения материала, принятая в методике Арженикова, более или менее резко расходится с порядком, установленным советской методикой, даны подстрочные примечания.

Все эти изменения, ни в какой мере не меняя сущности методических высказываний автора, облегчают использование методики советскими педагогами.

Само собой разумеется, что учитель не может ограничиться только одной этой методикой, так как в ней некоторые весьма существенные вопросы остались не затронутыми и не разработанными; так, например, в ней не разработаны по вполне понятной причине способы и приемы ознакомления учащихся с метрической системой мер и с действиями над именованными числами с метрическими мерами; нет методических указаний по вопросу об изучении геометрического материала, об изучении процентов; не затронут вопрос о построении урока, о планировании и учете работы. Развернутые указания по всем этим вопросам учитель найдет в методиках, изданных в 1934/35 учебном году.

Но, не претендуя на значение основного пособия, данная методика при умелом пользовании ею явится для учителя хорошим дополнительным методическим руководством.

Подготовка методики для переиздания выполнена научным сотрудником Наркомпроса А. С. Пчелко.

ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МЕТОДИКИ НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ.

§ 1. Механическое письменное вычисление.

Появившиеся впервые учебники по арифметике — у нас первым напечатанным учебником арифметики была арифметика Магницкого, изданная в Москве в 1703 г., — носили характер систематических курсов: имея своей целью изложение учений арифметики, они оставляли в стороне вопросы педагогики, дидактики и методики.

К таким учебникам, пригодным отчасти для средней школы, приспособлялось за отсутствием иных руководств и начальное обучение арифметике, ограничиваясь, в большинстве случаев, областью целых чисел: с детьми, начинающими учиться, полностью проходили сначала нумерацию, а потом одно за другим четыре действия. Обучение носило догматический характер: в готовом виде давались определения и правила, которые дети заучивали наизусть и потом механически прилагали к вычислениям. Задачи, требующие сообразительности, отодвигались на второй план, уступая первое место таким упражнениям, которые развивали лишь навык в механическом вычислении.

Вот какую картину обучения арифметике в сельской школе находим мы в воспоминаниях одного из педагогов середины прошлого столетия (Е. Стрельцов. „Из 25-летней практики сельского учителя“. Воспоминания, очерки и заметки. Часть I. Сельская школа 1849—1864 гг.):

„Сначала я учу считать до ста и более, — говорит выводимый автором воспоминаний учитель в беседе с лицом, обозревающим школу, — посажу всех учеников и сам громко считаю: раз, два, три, четыре и т. д., а дети повторяют хором. Так они научатся считать до ста; а там уж — то же самое пойдет далее: сто один, сто два“. — „И дети все научатся таким образом считать?“ — „Ну, есть всякие: иному ни за что не научиться считать дальше десяти: как дошел до одиннадцати, так и стой, собьется. Потом пишут до ста: я прописываю на доске; а когда научатся писать вразбивку до ста, то начинаю учить нумерацию. Поставлю учеников в кружок к доске, напишу им число с миллионом и, показывая на первую цифру, говорю: единицы, десятки (на них и показываю), сотни, тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч, миллионы. Так показываю и твержу, а дети повторяют за мною хором до тех пор, пока будут знать и подряд и вразбивку. Потом составляю их выговаривать числа с миллионами (больше миллионов редко употребляю), а потом учу писать такие же числа под диктовку“. — „И понимают?“ — „Сначала, конечно, трудно; особенно

нулей ставить долго не научаются; но после поймут хорошо. Потом сложение. Сперва расскажу, как подписывают числа: единицы под единицы, десятки под десятки и т. д. Потом покажу, с чего начинают сложение, что писать, что в уме — и все тут. Конечно, есть другие, что или сложить не умеют, сколько сюда девять, восемь да шесть и пр., или в уме оставляют, но таких немного, потому что я даю учить наизусть таблицу сложения небольших чисел. Потом вычитание — то же самое, только тут занимать учу, когда нельзя вычесть. Вычитание понимают скоро. Умножение труднее: тут таблицы иному и в зиму не выучить. А кто выучит таблицу, тот скоро начнет делать; да и просто: умножай по таблице, а подписывай, как в сложении. Только тут многие все сбиваются: помножит на вторую цифру, а пишет под первой; помножает на третью, а писать и не знает куда; но и то скоро привыкает писать лесенкой. А там — деление. Деление сперва на одну цифру, потом на две. Деление — всего труднее; задаваться редко кто может сразу верно".

Видя, как в школе этого учителя дети решают задачи, можно было убедиться, что *„ученики буквально делают задачи, не понимая того, что они делают, как и для чего все это делается. Задачи их состояли из чисто отвлеченных чисел, обрабатываемых по заранее определенному плану: 33 125 разделить на 7, — командует старший ученик, и отделение его дружно скрипит грифельными... Пробовали дать им несколько изустных задач из крестьянского быта, и некоторые ребята считали верно, но по-своему. Продал мужик воз сена — 25 пуд. по 27 коп. за пуд; сколько ему придется получить денег? — По гривеннику — два с половиной; по другому — опять два с половиной, да по пятаку — 1 р. 25 к. — всего будет 6 р. 25 к.; да по копейке — 25 коп.; по другой — еще 25 коп... Позабыл сосчитанное и запутался. — „Почему — по гривеннику, так будет два с половиной?“ — „Так уж приходится.“ — „Да почему приходится? Может, и не так?“ — „Нет, уж так; по гривеннику — всегда так.“ — „Кто ж тебе это сказал?“ — „Отец всегда так на счетах считает“.*

„Но скажите, — спрашивают учителя, — какая польза детям от того, что они привыкают делать все эти задачи (т. е. задачи с отвлеченными числами на определенные, назначенные действия)?“ — „Будут знать, как делается. Конечно, у них дома все на счетах или на память считают, — это скорее; но так гораздо вернее“. — „Как же вернее, когда вы говорите, что часто ошибаются в нулях или подписывают десятки под единицы? И где же крестьянину придется считать большие числа с миллионами? Да, наконец, ваши задачи нельзя делать без бумаги и карандаша; неужели же крестьянину всегда носить их с собой? А главное вот что: если вашему ученику придется сосчитать, сколько, например, в тысяче сороков, то кто же ему скажет: помножить надо или разделить?“ — „Конечно, тут нужен свой ум, и я тоже заставляю делать задачи на память; но ведь вы знаете, крестьянские дети — они понимают плохо, а если показано правило, как написать и делать, то гораздо легче поймут“. — „Но ведь правило они могут позабыть, и тогда что же?“ — „Правила я диктую и заставляю учить

наизусть; конечно, и тут забывают другие". — „Но пользоваться правилом, приложить его к делу может только тот, у кого, как вы сказали, есть *свой ум*. Откуда же после возьмется у ребенка свой ум, если в школе не позаботятся развить его?" — „Вырастут — станут умнее. Жизнь сама учит человека“.

В таком состоянии — механического вычисления по готовым правилам — находилось начальное обучение арифметике в Западной Европе до второй четверти XVIII в., а в России до второй половины XIX в.

Тот же догматический и чисто словесный метод применялся и к преподаванию других предметов: обучение, опираясь почти исключительно на память, состояло в сообщении готовых понятий, и детский ум должен был работать над выражающими эти понятия *словами*, которые не имели внутреннего содержания, не носили в себе следов тех ощущений и представлений, которые должны предшествовать образованию понятия.

§ 2. Первые шаги в методике начальной арифметики.

С эпохи Возрождения начинается новое направление в науке, называемое *реалистическим*, представителем которого был английский ученый Бэкон Веруламский (1561—1626 гг.). Бэкон считается основателем *индуктивного метода*, ведущего от *опыта* к точному знанию, от наблюдения *частных* фактов к *общему* выводу. Название предмета нужно строго отличать от самого предмета, ибо *слово* не есть *сущность* вещи, природу которой должны мы изучить. Только *опыт* ведет к верному познанию *причин*, а в этом последнем заключается все истинное знание.

Идеи Бэкона, который, заметим, сам не был педагогом, оказали впоследствии весьма большое влияние на педагогику и методику обучения различным предметам.

Первый протест против схоластического, словесного обучения высказал в начале XVII в. знаменитый славянский педагог Ян Амос Коменский (1592—1671 гг.). В своем сочинении „Великая дидактика“ (1628 г.) Коменский выставил требования, которым должно удовлетворять обучение. Надо не только учить, но, уча, и воспитывать. Воспитывающее обучение должно стремиться к достижению двух целей: 1) *практической* — сообщить полезные в жизни знания, умения и навыки, 2) *общеобразовательной* — содействовать всестороннему развитию учащихся, выработать в них устойчивое мировоззрение.

Фундаментом правильно поставленного обучения должны служить *наглядность, самостоятельность и интерес*.

Огромное значение придает Коменский наглядности обучения арифметике, при которой используются все внешние органы чувств. „Предоставляй все внешним чувствам: видимое — зрению, слышимое — слуху, обоняемое — обонянию, вкушаемое — вкусу, осязаемое — осязанию. Причина этого троякая: во-первых, начало познания лежит во внешних чувствах, и начало обучения должно исходить от действительного созерцания, а не от объяснения

слов, — последнее лишь дополнение; во-вторых, истина и достоверность познания зависят от свидетельства внешних чувств: прежде чувственное впечатление, а потом возможно и понимание; в-третьих, внешние чувства — вернейшие помощники памяти: кто однажды видел верблюда, тот всегда его узнает".

„Учение, — говорит Коменский, — должно начинать реальным, наглядным рассматриванием вещей, а не словесным их описанием. Вещь — это сущность, а слово — только знак; вещь — это тело, а слово — одежда. Надо учить почерпать мудрость не из книг, а из неба и земли, из дубов и буков. Зачем вместо мертвых книг не откроем мы книги живой природы? В ней заключается гораздо более, чем мог бы нам рассказать кто-нибудь другой; живое созерцание природы принесло бы нам несравненно более радости и более результатов".

В процессе обучения Коменский советует от легкого переходить к трудному, от конкретного к отвлеченному, без торопливости и скачков; обучение должно двигаться вперед не насильем, а внутренним интересом и самостоятельным трудом учащихся, соединенным с удовольствием и охотой.

Основное положение Бэкона — „все через опыт, ничего помимо него" — и педагогические воззрения Коменского были потом повторены и развиты английским мыслителем и педагогом Джоном Локком (1632—1704 гг.) в его сочинениях „Опыт о человеческом познании" и „Мысли о воспитании".

Сторонником наглядного обучения был французский писатель Жан-Жак Руссо (1712—1778 гг.). В вышедшем в 1762 г. педагогическом романе „Эмиль", или „О воспитании", Руссо высказывает такие мысли о наглядности обучения: „Я бы хотел, — говорит он, — чтобы слова относились только к видимым предметам, какие перед этим можно показать ребенку. Несчастливая привычка легко удовлетворяться словами, которых мы не понимаем, начинается гораздо раньше, нежели думают... Какая нелепая задача учить детей, чтобы они говорили, не имея в виду ничего сказать. Не давайте ребенку словесных уроков, он должен получить их из опыта. К чему запечатлевать в памяти детей целый каталог названий, которые ничего для них не выражают? Разве, изучая самые вещи, мы не изучаем вместе с тем и их названия?.. При каком бы то ни было изучении одни названия без идей о выражаемых ими вещах ровно ничего не значат. А между тем ребенка только и учат этим наименованиям, не будучи никогда в состоянии довести его до понимания вещей. Думают научить его землеописанию, а учат только читать карты. Обучают именам городов, стран, рек, а он не может постичь существования их в другом месте, а не на бумаге, где ему их указывают". Так же, как и Коменский, Руссо предлагает восходить от наглядного восприятия к понятию, от ближайшего к отдаленному; например географию надо начинать учить не с карты или глобуса, а с изучения местности, план которой должен начертить сам ученик. „Вещей, вещей! — восклицает Руссо. — Мы даем слишком много власти словам".

Первые попытки реформ в постановке обучения начальной арифметике относятся к XVIII в., начиная со второй его четверти; появились они в немецкой литературе.

Прежде всего выдвинуто было требование, чтобы обучением достигалась образовательная цель, а не одно механическое вычисление по правилам. Правила действий не следует сообщать догматически, в готовом виде: дети должны уразуметь и усвоить их вполне сознательно.

Затем ставится требование наглядности: первоначальное обучение счету и действиям над числами надо вести на наглядных пособиях, например на пальцах или каких-либо удобных для этого предметах, как-то: палочках, пуговицах, орехах и т. д. Для той же цели вводятся и письменные значки: черточки, точки, кружки, которые располагаются или в ряд или в виде числовых фигур.

Но эти отдельные попытки, не сопровождавшиеся достаточными практическими указаниями и подробной разработкой приемов преподавания, не имели продолжительного успеха и не оказали заметного влияния на преподавание арифметики в начальных школах.

Первый крупный успех в этом деле выпал на долю швейцарского педагога Гейнриха Песталоцци (1746—1828 гг.). В своих сочинениях „Лингард и Гертруда“, „Как Гертруда учит своих детей“ и „Книга для матерей“ Песталоцци высказывает взгляды на обучение и воспитание, близкие к взглядам Коменского, а в отношении наглядности он сходится с Руссо. „Словесному учению, — говорит он, — должны предшествовать реальные знания; затверживая определение, ученик приучается только к пустословию, обманывает сам себя, принимая звуки за понятия; отсюда все наши бедствия... Начало всякого учения есть наглядное созерцание, цель — ясное понятие. Что такое наглядное восприятие? — Не что иное, как присутствие внешних предметов перед нашими органами чувств и произведение ими соответствующего впечатления в сознании человека... Круг знаний начинается с окружающего и ближайшего к человеку и расширяется постепенно concentрично“.

Песталоцци оказал весьма большое влияние на всю постановку начального обучения. Педагогические взгляды Песталоцци не отличаются особой новизной и оригинальностью: то, что говорил Песталоцци, высказывалось и раньше его. Но дело в том, что раньше это только говорилось, было теорией, а Песталоцци проводил свои взгляды в школьную жизнь, осуществляя теорию на практике.

Песталоцци ярче и сильнее, чем кто-либо из его предшественников, выдвинул образовательную цель обучения арифметике, настаивая наряду с наглядностью на устных вычислениях взамен письменных, механических.

Наглядными пособиями при устных вычислениях в пределах сотни служили три таблицы: одна для целых чисел и две для дробей. Каждая таблица представляла собой сотню квадратных клеток, расположенных в десять рядов по десяти клеток в каждом ряду. В таблице, назначенной для целых чисел, единицы изо-

бражены вертикальными черточками: во всех квадратах первого (верхнего) ряда помещалось по одной черточке, в клетках второго ряда — по две черточки и т. д., в клетках последнего (нижнего) ряда — по десяти черточек. В первой из таблиц, назначенных для изучения дробей, клетки первого ряда оставлены целыми, клетки второго ряда разделены пополам (вертикальными черточками), клетки третьего ряда — на три равных части и т. д., каждая клетка последнего ряда разделена на десять равных частей. По этой таблице производились вычисления с дробями, знаменатели которых заключены в пределах первого десятка. Во второй таблице одна клетка целая, а прочие клетки вертикальными и горизонтальными черточками разделены были на равные части: на две, три и т. д., последняя клетка — на сто равных частей. Эта таблица служила для вычислений с дробями, знаменатели которых заключены в пределах сотни.

По этим таблицам ученики производили в уме все вычисления в пределах сотни как с целыми числами, так и с дробями. Лица, посещавшие школу Песталоцци и присутствовавшие на уроках арифметики, изумлялись той быстроте и правильности, с какой дети выполняли в уме довольно сложные расчеты.

Метод Песталоцци, применявшийся им на практике и изложенный в сочинении „Наглядное изучение числовых отношений“, сам по себе не может быть признан удовлетворительным. В своей борьбе за развивающее обучение против узко практического, за устное вычисление против письменного механизма Песталоцци впал в крайность, отбросив вычисление при помощи цифр и прикладные задачи. Увлечшись устными вычислениями с отвлеченными числами, он только отчасти достигал поставленной им цели — обучением арифметике содействовать общему развитию учащихся: он развивал только внимание и память. Требование наглядности было больше в теории: на практике Песталоцци оставил его без должного применения. Советуя в своей „Книге для матерей“ давать детям для счета горошины, камешки, палочки, сам Песталоцци в качестве единственного наглядного пособия пользовался лишь упомянутыми выше таблицами.

Те успехи, каких достигал Песталоцци, объясняются не столько его методом, сколько индивидуальностью обучения, теми взаимными отношениями, которые установились между учениками и их учителем, беззаветно преданным своему делу и безгранично любившим своих учеников.

Несмотря на недостатки, метод Песталоцци имеет большое значение в развитии методики начальной арифметики: это был так или иначе осуществленный на практике протест против господствовавшего до тех пор бессознательного механизма письменных вычислений, к которому после Песталоцци начальное обучение арифметике более уже не возвращалось.

Песталоцци, столь много сделавший для воплощения идеи воспитывающего обучения, имел немало последователей своих взглядов на обучение арифметике: его метод, появившийся в начале XIX в., держался в школах довольно продолжительное время.

Одни крайности вызывают другие, и спустя четверть столетия, когда недостатки метода Песталоцци в руках его последователей стали обнаруживаться все больше и больше, делаются попытки направить обучение арифметике к достижению главным образом практических целей, отводя должное место сознательному усвоению приемов вычисления.

Дальнейшее развитие методики арифметики состоит в применении этих двух крайностей. Устанавливаются взгляды на элементарный курс этого предмета, которые легли в основу последующих руководств по методике начальной арифметики. Обучение должно одновременно преследовать обе цели: практическую и общеобразовательную. В основу обучения должна быть положена наглядность. Устные вычисления имеют место наряду с письменными. Упражнения над отвлеченными числами чередуются с прикладными задачами. Обращено должное внимание на десятичный состав чисел; нераздельная у Песталоцци область первой сотни разделяется на отделы: от 1 до 10, от 1 до 20, от 1 до 100.

Наиболее видным представителем этого примирительного направления, оказавшим большое влияние на практику обучения арифметике, а вместе с тем и начальной геометрии, был немецкий педагог Адольф Дистервег, написавший „Методическое руководство к обучению счету“ (1829 г.) и в соответствии с ним задачник для учеников.

Курс начальной арифметики Дистервег располагает такими отделами: 1) счет и одно за другим четыре действия над числами от 1 до 10; 2) изучение арифметики в том же порядке над числами от 10 до 20; 3) нумерация и четыре действия над числами от 20 до 100; 4) нумерация и действия над числами любой величины; 5) именованные числа; 6) дроби.

Во второй четверти XIX в. появляются у нас первые сочинения по методике арифметики, составленные под влиянием того направления, которое приняла в то время методика арифметики в немецкой учебной литературе. Это были — „Руководство к преподаванию арифметики“ Ф. И. Буссе, изданное в 1831 г., сочинения П. С. Гурьева: „Арифметические листки“ (1832 г.) и „Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям“ (1839—1842 гг.). Но появление этих руководств не отразилось заметным образом на постановке начального обучения арифметике. Руководство Буссе было пригодно более для средней школы. Книжки Гурьева излагали основы элементарного курса арифметики, которые впоследствии были более подробно развиты автором в его „Практической арифметике“, вышедшей первым изданием в 1857 г., а третьим и последним в 1880 г. Сочинения Гурьева не получили широкого распространения.

§ 3. Метод изучения чисел.

Весьма крупным явлением в истории развития методики арифметики был метод немецкого педагога Грубе, известный под именем *метода изучения чисел*. Сочинение Грубе „Руковод-

ство к счислению в элементарной школе, основанное на эвристическом методе", вышло первым изданием в 1842 г.

Главные положения Грубе следующие: *„Преподавание арифметики не должно переходить от действия к действию: оно должно идти — в пределах сотни — от числа к числу. Все четыре действия должны вытекать сами собою из отчетливого наблюдения каждого отдельного числа“.*

Отчетливое наблюдение или изучение отдельных чисел состоит в том, что каждое число сравнивается с каждым из предыдущих и измеряется им при помощи разностного и кратного отношения. Приведем для примера изучение числа *шесть*.

Ученики раскладывают палочки по одной, пока составит^{ся} шесть. После этого учитель дает такие вопросы: „Из скольких палочек составилось наше число? Сосчитайте. Отсчитывайте по одной палочке. Сколько раз нужно взять по одной палочке, чтобы получить шесть? Во сколько раз шесть больше одного? Какую часть шести составляет одна палочка? Сколько раз одна палочка заключается в шести? и т. п.“ После таких упражнений составляется табличка:

1) Сравнение с единицей.

$$\begin{array}{r} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \\ 1 \times 6 = 6 \\ 6 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \\ 6 : 1 = 6 \end{array}$$

Потом идет сравнение шести с двумя. Ученики раскладывают палочки парно, пока составит^{ся} шесть. Вопросы: „Сколько двоек в шести? Сколько раз нужно взять по две палочки, чтобы получить шесть? Сколько раз можно отнять по два от шести? Значит, сколько раз два содержится в шести? и т. п.“ Составляется табличка:

2) Сравнение с двумя единицами.

$$\begin{array}{r} 2 + 2 + 2 = 6 \\ 2 \times 3 = 6 \\ 6 - 2 - 2 - 2 = 0 \\ 6 : 2 = 3 \end{array}$$

Подобным же образом шесть сравнивается с тремя, четырьмя и пятью. Составляются таблички:

3) Сравнение с тремя. 4) Сравнение с четырьмя. 5) Сравнение с пятью.

$$\begin{array}{r} 3 + 3 = 6 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 6 - 3 - 3 = 0 \\ 6 : 3 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 + 2 = 6 \\ 4 \times 1 + 2 = 6 \\ 6 - 4 = 2 \\ 6 : 4 = 1 \text{ (2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 + 1 = 6 \\ 5 \times 1 + 1 = 6 \\ 6 - 5 = 1 \\ 6 : 5 = 1 \text{ (1)} \end{array}$$

Все эти результаты путем упражнений дети должны усвоить настолько прочно, чтобы могли живо представлять себе состав изученного числа из всех меньших его чисел. При этом условии дети, конечно, будут в состоянии выполнять в пределах изученных чисел вычисления, требующие применения всех арифметических действий: производить действия дети не будут, потому что не знают приемов их, но будут правильно называть результаты действий, усвоенные ими изучением чисел.

Например, после изучения числа шесть ученики могут сказать, сколько получится, если к четырем прибавить два, от шести отнять пять, два повторить три раза, шесть разделить на двойки, разделить на три равных части и т. п.

Так изучается по Грубе каждое число первой сотни. Таким образом, в пределах сотни на первом плане стоит не отдельное действие, а отдельное число, и учебный материал в этом пределе располагается не по действиям, а по отдельным числам.

Метод Грубе стал распространяться и применяться в немецких школах спустя десять лет после своего появления, когда руководство Грубе вышло в свет вторым изданием.

Метод изучения чисел проник в Россию в эпоху шестидесятых годов. В 1859—1866 гг. появляется сочинение И. Паульсона „Арифметика по способу Грубе“, сначала печатавшееся в одном из педагогических журналов, а потом вышедшее отдельной книгой, которая разошлась в 12 изданиях. В 1873 г. появился точный перевод руководства Грубе, сделанный Э вальдом. Кроме этого перевода и вышедшей раньше него „Арифметики“ Паульсона, в семидесятых годах у нас издано было немало руководств к начальному обучению арифметике, которые представляли собой более или менее видоизмененный метод Грубе.

Наибольшим успехом пользовался у нас метод Грубе в той переработке его, которая сделана В. А. Евтушевским в руководстве „Методика арифметики“, вышедшем первым изданием в 1872 г. Руководство Евтушевского и приспособленные к нему задачки того же автора имели очень широкое распространение и оказали весьма значительное влияние на постановку преподавания арифметики в нашей школе. Вследствие этого считаем нужным остановиться несколько подробнее на методе изучения чисел в том виде, в каком он предложен был Евтушевским.

Приводим пример изучения чисел по Евтушевскому.

ЧЕТЫРЕ. (Упражнения на кубиках.)

1) Образование числа.

На верхней планке доски учитель ставит три кубика вместе.



Сколько здесь кубиков? (Потом приставляет четвертый кубик.) А теперь сколько?



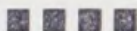
Как же составляются четыре кубика из трех и одного?

Нужно к трем кубикам прибавить, приставить один кубик.

2) Разложение на слагаемые.

Как можно составить четыре кубика? или как четыре кубика можно разложить?

Четыре кубика можно разложить на два и на два.



Четыре кубика можно составить из одного, одного, одного, еще одного или взять четыре раза по одному кубику.



Четыре кубика можно разложить на три и один.



Можно составить из одного, одного и двух.



Можно ли еще как-нибудь иначе разложить четыре кубика? Ученики убеждаются, что никакого другого, отличного от этих, разложения быть не может. Если ученики станут еще разлагать четыре кубика таким образом: один, два и один, или два, один и один, или один и три, то учителю легко им показать, что эти разложения составляют повторение уже имеющихся разложений, только в другом порядке.

Всякий раз по указании нового приема разложения, предложенного учениками, учитель на одной из планок доски выставляет кубики в том виде, как они изображены здесь. Таким образом, в нашем случае на верхней планке будут стоять четыре кубика вместе, на второй — два и два, на третьей — четыре кубика раздельно на некотором расстоянии один от другого, на четвертой — три и один и на пятой — один, один и два.

3) Разложение в порядке.

Может случиться, что дети сразу укажут разложение числа на слагаемые в каком-либо порядке. Для установления порядка в разложении предлагаются классу такие вопросы:

— Вот вы составили четыре кубика из двоек, из отдельных кубиков и из троек; в каком порядке лучше поставить наши кубики на доске? С чего начать разложение четырех кубиков?

— С разложения на отдельные кубики.

— Как составить четыре кубика из отдельных кубиков?

— Надо взять четыре раза по одному.

— Как составить четыре кубика из двоек, из пар?

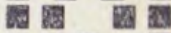
— Нужно взять две двойки; два раза по два кубика; две пары кубиков.

— Как потом составить четыре кубика?

— Можно составить из троек; для этого взять три и один или один и три.

Выясняется, что последнее разложение, т. е. $1 + 1 + 2$, не подходит под принятый порядок и есть видоизменение одного из первых трех.

Таким образом, путем самого разложения числа на слагаемые ученики сравнивают его с 1, с 2 и с 3. Учитель во время разговора с учениками располагает постепенно на классной доске эти разложения уже в порядке, т. е.:

на первой	планке	
" второй	"	
" третьей	"	
" четвертой	"	

Так как это упражнение есть основное и самое важное при изучении числа, то для закрепления в памяти учеников сделанных разложений им предлагаются упражнения письменные на досках или в тетрадях.

Письменная работа учеников состоит в разложении того же числа посредством черточек, крестиков, кружков и пр. Кубики снимаются с классной доски и по требованию учителя: „Возьмите ваши доски и разложите четыре посредством крестиков так, как мы разложили на классной доске четыре кубика“, дети на память разлагают четыре указанным способом. В случае ошибки или беспорядка в разложении или, наконец, упущения одного из разложений учитель поправляет учеников, проверяя их работу.

Затем один ученик по требованию учителя читает все разложения примерно так: четыре состоит из одного, еще одного, еще одного и еще одного; четыре состоит из двух и двух; четыре состоит из трех и одного.

4) Выводы из предыдущего упражнения.

На сложение и вычитание. Сколько надо прибавить к одному, чтобы получить четыре? сколько к двум, к трем? Сколько будет два да два? один да три? три да один?

Сколько раз от четырех можно отнять по одному? сколько раз по два, по три?

Сколько останется, если от четырех отнять один, два, три?

Сколько единиц недостает одному, двум, трем до четырех?

Чем четыре больше одного, двух, трех?

Сколько останется, если от четырех отнять четыре раза по одному? два раза по два?

На умножение и деление. Сколько раз нужно взять по одному, по два, чтобы получить четыре? Сколько раз нужно повторить два, чтобы составить четыре? Сколько будет дважды два? четырежды один?

Сколько раз один, два, четыре содержатся в четырех?

Во сколько раз четыре больше одного, двух?

Как велика четвертая часть четырех, половина четырех?

Во сколько раз четыре больше одного, двух?

Как велика четвертая часть четырех, половина четырех?

Сколько получится, если взять в два раза, в четыре раза меньше четырех?

Таким образом, все отношения числа четыре к предшествовавшим числам вытекают сами собой из разложения числа на слагаемые и, следовательно, из знакомства через то учеников с составом числа. В случае затруднения ученика в ответе на предложенный вопрос учитель пользуется кубиками для наглядного представления ученику того, что его затруднило.

5) Задачи.

Задачи при изучении чисел служат для приложения узнанного учениками из предыдущих упражнений к решению чисто практических вопросов. Кроме того решением задач имеются в виду развитие у учащихся соображения и выработка языка.

6) Беглое вычисление и вопросы, относящиеся к числу отвлеченному.

а) *Вычисление в форме задач.* Имея четыре яблока, я дал двум мальчикам по одному яблоку, потом купил еще одно яблоко и съел сам два. Сколько яблок у меня осталось?

Ученики вычисляют по мере того, как учитель медленно читает задачу, и по окончании вопроса задачи тотчас дают ответ.

б) *Вычисление в отвлеченном виде.* От четырех отнимаю три, потом прибавляю к остатку два, от полученного числа отнимаю один, к полученному числу прибавляю еще два и все полученное делю пополам. Сколько получилось у меня в каждой половине?

Опять-таки ответ учеников должен явиться тотчас по предложении вопроса учителем. Верность и быстрота ответа учеников покажут в этом случае учителю, насколько они овладели числом.

в) *Вопросы для повторения.* Сколько будет четыре раза один? Единицы четыре? два раза два? Если взять трижды один, то чего недостает до четырех? Два сколько раз содержится в четырех? Половина четырех чем меньше трех? Сколько будет четыре без трех, без двух? Если от четырех отнять два, то полученное число во сколько раз больше единицы? и т. п.

Подобным образом ведется у Евтушевского изучение и других чисел. Наглядными пособиями, кроме кубиков, служат классные счеты, пуговики, жетоны, спички, камешки, а также письменные значки: крестики, кружки. Разложение иногда делается и без наглядных пособий, на основании знания разложений предшествующих: зная, например, что восемь состоит из двух троек и двойки и что девять получается из восьми прибавлением единицы, можно вывести, что девять состоит из трех троек.

Цифры и знаки действий Евтушевский вводит после изучения чисел первого десятка. По ознакомлении с цифрами и знаками действий дальнейшие разложения записываются в виде табличек. Например при изучении числа двенадцать ученики составляют такую таблицу:

$$\begin{aligned} 12 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 12 &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ 12 &= 3 + 3 + 3 + 3 \\ 12 &= 4 + 4 + 4 \\ 12 &= 5 + 5 + 2 \\ 12 &= 6 + 6 \\ 12 &= 7 + 5 \\ 12 &= 8 + 4 \\ 12 &= 9 + 3 \\ 12 &= 10 + 2 \\ 12 &= 11 + 1 \end{aligned}$$

Первые шесть рядов записываются в сокращенном виде:

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 \\ 12 &= 2 \times 6 \\ 12 &= 3 \times 4 \\ 12 &= 4 \times 3 \\ 12 &= 5 \times 2 + 2 \\ 12 &= 6 \times 2 \end{aligned}$$

Из сравнения второй строчки этой последней таблицы с шестой и третьей с четвертой ученики убеждаются, что из разложений $12 = 2 \times 6$ или $12 = 3 \times 4$ сами собой вытекают совершенно однозначные с ними разложения $12 = 6 \times 2$ и $12 = 4 \times 3$. Обращая внимание на эту особен-

ность состава чисел и при других числах, ученики впоследствии выведут теорему, что от перестановки множителей произведение не изменяет своей величины.

На основании сокращенного записывания состава изучаемого числа из других ученики выводят кратные отношения этого числа к другим. Так, из того, что $10 = 5 \times 2$, ученики выводят, что $10:2 = 5$, и т. д.

Грубе занимается изучением чисел не только от 1 до 100, но — хотя менее подробно — и от 100 до 1000. Евтушевский рассматривает подробно каждое из чисел только первых двух десятков; от 20 до 100 изучаются преимущественно такие числа, которые имеют много делителей, как 24, 36, 48 и т. п. Разлагаются такие числа не на все числа, им предшествующие, а только на равные между собой слагаемые. Таким образом, числа от 20 до 100 изучаются преимущественно со стороны их состава из множителей.

Метод изучения чисел основан на предположении, что числа, не превышающие сотню, доступны *непосредственному созерцанию*, как говорит Грубе, или *осязательному пониманию*, как выражается Евтушевский. А под таким созерцанием, или пониманием, надо подразумевать способность, позволяющую нам воспринимать эти числа как представления, как образы отдельных единиц, подобно тому как мы получаем представления предметов окружающего нас мира. На предположении возможности непосредственного созерцания чисел первой сотни был, видимо, построен и метод Песталлоцци.

Изучив каждое из чисел первой сотни, ученики должны уметь вычислять, не зная приемов вычисления, но зная заключенные в этих пределах результаты всех действий над всеми числами. Например, ученики должны сразу сказать, что $38 + 27 = 65$; $75 - 18 = 57$; $24 \times 4 = 96$; $48 : 3 = 16$; $72 : 24 = 3$. Усвоение таких результатов — а их чрезвычайно много — достигается не заучиванием, не одной памятью: по мнению автора метода, усвоение это возможно, благодаря способности непосредственного созерцания чисел, и совершается путем изучения чисел.

После изучения чисел ученики знакомятся с приемами, или правилами, выполнения действий: арифметика вступает на обычный путь.

Вскоре после того как метод Грубе стал применяться в немецких школах — это было в начале пятидесятых годов, — наряду со сторонниками этого метода появились и противники его, которые указывали главным образом на следующие недостатки метода: 1) переход от числа к числу приводит к механичности, убивающей интерес; 2) ученики затрудняются, когда обозначение действий вводится с самого начала, а сами действия как бы предполагаются известными; 3) учителю слишком много приходится заниматься с младшим отделением.

Однако к концу шестидесятых годов метод изучения чисел получает в немецких школах всеобщее признание. Он существует там и до сего времени, будучи, правда, подвергнут по указа-

ниям опыта более или менее существенным видоизменениям, относящимся главным образом к сокращению области изучаемых чисел: вместо всех чисел первой сотни ведется изучение каждого числа лишь от 1 до 20 или от 1 до 10 и даже от 1 до 5.

§ 4. Метод изучения действий.

Метод изучения чисел господствовал в нашей школе около 20 лет — с начала шестидесятых до начала восьмидесятых годов.

Уже вскоре после своего появления метод изучения чисел вызвал против себя отдельные нападки. В числе его противников был Л. Н. Толстой, который дал резкую характеристику этого метода со стороны его непригодности для русской школы. „Может быть, — пишет Л. Н. Толстой, — дети готтентотов, негров, может быть, иные немецкие дети могут не знать того, что им сообщают в таких беседах; но русские дети, кроме блаженных, все приходящие в школу, знают“... „В математике, — говорит Л. Н. Толстой, — прежде заучивали определение действий, теперь и самих действий уже не делают, так как только на третий год, по Евтушевскому, приступают к нумерации и предполагают, что нужно учить детей в продолжение целого года считать до десяти“. Известный педагог-практик С. А. Рачинский также отрицательно отнесся к применению метода Евтушевского в русской школе. „Прием этот, — пишет С. А. Рачинский, — быть может, необходимый, когда приступаешь к делу с пятилетними детьми (или с идиотами), отзывается чрезвычайной искусственностью, когда имеешь дело с детьми вдвое старшими, уже умеющими считать более ста, уже имеющими практическое понятие о десятичной системе, благодаря известному им счету на копейки, гривенники и рубли... Нужно избегать слишком долгого пережевывания уже известного ученикам: оно порождает скуку, отучает их от необходимых умственных усилий“.

С течением времени недовольство методом Евтушевского возрастало все больше и больше, и в журналах восьмидесятых годов появился ряд статей, подвергших этот метод уничтожающей критике. Помимо указаний на вышеуказанные недостатки, подрыв был самый фундамент, на котором построено изучение чисел первой сотни. В самом деле, изучение чисел состоит в усвоении разложений каждого числа на все числа, ему предшествующие; в пределах сотни таких разложений очень много — свыше пяти тысяч, и одна память усвоить их не в состоянии. На помощь памяти Грубе и Евтушевский призывают „непосредственное созерцание“, или „осозательное понимание“, чисел, т. е. способность наглядно представлять как группу единиц каждое число, не превышающее сотни. Но наблюдения и опыты психологии показали, что такой способности не существует: мы можем наглядно представить себе лишь очень небольшие группы предметов — группу двух, трех и, самое большее, четырех предметов. Если же мы встречаемся с группой, заключающей в себе больше четырех предметов, то для определения ее величины мы должны произвести счет. В результате мы будем иметь не наглядное *представ-*

ление числа, а понятие о числе, выраженное словом, например словом „восемь“, и знаком, например цифрой 8. Правда, понятие о числе, как всякое другое понятие, если только оно не сообщается готовым, в виде лишь слова, заключает в себе след чувственного восприятия и представления, в данном случае представления о том процессе счета, путем которого оно получено. Понятие, выражаемое словом „восемь“, более или менее напоминает нам о произведенных нами когда-то процессах счета и говорит, что в этих процессах число восемь следует за числом семь и предшествует числу девять. И только. Оно не дает нам представления о составе числа восемь из отдельных единиц, двоек, троек и т. д.

Таким образом, изучение всех чисел первой сотни психологически невозможно, как основанное на несуществующей способности наглядного представления таких чисел.

Но метод изучения чисел применялся в наших школах в продолжение двадцати лет, а в некоторых задачниках он удержался и дольше. Это объясняется: 1) тем, что изучение чисел на практике не шло до 100, а ограничивалось значительно меньшими числами: до 20 или до 10; 2) тем, что вместе с изучением чисел детей знакомили и с приемами выполнения действий. То и другое мы видим у Евтушевского. Как было сказано выше, Евтушевский подробно изучает каждое число лишь в пределах от 1 до 20; от 20 до 100 он останавливается преимущественно на таких числах, которые имеют много делителей, и разлагает эти числа только на равные слагаемые или на множители. В пределе от 20 до 100 Евтушевский показывает приемы действий, например прием сложения двузначных чисел: к десяткам прибавить десятки, к единицам — единицы. Приемы вычисления даются Евтушевским и при изучении чисел до двадцати: для сложения однозначных чисел, сумма которых больше десяти, например для сложения $8 + 7$, надо сначала дополнить первое число до десяти, прибавив к нему два, потом к десяти прибавить пять.

Но если при изучении чисел указывать и приемы вычисления, то изучение чисел можно рассматривать только как своеобразный вид упражнений в применении этих приемов. Между тем упражнения в изучении чисел, которые Евтушевский ведет на протяжении почти двух лет обучения, представляют собой работу весьма однообразную, утомительную и способную убить в детях интерес к изучению арифметики.

В восьмидесятых годах метод Евтушевского начинает выходить из употребления в русских школах, и начальное обучение арифметике, освобождаясь от немецкого влияния, вступает у нас на самобытный путь.

Изучение чисел было отвергнуто. На место изучения чисел поставлено изучение действий, т. е. приемов их выполнения. В основу этих приемов положены счет и десятичная система счисления.

Новый метод получил название *метода изучения действий*.

Одной из первых попыток проведения нового метода было „Руководство к преподаванию арифметики“ В. А. Латышева,

появившееся в журнале „Русский начальный учитель“ в 1880 г. и содержавшее много ценных указаний, взятых из наблюдений над русской школой. Но наибольшим распространением пользовались вышедшая в 1885 г. „Методика арифметики“ А. И. Гольденберга и задачки, в двух выпусках, того же автора, положившие прочное основание постановке у нас начального обучения арифметике.

Выше мы привели краткий обзор попыток, которые были сделаны для того, чтобы на смену механического письменного вычисления построить курс начальной арифметики сообразно с пониманием, развитием и ростом умственных сил учащихся. Выдвигавшиеся этими попытками методические и дидактические требования полнее, чем когда-либо раньше, были проведены в руководствах Грубе и Евтушевского, так как это были первые руководства, получившие широкое распространение и имевшие обширное применение в практике обучения. Отбросив изучение чисел, новый метод, метод изучения действий, удержал все положительные качества своего предшественника, метода изучения чисел, а именно: 1) образование арифметики первой сотни, из которой потом выделены первый десяток и первые два десятка, — это ведет к концентрическому расположению учебного материала; 2) введение в арифметику практических задач наряду с упражнениями над отвлеченными числами; 3) устные вычисления наряду с письменными; 4) наглядность обучения; 5) вопросо-ответную катехизическую форму обучения, открывающую ученикам обширное поле самостоятельности, если она обращается в форму эвристическую, при которой дети путем наводящих вопросов учителя сами находят те знания, к которым желает их привести учитель.

Все это мы рассмотрим подробнее в гл. II этой книги, когда будем говорить о построении курса начальной арифметики.

§ 5. Направления в методике начальной арифметики в конце XIX и начале XX в.

В самом конце XIX в. в немецкой педагогической литературе появляется стремление построить начальный курс арифметики на данных экспериментальной (опытной) психологии. Начало этому направлению положили немецкие педагоги Беетц и более известный у нас Лай; последний — изданием книги „Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на дидактических опытах“ (первое издание вышло в конце 1897 г., а второе — последнее — в 1907 г.). Не касаясь подробностей и частных изложений, изложим лишь сущность этого метода, который мы можем назвать *методом числовых фигур*, а более точно — *методом изучения чисел при помощи числовых фигур*.

Как и Грубе, Лай начинает обучение арифметике изучением чисел, но ведет его только от одного до десяти. В основу метода вместо смутного „непосредственного созерцания“ чисел положены выводы, сделанные Лаем из его многочисленных дидактических опытов над целыми классами учеников.

Ясное понятие образуется из отчетливого представления. По мнению Лая, и понятию о числе должно предшествовать представление числа, поскольку такие представления возможны. Лай утверждает, что первоначальным источником происхождения чисел служит не счет, а наблюдение предметов, соединенных в определенные, конечно, небольшие группы: два глаза, две руки, лист клевера — трилистника, четыре ноги собаки, лошади. Такие наблюдения дают ребенку представления чисел, а из этих представлений образуются потом понятия о числах. Группы, подобные указанным, воспринимаются без помощи счета: воспринимаются одновременно. Одновременным восприятием Лай называет такую нашу способность, в силу которой мы можем в промежуток времени, меньший секунды, не прибегая к счету, усвоить состав наблюдаемой группы как из отдельных предметов, так и из меньших групп, на которые она может быть разложена. Путем опытов Лай подтверждает раньше него высказанное положение психологии, что такое непосредственное восприятие простирается лишь на весьма небольшие группы: до трех и самое большее четырех предметов.

Но здесь Лай — в этом и состоит сущность его метода — искусственным средством приходит на помощь естественному процессу образования числовых представлений. На основании своих опытов он пришел к убеждению, что одновременно воспринимаются группы не более четырех предметов в том случае, когда предметы расположены в беспорядке или же расположены в ряд, как, например, кубики на планке классной доски; а если расположить предметы так, чтобы они образовали определенную фигуру, тогда могут быть одновременно восприняты и большие группы, — до десяти и даже до двенадцати.

Числовые фигуры появились давно: впервые они были введены нашим соотечественником Ф. И. Буссе за сто лет до Лая, в 1797 г. Но на них смотрели просто как на наглядные пособия. Так, при ознакомлении с начертанием цифры, например 5, рядом с цифрой помещали изображение числа пятью точками или кружками, расположенными в виде фигуры, например игральной карты — пятачки; изображение чисел точками, образующими горизонтальный или вертикальный ряд, было бы слишком однообразно и не оставляло бы такого цельного впечатления, какое дает фигурное расположение точек, особенно если эта фигура окружена четырехугольной рамкой. Но Лай, повторяем, признает за числовыми фигурами несравненно большее значение: по его мнению, такие фигуры заменяют числовые представления, давая возможность в любой момент мысленно видеть число, вызвать в уме образ числа как целого, так и разложенного на всевозможные составные части его.

Производя опыты над числовыми фигурами, предложенными различными методистами, Лай пришел к заключению, что наилучшим образом достигают своей цели эти квадраты, фигуры, в которых предметы располагаются в вершинах квадратов: число один — это предмет, помещенный в левом верхнем углу квадрата; число два образуется присоединением предмета в левом нижнем

углу квадрата; для изображения числа три помещается еще предмет в верхнем правом углу квадрата; число четыре образуют предметы, расположенные во всех углах; число пять изображается полным квадратом и еще одним предметом, помещенным в левом верхнем углу второго квадрата, и т. д. до числа десять, которое будет представлено двумя полными квадратами и левой половиной третьего квадрата.

Кроме того, путем опытов Лай исследовал вопросы о том, какова должна быть наиболее целесообразная форма предметов, составляющих числовые группы, каков размер предметов, расстояние между ними, цвет их, окраска фона, на котором они расположены. На основании своих опытов Лай предложил такое устройство классного аппарата для построения числовых фигур. Предметы изображаются шарами 3 см в диаметре; расстояние между шарами одного и того же квадрата в полтора раза больше диаметра шара, т. е. равно $4\frac{1}{2}$ см; а расстояние между разными квадратами равно удвоенному диаметру шара, или 6 см. Шары

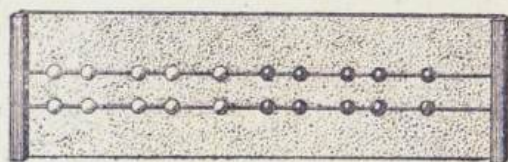


Рис. 1.

надеваются на две проволоки, по десяти шаров на каждую; расстояния между шарами поддерживаются надеваемыми на те же проволоки металлическими трубочками. Проволоки помещены в рамке, которая вешается на стену или на классную доску.

На каждой проволоке левые пять шаров белого цвета, правые пять — красного; те и другие шары отчетливо выделяются на черном фоне доски, имеющейся сзади рамки (рис. 1). Проволоки вынимаются из рамки, и на каждую из них надевается столько шаров, сколько нужно для изображения данного числа; например для изображения числа семь надевается на верхнюю проволоку четыре шара, на нижнюю — три с соблюдением должных расстояний; получится фигура: весь первый квадрат и три вершины второго (незанятой остается последняя, т. е. правая нижняя вершина второго квадрата). Все белые шарики обеих проволок воспринимаются как десяток; для изображения чисел от одиннадцати до двадцати кроме белых шаров служат и красные, причем фигура, составленная красными шарами, должна быть совершенно такая же, какая на белых шарах изображала соответствующее число единиц, когда это число изучалось в пределах первого десятка; например, число семнадцать будет изображено всеми белыми шарами обеих проволок и красными шарами: четырьмя на верхней проволоке и тремя на нижней с сохранением должных расстояний между шарами.

Такие же приборы, только значительно меньших размеров, Лай советует раздать каждому ученику на руки.

Кроме описанного классного прибора, служащего для изображения чисел до двадцати, Лай употребляет подобный же прибор для изображения всех чисел до ста. Последний отличается от описанного только тем, что вместо двух проволок имеет десять.

Чтобы удобнее было работать на таком приборе, чтобы не приходилось, вынимая проволоки, снимать и надевать шарики, — ненужные шарики сдвигаются вправо и закрываются доской, прикрепленной к раме на шарнирах и могущей вращаться наподобие дверцы.

Изложим вкратце, как ведется у Лая изучение чисел.

Сначала идут упражнения для приобретения числовых представлений. Прежде всего делается наблюдение изучаемого числа на окружающих или вполне знакомых детям предметах, по возможности соединенных в естественные или искусственные группы: при изучении числа два — два глаза, две руки, пара сапог, пара лошадей; при изучении числа три — лист клевера, три зубца вилки; при изучении дальнейших чисел — четыре ноги лошади, четыре стены комнаты, пять пальцев руки, шесть ножек майского жука, восемь ножек паука и т. д. За наблюдением предметов идут построение числовой фигуры на счетном приборе и вместе с тем изучение этой фигуры при помощи зрения и осязания; дети должны изучить последовательный порядок шаров: шар в левом верхнем углу — это один; еще шар в нижнем левом углу — это два; еще шар в правом верхнем углу — это три и т. д. Числовое представление приобретено; дети должны уметь с закрытыми глазами описать изученную числовую фигуру, т. е. указать расположение шаров.

До сих пор в изучении фигуры дети принимали более пассивное участие: они главным образом наблюдали. Но для закрепления числового представления надо, чтобы дети приняли и активное участие в его приобретении. Для этого служит изображение числовой фигуры, которое дети выполняют на ручном приборе, и снова описание ее, которое дети производят на память, с закрытыми глазами, указывая пальцем места шаров в числовой фигуре или, лучше, делая пальцем очертание каждого шара фигуры. Затем дети изображают числовую фигуру на бумаге: сначала точками или кружками, а позднее и цифрой.

Этот круг упражнений замыкается применением приобретенного числового представления к окружающим или хорошо известным предметам и явлениям: дети укажут число стекол в оконной раме, положат на стол требуемое число книг, ударят в ладоши известное число раз и т. д.

Приобретение числового представления сопровождается изучением действий, которое попрежнему состоит из: 1) наблюдения, ведущего к представлению, 2) изображения, 3) применения.

Наблюдая действия на классном счетном аппарате, дети делают выводы из тех разложений числовой фигуры, какие показывает им учитель. Примеры: в числовой фигуре четырех учитель отделяет линейкой последний шар (правый нижний). Дети выводят: к трем прибавить один будет четыре; к одному прибавить три будет четыре. В числовой фигуре пяти учитель закрывает рукой или куском картона два последних шара, а потом три первых. Выводы: от пяти отнять два останется три; от пяти отнять три останется два. Числовую фигуру шести учитель разделяет двумя линейками на пары. Выводы: два повторить три раза — будет шесть; шесть разделить на пары — будет три пары; шесть разделить на три равных части будет по два в каждой части. За наблюдением следует представление: закрыв глаза и указывая пальцем, дети должны на словах описать различные части и целое.

После этого идет изображение: те разложения, которые раньше дети наблюдали, они теперь должны проделать сами, сначала на ручных приборах, потом на память (описание разложений с закрытыми глазами), наконец на бумаге: сперва в виде рисунков, а позднее и цифрами.

Изучение действий заканчивается применением их к задачам, содержание которых берется из окружающего, доступного детям мира.

Мы видим, таким образом, что метод Лая теснейшим образом связывает числа (по крайней мере до десяти) с числовыми фигурами.

Метод числовых фигур наряду со сторонниками имеет не меньше противников. Как на одного из противников укажем на швейцарского педагога И. Штёклина.

„Числа, — говорит Штёклин, — *сами по себе* не могут быть наблюдаемы: число не предмет и не свойство предмета, которое могло бы быть воспринято, как, например, цвет или форма. Число есть *соотношение* между одинаковыми (или принимаемыми за одинаковые) предметами, т. е. количественное соотношение. *Это соотношение может быть воспринято чувствами.* Даже более: наблюдение может выяснить и те изменения, которые претерпевает соотношение между одинаковыми предметами благодаря прибавлению или отнятию их; другими словами, оно может сделать ясными понятия прибавления, отнятия и других арифметических действий. Поэтому не только понятия чисел первого десятка, но и представления простейших арифметических процессов должны исходить из чувственного восприятия, должны быть приобретены на конкретных предметах“.

„Было бы ошибкой, — говорит он далее, — предполагать, что ребенок может одновременно воспринять любое число первого десятка, может ясно охватить его с первого взгляда. Это справедливо лишь по отношению к неопределенным числам: *много, мало, больше, несколько и*, по мнению некоторых методистов, по отношению к первым определенным числам 2, 3 и самое большее — 4“. Но и здесь Штёклин склоняется к тому мнению, что „совокупность предметов никогда не может быть отчетливо воспринята с одного взгляда: для этого нужно, чтобы внимание последовательно переносилось с одного предмета на другой, т. е. чтобы мы последовательно воспринимали единицы, *считали* их. Если число предметов весьма мало, например 2 или 3, то счет происходит столь быстро, что последовательное восприятие единиц очень близко к одновременному восприятию их. Если же число предметов увеличивается, то говорить о восприятии их с одного взгляда становится все более и более затруднительным“.

Таким образом, в вопросе о происхождении чисел Штёклин примыкает к тем ученым и педагогам, которые говорят, что числа происходят от счета. Лай же и его сторонники видят первоначальное происхождение чисел в наблюдении естественных групп предметов.

Что касается числовых фигур, то, по мнению Штёклина, наблюдая такую фигуру, ребенок приобретает представление внеш-

него вида или формы фигуры, но не числа предметов или точек ее образующих, совершенно так же, как он приучается обозначать число пять знаком 5, который отнюдь не говорит о количестве единиц этого числа. Указывая далее на то, что люди взрослые при игре в карты отличают восьмерку от десятки или семерку от девятки, не представляя числа очков, Штёклин спрашивает: „Неужели мы вправе предполагать, что ребенок будет делать то, чего не делают и взрослые?“.

К числовым фигурам заставляет отнестись отрицательно и то обстоятельство, что фигурам этим придается постоянная форма, тогда как, по мнению Песталоцци, разделяемому автором, восприятие числовых соотношений должно совершаться независимо от восприятия формы. „Мы утверждаем, — говорит Штёклин, — что числовые фигуры являются не только непрактичными и искусственными, изобретенными лишь для школы, неприменимыми и скоро забываемыми в жизни, но и способными повести к совершенно невероятным суждениям и заключениям, а потому и безусловно вредными. Возьмем пример из одной новой книжки, написанной сторонником числовых фигур. Учитель спрашивает: „Как выглядит 3?“ Кто-либо из способных учеников, а за отсутствием таковых кто-либо из учеников, оставшихся в том же классе на второй год,

говорит: „3 выглядит так:



вверху 2, внизу 1“. Это повто-

ряется отдельными учениками и хором. Но, спросим мы теперь, что же будет, если наш способный ученик увидит вечером на небе созвездие, имеющее форму * * и заключающее 3 звезды? Должен ли он думать, что это не 3, или что учитель не умеет считать до 3?!

Сам Штёклин, следуя Грубе, ведет изучение отдельных чисел, ограничивая его первым десятком. В основу изучения первого десятка он кладет полнейшую наглядность. „Первоначальное обучение арифметике должно быть чисто наглядным обучением. Предметы, при помощи которых дети будут воспринимать числа, должны находиться у них перед глазами; при этом они должны быть настолько знакомы ученикам, чтобы последние могли представлять себе производство действий над ними“.

Наглядность обучения достигается *наблюдением*, которое автор делит на два вида: наблюдение *внешнее*, или прямое, когда наши чувства воспринимают предмет, на который наше внимание обращено *сейчас*, и наблюдение *внутреннее*, или косвенное, когда предмет был воспринят *ранее*.

Как было сказано выше, наблюдать число само по себе нельзя: число не предмет и не свойство предмета, которое может быть наблюдаемо, как, например, цвет, форма. Число есть количественное соотношение между одинаковыми предметами, и это соотношение может быть воспринято чувствами. Мало того, наблюдению подлежат и те изменения, которые происходят в этом соотношении между одинаковыми предметами благодаря прибавлению или отнятию; другими словами, можно наблюдать и действия над числами.

Единичное наблюдение, например однажды виденная группа из шести предметов, не может дать понятия о числе: понятие о числе образуется путем повторного, многократного наблюдения групп, одинаковых по численности, но состоящих каждый раз из различных предметов. Повторное наблюдение ведет к тому, что внимание ребенка начинает останавливаться на общем признаке всех таких групп, т. е. на численности их; все же остальные, случайные признаки, самые предметы как бы исчезают.

Отсюда следует, что при первоначальном обучении арифметике, при изучении первого десятка, надо пользоваться возможно более разнообразными наглядными пособиями. Укажем главнейшие пособия, рекомендуемые Штёклином.

На первое место он ставит предметы и явления, наблюдаемые в природе. „При преподавании арифметики следует обратить внимание на те вещи и соотношения вещей, которые близки ребенку,

т. е. те, которые он может *непосредственно* наблюдать, например части своего тела и предметы классной комнаты, и те, которые он неоднократно воспринимал чувствами у себя дома и которые, таким образом, легко доступны *внутреннему* наблюдению. К последнего рода вещам можно отнести все те предметы и явления, которые встречаются в кухне, в саду, в поле, при детских играх и т. д., словом, при жизни в городе и деревне“.

Второе место отводится пальцам, которые служат для обозначения не только чисел первого десятка, но и действий над такими числами — сложения и вычитания.

Из искусственных приборов предпочтением пользуются классные счеты с довольно остроумным видоизменением, сделанным Шнейдером. Дело в том, что в обыкновенных счетах шары бывают одного цвета, отчего происходит малая различимость шаров, затрудняющая восприятие единиц числа. При выполнении действий то же самое относится к их элементам. Пусть надо на счетах сделать сложение $5 + 3$; слагаемые 5 и 3 наблюдаются весьма короткое время — пока кладутся; когда же получена сумма 8, то она только и подлежит наблюдению, а слагаемых наблюдать уже нельзя — они поглощены суммой.

Приспособление Шнейдера состоит в том, что он дал каждому шару двойную окраску: одна половина шара (например, передняя) светложелтого цвета, другая (задняя) — красного цвета. Отверстия, которыми шары надеваются на проволоки, делаются не круглой, а овальной формы. Легким движением пальца шар можно повернуть к себе любой его половиной, причем шар тотчас же приходит в устойчивое равновесие, так как благодаря овальной форме отверстия точка опоры шара лежит выше его центра тяжести. На рисунке 2 изображены счеты Шнейдера. Они имеют 10 про-

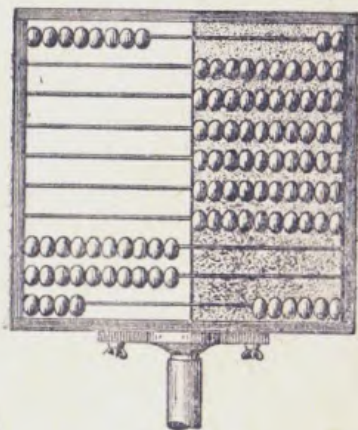


Рис. 2.

волока, по 10 шаров на каждой проволоке. На верхней проволоке показано сложение $5 + 3$: первое слагаемое обозначено красными шарами, второе — желтыми; вместе с суммой 8 наблюдаются и слагаемые, из которых эта сумма образовалась. На трех нижних проволоках показано сложение четырех шестерок, или умножение 6×4 . Если мы думаем, что не входящие в данное упражнение лишние шары могут мешать, рассеивая внимание детей, то будем делать упражнения, повернув к детям счеты стороною, обратной той, какая изображена на рисунке: тогда лишние шары будут находиться за дощечкой, закрывающей половину прибора.

Следующее место в числе наглядных пособий занимают карточки, которые до некоторой степени заменяют действительные предметы. При выборе картинок надо стремиться к тому, чтобы на них были изображены преимущественно такие предметы и явления, которые допускают возможность движения, действия, например появления, исчезновения, удаления, словом, изменения количественных соотношений.

Остальные наглядные пособия — это письменные знаки для обозначения чисел; графические изображения, выполняемые самими учениками, возбуждают в детях интерес и развивают самостоятельность; вместе с тем они служат материалом для первых письменных упражнений. Штёклин предлагает для обозначения чисел сле-

дующие знаки | ● ○, т. е. вертикальную черточку, черный кружок

(пятнышко) и белый кружок (колечко); последние два знака служат изображениями двухцветных шаров шнейдеровских счетов. Кроме того, для обозначения чисел служат римские цифры, которые показываются вслед за обозначением чисел на пальцах, с которыми римские цифры имеют много общего. После таких более или менее наглядных обозначений вводятся обычные арабские цифры и знаки арифметических действий.

Заметим, между прочим, что упомянутые выше Беетц и Лай сопровождают изучение чисел числовыми стишками, представляющими собой большей частью набор рифм без достаточно осмысленного содержания, вроде нашего детского стишка:

Раз, два, три, четыре, пять,
Вышел зайчик погулять.

Наряду с подобными стишками мы встречаем у Штёклина преимущественно числовые загадки, тоже в форме стихов, какова, например, одна из загадок, приводимых при изучении числа 2:

Живут на свете две сестры,
Пожих очень друг на друга.
Между собой они дружны,
Из все готовы друг для друга.
Работать примется одна —
Другая тотчас ей поможет;
И даже вымыться одна
Без помощи друг ей не может.

Чтобы показать, как ведет Штёклиня изучение чисел, для примера опишем в главных чертах ход изучения числа 4.

I. Наблюдение окружающих предметов.

а) Внешнее или непосредственное наблюдение. Классная комната и классная обстановка. В классе две боковых стены: одна справа, другая слева; одна передняя стена и одна задняя стена; всего четыре стены. У каждой стены четыре угла. У каких других частей комнаты также по четыре угла? — У пола, потолка, двери, окна, оконного стекла. Укажите и назовите те предметы, которых в классе по четыре? Какие предметы классной комнаты имеют по четыре каких-либо части? — У стола, стула по четыре ножки. Рамка у грифельной доски состоит из четырех брусков — 2 подлиннее и 2 покороче. Скрипка учителя имеет 4 струны; каждая струна прикреплена к одному колку; поэтому у скрипки всего 4 колка. — Что нарисовал я на доске?  Почему этот рисунок называется четырехугольником? Сколько нужно провести черточек, чтобы нарисовать четырехугольник? На сколько больше, чем когда мы рисуем треугольник?

б) Внутреннее или косвенное наблюдение. Вспомните такие предметы, которые имели бы по четыре каких-либо части. — У экипажа четыре колеса, у коровы четыре ноги, у лошади четыре копыта... В году четыре времени года. Как называется первое из них, второе, третье, четвертое?

II. Упражнения на пальцах и на счетах.

Заметим, что у Штёклина, как и в большинстве немецких учебников, кроме сложения и вычитания различаются еще два действия — разложение и дополнение: $4 = 1 + ?$. Четыре состоит из 1 и еще из какого числа? Это — разложение. $2 + ? = 4$. Сколько надо прибавить к 2, чтобы получить 4? Это — дополнение.

Упражнения на пальцах начинаются с образования изучаемого числа из предшествующего. — Вытяните указательный, средний и безымянный пальцы правой руки. Сколько пальцев вытянуто? Вытяните еще мизинец. Сколько пальцев теперь вытянуто? Сколько будет три пальца и еще один палец?

Потом, сгибая и вытягивая пальцы, дети проделывают упражнения в сложении, вычитании — разложении и дополнении. Примеры: четыре пальца — это два пальца (указательный и средний) и еще сколько пальцев? (Разложение и сложение.) Согните три пальца (мизинец, безымянный и средний); сколько пальцев осталось вытянутыми? (Вычитание.) Сколько пальцев надо вытянуть, чтобы вместо одного было вытянуто всего четыре пальца? (Дополнение.)

После этого дети пишут римскую цифру III, рассматривая ее как изображение четырех пальцев.

Далее идут упражнения на счетах Шнейдера, упражнения, подобные тем, которые перед этим были проделаны на пальцах. „Покажи мне, что три да один составляют четыре“. Ученик устанавливает три желтых и один красный шар. „Вот четыре (желтых) шара“. — „Кто может разложить их на две группы?“ Кто-либо из учеников повертывает один шар

так, чтобы была видна только красная половина его, и говорит, что четыре можно разложить на три и на один. Затем поворачивает еще шар и говорит, что четыре состоит из двух и двух, и т. д.

То, что дети видят на счетах, они могут изобразить в своих тетрадах, обозначая желтые шары белыми кружками (колечками), а красные шары — черными кружками (пятнышками). Например разложение

четырех на два и на два может быть изображено так: ○ ○ ● ●

III. На картинах и знаках.

В имеющихся у детей на руках задачниках (они носят заглавие „Азбука арифметики“) на каждое число первого десятка помещены одна основная картинка и несколько отдельных картинок. Для числа 4 основная картинка изображает рабочего осла. На переднем плане осел с мешком муки на спине; на земле лежат еще три таких мешка; к стене приставлен жернов; поодаль домик мельника с четырьмя окнами; в воздухе птицы. Под руководством учителя дети рассматривают картинку: один осел, четыре мешка, один жернов, один дом с четырьмя окнами и одной печной трубой, много птиц в воздухе. — Каких частей тела у осла по одной? по две? по четыре? Сколько мешков на земле? Сколько мешков у осла

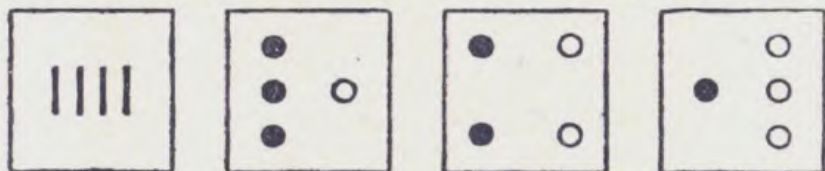


Рис. 3.

на спине? Сколько всего мешков? Осел увез один мешок; сколько мешков осталось? и т. д. На подобных задачах исчерпываются действия над числом 4.

То же самое повторяется потом при рассматривании отдельных картинок; на них изображены: бабочка, связка ключей, косточка домино, четыре вишни. У бабочки четыре крыла: два побольше и два поменьше, два крыла с правой стороны и два — с левой. Головка бабочки снабжена спереди двумя усиками. На сколько у бабочки больше крыльев, чем усиков? Сколько пятен (глазков) на каждом крыле у этой бабочки? Сколько их на двух передних крыльях? на двух задних крыльях? сколько всего? У каких насекомых столько же крыльев, сколько у бабочки? — У пчелы, осы, стрекозы? — У каких насекомых только два крыла? — У мухи, комара. На сколько у пчелы больше крыльев, чем у мухи? Сколько ключей изображено на картинке? — Четыре ключа: три ключа на кольцо и один свободный. (Разложение: четыре состоит из трех и одного.) — Этот ключ также надевают на кольцо. Сколько ключей теперь на кольце? (Сложение: к трем прибавить один.) — Сколько ключей останется на кольце, если мы снимем два, три ключа? (Вычитание.) И т. д.

После этого идут упражнения на знаках: число 4 обозначается черточками, белыми и черными кружками, в ряд или в виде фигур (рис. 3). Обозначение черточками служит для прямого и обратного счета: одна,

две, три, четыре черточки; четыре, три, две, одна черточка. Следующие три фигуры служат: 1) для сложения: к трем прибавить один, к двум два, к одному три; 2) для вычитания: от четырех отнять один, два, три; 3) для разложения: четыре состоит из трех и одного, двух и двух, одного и трех; 4) для дополнения: чтобы получить четыре, надо к трем прибавить один, к двум два, к одному три.

IV. Вычисление над отвлеченными числами.

До сих пор вычисление производилось над предметами, их изображениями, искусственными наглядными пособиями, например шарами счетов, значками. Одни и те же вычисления, произведенные над различными предметами, должны повести к образованию понятия об отвлеченном числе.

Теперь дети выполняют те же вычисления над отвлеченными числами: сначала устно, а потом — после введения цифры 4 — и письменно, причем пользуются знаками $+$, $-$ и $=$, с которыми познакомились при изучении предшествующих чисел.

Сложение и вычитание:		Разложение:	Дополнение:
$3 + 1 =$	$4 - 2 =$	$4 = 3 +$	$3 + = 4$
$4 - 1 =$	$2 + 2 =$	$4 = 2 +$	$1 + = 4$
$1 + 3 =$	$4 - 3 =$	$4 = 0 +$	$2 + = 4$
$4 - 4 =$	$0 + 4 =$	$4 = 1 +$	$0 + = 4$

V. Применение.

Изучение числа заканчивается применением вычислений к решению задач.

Решение задач сопровождается стишками-загадками. Вот одна из таких загадок:

Два побольше, два поменьше —
Все по улице бегут.
Как большие ни торопятся,
За меньшими не угонятся:
Позади всегда идут.

Сущность того направления в обучении арифметике, представителем которого является немецкий педагог Лай, мы назвали *методом изучения чисел при помощи числовых фигур*. Другое направление, которого держится немецко-швейцарский педагог Штёклин, менее оригинальное и представляющее собой только развитие и усовершенствование прежних приемов обучения, можно было бы назвать методом *естественно-наглядного изучения чисел*, ввиду того значения, которое придается естественным наглядным пособиям: предметам и явлениям окружающего мира и заменяющим их картинкам.

Сочинения Лая и Штёклина переведены на русский язык.

В. А. Лай, „Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на результатах дидактических опытов“. Пере-

вод с последнего немецкого издания, под ред. Д. Л. Волковского, Москва, 1910 г.

И. Штёклин, „Методика арифметики“. Часть I. 1-й, 2-й и 3-й школьные годы обучения. Перевод с последнего немецкого издания Ал. Долгова, под ред. и с предисловием Д. Л. Волковского, Москва, 1911 г.

Части II и III появились в переводе несколько позже.

Кроме того, имеется в переводе несколько выпусков задачника того же автора под заглавием „Азбука арифметики“. Вып. 1. Арифметический задачник. Вып. 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Перевод Д. Л. Волковского.

В этих руководствах и наш учитель может найти много ценных указаний для проработки отдельных статей курса, особенно на дальнейших ступенях его. Но в целом они к нашей школе не применимы. Происходит это оттого, что школа наша находится в особенных условиях. В иностранную школу ребенок поступает в возрасте шести лет, а в нашу школу идет ребенок восьми лет, с большим запасом сведений, вынесенных им из собственных наблюдений и своего житейского опыта, а вместе с тем и с большим умственным развитием. Поэтому мелко детальная разработка материала, рекомендуемая иностранными руководствами, непригодна для нашей школы: 1) на нее нехватит времени и 2) во многих случаях она может оказаться излишней. Особенно относится это к началу обучения: к подробнейшему изучению чисел первого десятка. Как бы наглядно, живо и интересно ни велось такое изучение чисел, оно не соответствует ни возрасту, ни познаниям нашего ребенка и, в лучшем случае, обратится для него в безвредную игрушку и забаву, если не считать потери времени, столь дорогого в нашей школе.

Излагая метод швейцарского педагога Штёклина, мы отметили широкое пользование картинками для наглядного изображения как количественных соотношений между предметами, так и тех изменений, какие могут претерпевать эти соотношения, т. е. для изображения арифметических действий.

Впервые картинки стали применяться к обучению арифметике в американских школах. В задачниках кроме картинок, назначенных для изучения отдельных чисел и действий над ними, как это мы видели у Штёклина, помещается очень много задач, выраженных частью словами, частью картинками. Например: „Брат имел (нарисовано четыре башмака). Сколько башмаков он имел?“ Кроме того, картинки служат здесь и для проявления активной деятельности учащихся: дети должны сами зарисовать некоторые предметы, о которых говорится в задачах; такие рисунки, конечно, простейшей формы, удовлетворяя стремлению к самостоятельности, развивают вместе с тем и наблюдательность детей.

Вообще в американской школе обращено особое внимание на самостоятельность учащихся. Дети изготовляют самодельные наглядные пособия: образцы мер, таблицы сложения и умножения, модели геометрических фигур и тел из бумаги или из спи-

чек, связанных размоченным горохом, и т. д. Измеряют, взвешивают; производят в классе торговлю, для чего вырезают из бумаги и раскрашивают различные предметы и делают модели монет, причем о ценах справляются в лавках; составляют задачи на данные и самими выбранные темы и т. д.

Такой способ обучения называется *лабораторным методом*. В этом методе можно видеть осуществление мысли, высказанной Дистервегом: „Что *глаз* видит, *ум* созерцает, *слово* выражает,— то *рука* должна изобразить“. Впервые применил этот метод на практике современник Дистервега, немецкий педагог Фридрих Фребель, основатель „детского сада“. Исходя из того, что стремление к деятельности у детей проявляется преимущественно в играх, Фребель выработал целую систему образовательных детских игр и занятий, развивающих детей как физически, так и умственно. Но применение метода Фребеля ограничилось лишь детьми дошкольного возраста: этим методом пользовались только в детских садах и иногда в обстановке домашнего обучения.

ГЛАВА II.

ПОСТРОЕНИЕ КУРСА НАЧАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ.

§ 6. Цель обучения арифметике в начальной школе.

„Обучение арифметике имеет двоякую цель: практическую и общеобразовательную. Для достижения той и другой цели необходимо, чтобы дети научились свободно вычислять, умели применять свои знания к решению задач и сознательно усвоили основные арифметические понятия“.

Образовательная цель обучения состоит в развитии ума, чувства и воли. Для достижения этой цели обучением арифметике:

1) все арифметические знания и умения на каждой ступени должны восприниматься и усваиваться учащимися вполне сознательно, так, чтобы ученики в области доступных для них понятий и отношений давали бы себе верный и ясный отчет: почему и для чего это так делается;

2) мысль учащихся должна быть приучена к самостоятельной деятельности как при выводе различных правил, так и при решении задач;

3) учащиеся должны приобрести доверие к собственным силам и настойчивость в преодолении встречающихся трудностей.

Все это ведет к развитию в учениках уважения, любви и способности к труду. А рядом с развитием способности мыслить должно идти, конечно, и развитие способности выражать свои мысли, т. е. развитие речи и некоторого навыка в письменном изложении мыслей.

Практическая цель обучения начальной арифметике заключается в том, чтобы дать учащимся такие умения и навыки, которые непосредственно могли бы им пригодиться в жизни, а именно:

1) навык в быстром вычислении, главным образом устным, и выкладках на торговых счетах¹;

2) умение свободно решать задачи практического содержания, с которыми постоянно приходится встречаться в обиходной жизни.

При обучении начальной арифметике обе цели — образовательная и практическая — могут быть соединены самым тесным образом и достигаемы в одно и то же время.

§ 7. Характер курса начальной арифметики.

Курс арифметики, проходимый в начальной школе, должен иметь преимущественно практический характер, противопоставляя практический характер теоретическому, а не общеобразовательному. Мы хотим сказать этим, что в курсе начальной арифметики не следует придавать особенного значения таким обобщениям, которые трудны для детей: или потому, что последние не могут вполне сознать значения этих обобщений, или потому, что не могут свободно выражать их по недостаточности развития речи. Так, мы полагаем:

1) Не должно требовать от учеников начальной школы заучивания определений действий (что называется сложением и пр.) и других арифметических понятий (о числе, цифре и пр.) в той или иной *обязательной* форме: достаточно ограничиться тем, что ученики понимают смысл и значение арифметических действий, что они покажут, безошибочно выбирая надлежащее действие для каждой данной простой задачи. В самом деле, от понимания вещей до точного, логического определения их довольно большой шаг. Определение должно быть даваемо лишь тогда, когда потребность в нем может быть вполне сознаана; а для этого требуется сравнительно высокое развитие ума и речи. В противном случае заучивание определений, ничего не прибавляя к знаниям детей, поведет лишь к потере времени и, мало того, может вызвать в учащихся нежелательное отношение к арифметике. Кроме того, точность и строгость иных принятых определений подлежит некоторому сомнению. Нам кажется, что в начальной школе точные и строгие определения вполне могут быть заменены *объяснением* слов: или таких, с которыми дети доселе не встречались, как, например, название данных и искомых в арифметических действиях, слово „процент“ и т. п., или таких, которые хотя и употребляются в обиходной речи, но как арифметические термины имеют условное значение, как, например, слово „умножить“, которое в обиходной речи означает просто увеличить. Подобные объяснения нет нужды облекать в форму текстов, подлежащих обязательному заучиванию наизусть от слова до слова.

2) Не следует требовать и того, чтобы ученики формулировали правила действий в общем виде: „чтобы сложить два или несколько чисел, надо подписать их одно под другим так, чтобы единицы были под единицами“ и т. д. Если дети в каждом дан-

¹ При этом должно заметить, что выкладки на счетах не стоят особняком от приемов устного или письменного вычисления, но могут прекрасно иллюстрировать эти приемы и тем содействовать пониманию их сущности.

ном случае правильно и сознательно выполняют действие и могут по требованию объяснить, почему они так поступают, то для начальной школы этого будет вполне достаточно. Заучивание правил в общей форме (а она довольно пространна), ничего не уясняя, только отнимет время, столь дорогое в начальной школе.

Все общие и отвлеченные выводы могли бы быть сделаны учениками при помощи учителя и заучены по возможно краткому учебнику по окончании всего начального курса арифметики, в последний год обучения, служа повторением и систематическим обзором пройденного.

Практический характер курса начальной арифметики заключается в том, что в начальной школе арифметика должна усваиваться учениками главным образом при помощи задач преимущественно общежитейского, практического содержания, вполне доступного пониманию детей. Таким образом, в начальной арифметике задачи являются и целью (научить детей решать задачи) и средством (выяснять и выводить при помощи задач арифметические понятия и приемы вычисления). Практический характер придает курсу начальной арифметики и забота о развитии в детях навыка в быстром вычислении, преимущественно устном, и выкладках на торговых счетах.

§ 8. Концентрическое расположение учебного материала.

Правильно поставленное школьное обучение должно исходить из тех познаний и опираться на те сведения, которые ученики приносят с собой в школу; это — умение считать до некоторого предела, иногда до десяти, иногда больше или меньше, и решать простенькие вопросы с небольшими числами; с такими вопросами дети, конечно, встречались в своих наблюдениях и опытах, например во время игр. При этом должно заметить, что детям чужда область отвлеченных понятий: им доступно число конкретное, как количественное соотношение между предметами.

Это требование ведет: 1) к тому, что в начале обучения не должно выводить детей из области небольших чисел, и 2) к тому, что следует научить детей выполнять над этими небольшими числами все арифметические действия, не задерживая искусственно учеников только на тех вопросах, которые требуют лишь некоторых из этих действий. Таким образом, прежде всего надо научить детей правильно называть и писать небольшие числа, производить над этими числами все арифметические действия и применять эти действия к решению задач. Это — маленькая арифметика, лежащая в основании остального курса. Затем надлежит пополнить и расширить пройденное, ознакомив детей с такими понятиями и приемами вычисления, которые не могли быть указаны раньше, потому что выводу их должно предшествовать усвоение первого отдела, т. е. надо пройти нумерацию и четыре действия над числами большими, чем то было ранее.

Этот второй отдел, в свою очередь, будет служить основанием для отдела следующего, в котором пределы чисел расширены еще более, и т. д. Таким образом, курс начальной арифме-

тики распадается на отделы, сходные между собой по содержанию: в каждом из них изучаются нумерация и четыре действия; различаются эти отделы объемом, а вследствие того и полнотой развития арифметических понятий и приемов вычисления. Каждый следующий отдел заключает в себе предыдущий и расширяет его. Все эти отделы могут быть уподоблены кругам, описанным из общего центра различными радиусами, и приведенное расположение учебного материала называется *концентрическим*¹. Концентрическое расположение материала, соответствуя возрасту и развитию поступающих в начальную школу детей, имеет и то достоинство, что ведет к более прочному усвоению знаний, так как при изучении каждого нового отдела сам собой повторяется и отдел предыдущий.

Число и объем этих концентрических отделов могут быть определены самой сущностью начальной арифметики, т. е. изучением нумерации и действий.

А. Концентрация учебного материала в зависимости от изучения нумерации. Способы словесного выражения и письменного обозначения чисел, или словесная и письменная нумерация, основаны на десятичной группировке единиц. Непосредственный счет идет только до десяти: каждое из получаемых при этом чисел называется самостоятельным словом (один, два, три... девять) и обозначается особым знаком (1, 2, 3...9).

Число десять, с одной стороны, представляет собой соединение десяти простых единиц, а с другой стороны — принимается за новую единицу — десяток. Десятки считаются так же до десяти, как и простые единицы, а названия получаемых групп десятков составляются из слов два, три... девять и слова десять, или десяток, причем способы составления названий указывают на повторение десятка несколько раз: например, три раза десять — короче тридцать, или тридцать; пять десятков — пятьдесят, или пятьдесят². Десятки, будучи сами единицами, обозначаются теми же знаками, какими и простые единицы, но поставленными на втором справа месте, что указывается постановкой на первом месте знака, называемого нулем и показывающего отсутствие простых единиц: 10, 20, 30...90. За пределом десяти счет ведется уже при посредстве десятка: предметы — простые единицы — группируются в десятки; называется сначала число десятков, потом число простых единиц, не составивших полного десятка: двадцать один, пятьдесят шесть и т. д. Особенности представляют числительные от десяти до двадцати, в которых

¹ В систематических курсах арифметики учебный материал располагается, как известно, по статьям, из которых каждая полностью исчерпывает какой-либо отдел арифметики: сначала полностью изучается нумерация, потом, одно за другим, четыре действия. Такое расположение материала может быть названо *поступательным*.

² В русском языке исключением из такого порядка образования названий служат числительные сорок (вероятно, от греческого названия четырех десятков — тессараконта) и девяносто (происхождение этого слова доподлинно неизвестно).

название единиц предшествует названию десятка и сливается с ним в одно слово посредством предлога „на“, означающего прибавление (накинуть, набавить): один на десять — одиннадцать, пять на десять — пятнадцать. Так как число десятков и простых единиц не превышает девяти, то для письменного обозначения чисел, состоящих из десятков и единиц, требуются те же девять значащих цифр, причем цифра десятков ставится на втором справа месте, а цифра единиц — на первом месте: 11, 15, 26, 99.

Десять десятков принимаются за новую единицу — сотню. Сотни считаются так же, как десятки и простые единицы, т. е. до десяти. Названия групп сотен составляются из слов два, три... девять и из слова сто, или сотня: три ста — триста, пять сотен, пять сот — пятьсот. Сотни, будучи единицами, обозначаются теми же девятью знаками, которые служат для обозначения простых единиц и десятков; но знаки эти помещаются в этом случае на третьем справа месте, что указывается постановкой двух нулей на втором и первом месте, означающих отсутствие десятков и простых единиц: 100, 200, 300, ... 900. За пределом сотни счет ведется уже при посредстве десятка и сотни: простые единицы группируются в десятки, десятки — в сотни; называется число сотен, число десятков, не составивших полной сотни, и число простых единиц, не составивших полного десятка: двести пятьдесят шесть, четыреста двенадцать, сто пять, триста сорок. Так как число сотен, десятков и единиц не превышает девяти, то для письменного обозначения чисел, состоящих из сотен, десятков и единиц, требуются, кроме нуля, те же девять значащих цифр, причем цифра сотен ставится на третьем справа месте, цифра десятков на втором и цифра единиц — на первом; в случае отсутствия десятков или единиц на их месте должен находиться нуль: 125, 204, 530.

Таким образом, счет ведется не только простыми единицами или единицами первого разряда, но также единицами сложными — десятками, сотнями, или единицами второго, третьего разряда. Каждая следующая единица составляется из десяти ей предшествующих единиц. Число, показывающее, из скольких счетных единиц образуется следующая счетная единица, называется *основанием* системы счисления. Наша система счисления, имеющая основанием число десять, называется поэтому десятичной, или десятичной, системой счисления.

Примечание. Возможны системы счисления и с другими основаниями, например пятиричная система, в которой первой сложной единицей будет пяток, вторая сложная единица — группа в пять пятков и т. д.; или, например, двенадцатиричная система, по которой счет ведется, кроме простых единиц, дюжинами, дюжинами дюжин, или grossами, и т. д. Начатки таких систем, особенно пятеричной, встречаются у некоторых диких народов, которые число пять принимают за сложную единицу и, называя ее словом „рука“, считают дальше так: рука и один, рука и два... две руки; число „две руки“ называют иногда словом „человек“, иногда словом „полчеловека“, причем слово „человек“ обозначает число двадцать. И в культурном мире, при господствующей десятичной нумерации, по отношению к некоторым предметам применяется не десятичная,

а иная группировка; так, стальные перья, карандаши, белье считаются дюжинами иgrossами. В Германии иные предметы, например яйца, считаются группами в 15 и 60 штук.

Господство десятичной системы счисления объясняется тем, что нумерация, вероятно, обязана своим происхождением пользованию при счете преимущественно пальцами обеих рук.

Десятеричная система счисления требует, чтобы каждое число до десяти имело особое, самостоятельное название и было изображено особым знаком — цифрой. Для словесного выражения дальнейших чисел надо давать названия только сложным единицам: десять, сто и т. д.; из этих названий сложных единиц и из названий первых девяти чисел составляются названия всех прочих чисел, которые, таким образом, выражаются именами числительными, не самостоятельными, а производными; например, числительное триста пятьдесят шесть произведено из слов: три, пять, шесть, десять и сто. Для письменного изображения любых чисел требуются те же девять цифр, которыми обозначаются первые девять чисел, и, кроме того, особый знак — нуль, который в случае отсутствия единиц некоторых разрядов давал бы возможность соблюдать местное значение цифр, по которому цифра единиц должна занимать первое справа место, цифра десятков — второе, цифра сотен — третье и т. д.

Из изложенного мы видим, какое значение имеет десяток в нашей системе счисления: для того чтобы уметь называть и писать числа любой величины, необходимо прежде всего научиться называть и писать числа до десяти.

Таким образом, первым отделом начального курса арифметики должен быть „первый десяток“.

Так как в основе нумерации лежит употребление счетных единиц различных разрядов и так как десяток является первой сложной единицей, то весьма полезно выделить в особый концентр круглые десятки до ста. Здесь дети знакомятся с десятком как со счетной единицей, усваивают названия круглых десятков и письменное их обозначение, уясняя себе значение нуля.

Итак, одним из концентров начального курса арифметики должен быть отдел „круглые десятки до ста“.

Кроме первого десятка большое значение в нашей нумерации имеет область первой тысячи.

До сих пор каждая сложная единица имела свое самостоятельное название: десяток, сотня. Начиная с тысячи, из каждых трех сложных единиц только первая называется самостоятельным словом, а названия двух следующих единиц составляются из того же слова и слов десяток и сотня: тысяча, десяток тысяч, сотня тысяч; миллион, десяток миллионов, сотня миллионов; миллиард, десяток миллиардов, сотня миллиардов и т. д., т. е. тысячи, миллионы, миллиарды и т. д. считаются так же, как простые единицы, именно по одной, десятками и сотнями. Вследствие этого счетные единицы могут быть соединены в группы, или классы, по три единицы в каждом.

4 Класс билионов			3 Класс миллионов			2 Класс тысяч			1 Класс единиц		
Сотня бил- лио- нов	Деся- ток бил- лио- нов	Еди- ница бил- лио- нов	Сотня мил- лио- нов	Деся- ток мил- лио- нов	Еди- ница мил- лио- нов	Сотня ты- сяч	Деся- ток ты- сяч	Еди- ница ты- сяч	Сотня	Деся- ток	Еди- ница
XII	XI	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I
Номера разрядов.											

В каждом классе есть свои единицы, свои десятки и свои сотни. Единица первого класса — это простая единица, единица второго класса — тысяча, единица третьего класса — миллион, единица четвертого класса — биллион, или миллиард, и т. д. Единицы классов, т. е. простая единица, тысяча, миллион, биллион и т. д. называются *главными* единицами системы счисления.

Примечание. Такая классификация принята во Франции; ее будем держаться и мы. В Германии и Англии соединяют в классы не по три, а по шести счетных единиц: 1-й класс, или класс единиц, содержит: единицу, десяток, сотню, тысячу, десяток тысяч и сотню тысяч; во 2-м классе (классе миллионов) находятся: миллион, десяток миллионов, сотня миллионов, тысяча миллионов, десяток тысяч миллионов, сотня тысяч миллионов; 3-й класс (класс биллионов) составляют: биллион, десяток биллионов, сотня биллионов, тысяча биллионов, десяток тысяч биллионов, сотня тысяч биллионов; 4-й класс — класс триллионов и т. д. В каждом классе находятся: единица, десяток, сотня, тысяча, десяток тысяч и сотня тысяч. Класса тысяч нет. Названия биллион, триллион и т. д. принадлежат не тем счетным единицам, какие имеют эти названия в трехразрядной системе.

Образование классов, которое является вторичной, более крупной группировкой единиц, быть может, произошло от того, что сложные единицы вводились постепенно, по мере надобности (с расширением торговли, развитием науки), так что — при сравнительно раннем появлении сотни — долгое время ограничивались счетом лишь до тысячи и настолько привыкли к такому счету, что применили его и к вновь появившейся единице — тысяче, а потом к миллиону и далее, т. е. стали считать тысячи, миллионы так же, как считали до тех пор простые единицы, именно по одной, десятками и сотнями.

Теоретически возможны различные классификации, т. е. соединение в классы различного числа разрядов. Выше мы привели возможное объяснение трехразрядной системы: это — продолжительное существование счисления лишь до тысячи и привычка к нему, вследствие которой оно было перенесено и на новые единицы. Если принять во внимание, что миллион появился сравнительно недавно, в конце XV в. (когда появилась тысяча, мы не знаем, но во всяком случае за много веков до миллиона), и если предположить, что счет до известного предела, существовавший в течение долгого времени, применялся вследствие привычки и ко вновь являю-

шейся единице, то происхождение шестиразрядной классификации можно объяснить так: продолжительное существование единиц только двух первых классов (единица, десяток, сотня, тысяча, десяток тысяч, сотня тысяч) могло повести к тому, что различие между этими единицами и смысле принадлежности их к двум группам (классам) исчезло, так что каждая единица (начиная со второй) рассматривалась только как соединение десяти предыдущих (как это было бы в том случае, если бы каждая из шести единиц имела особое, самостоятельное название); счет, производившийся при помощи шести счетных единиц, перенесен был и на новые единицы — миллионы (а потом и на биллионы и пр.), кот орые стали считать так: миллион, десяток миллионов, сотня миллионов, тысяча миллионов, десяток тысяч миллионов, сотня тысяч миллионов (и потом биллион, десяток биллионов, сотня биллионов, тысяча биллионов, десяток тысяч биллионов, сотня тысяч биллионов). Сравнивая трехразрядную и шестиразрядную классификации, мы видим, что названия сложных единиц составляют в них различным образом, начиная с единицы десятого разряда, которая в одной системе образует единицу четвертого класса и получает самостоятельное название: биллион (миллиард); в другой — принадлежит ко второму классу и называется тысяча миллионов; название же „биллион“ имеет единица 13-го разряда, начинающая собой третий класс (в трехразрядной системе это будет триллион). Соединение счетных единиц в классы уменьшает число слов, необходимых для названия сложных единиц, а следовательно, для выражения чисел вообще. С этой точки зрения шестиразрядная классификация имеет некоторое преимущество перед трехразрядной: в последней те же самые счетные единицы группируются в большее число классов, а первая единица каждого класса должна быть названа особым словом.

Однако этим преимуществом едва ли искупается неудобство первой системы, заключающееся в том, что сложные единицы получают тройные названия (состоящие из трех слов): десять тысяч миллионов, сто тысяч биллионов и пр.

Ввиду того значения, какое имеет в нашей нумерации область тысячи, весьма полезно выделить в особый концентр первую тысячу. По изучении этого отдела ученики будут вполне подготовлены к усвоению нумерации чисел любой величины. В самом деле, числа произносятся, а иногда и пишутся по классам, т. е. с промежутками между классами, например 25 миллионов 308 тысяч 76; цифровое обозначение — 25 308 076. Число, находящееся в каждом классе, не превышает числа 999, т. е. заключается в пределах тысячи; оно читается так же, как число первого класса, с присоединением лишь названий тысячи, миллиона, биллиона и т. д.; взятое в отдельности, оно пишется так же, как число первого класса, с той лишь разницей, что в случаях, когда оно не находится в старшем классе, в его обозначение всегда входят три цифры: 036; 080; 002.

Итак, одним из концентров начального курса арифметики должен быть отдел „первая тысяча“.

Таким образом, в целях усвоения нумерации курс начальной арифметики должен заключать в себе отделы: „первый десяток“, „круглые десятки до ста“, „первая тысяча“.

Б. Концентрация учебного материала в зависимости от изучения действий.

Сложение. Правило сложения чисел любой величины, например $5387 + 2694$, состоит в том, что слагаемые разбиваются на десятичные группы и складываются между собой одноименные группы: единицы с единицами, десятки с десятками, сотни с сотнями и т. д.

Так как всякое число содержит единиц каждого разряда не более девяти, то сложение любых двух чисел сводится к сложению двух чисел, из которых каждое меньше десяти, или чисел однозначных. Для того чтобы возможно быстро производить сложение любых чисел, надо знать на память все суммы однозначных чисел попарно, т. е. знать наизусть так называемую *таблицу сложения*.

ТАБЛИЦА СЛОЖЕНИЯ.

$1+1=2$	$1+2=3$	$1+3=4$	$1+4=5$	$1+5=6$
$2+1=3$	$2+2=4$	$2+3=5$	$2+4=6$	$2+5=7$
$3+1=4$	$3+2=5$	$3+3=6$	$3+4=7$	$3+5=8$
$4+1=5$	$4+2=6$	$4+3=7$	$4+4=8$	$4+5=9$
$5+1=6$	$5+2=7$	$5+3=8$	$5+4=9$	$5+5=10$
$6+1=7$	$6+2=8$	$6+3=9$	$6+4=10$	$6+5=11$
$7+1=8$	$7+2=9$	$7+3=10$	$7+4=11$	$7+5=12$
$8+1=9$	$8+2=10$	$8+3=11$	$8+4=12$	$8+5=13$
$9+1=10$	$9+2=11$	$9+3=12$	$9+4=13$	$9+5=14$

$1+6=7$	$1+7=8$	$1+8=9$	$1+9=10$
$2+6=8$	$2+7=9$	$2+8=10$	$2+9=11$
$3+6=9$	$3+7=10$	$3+8=11$	$3+9=12$
$4+6=10$	$4+7=11$	$4+8=12$	$4+9=13$
$5+6=11$	$5+7=12$	$5+8=13$	$5+9=14$
$6+6=12$	$6+7=13$	$6+8=14$	$6+9=15$
$7+6=13$	$7+7=14$	$7+8=15$	$7+9=16$
$8+6=14$	$8+7=15$	$8+8=16$	$8+9=17$
$9+6=15$	$9+7=16$	$9+8=17$	$9+9=18$

Что касается составления таблицы сложения, или сложения однозначных чисел, то оно может быть выполнено путем присчитывания по единице; например сложение $5 + 4$ можно сделать так: пять да один — шесть, шесть да один — семь, семь да один — восемь, восемь да один — девять. Если мы не имеем перед глазами соединяемых групп предметов, если присчитывание производится без помощи пальцев или других наглядных пособий, то мы должны вести порядковый счет прибавляемым единицам, для того чтобы знать, когда окончить присчитывание: к пяти прибавить первую единицу, будет шесть; к шести — вторую, будет семь; к семи — третью, будет восемь; к восьми — четвертую, будет девять; или же, если умеем, будем всякий раз определять, сколько единиц осталось еще прибавить: пять да один — шесть, осталось прибавить три; шесть да один — семь, осталось прибавить два и т. д. Если некоторые результаты уже стали достоянием памяти, то этим можно воспользоваться для более скорого нахождения других результатов; пусть, например, присчитывая двоек по одной единице, мы запомнили все полученные резуль-

таты, так что можем прибавлять двойку сразу; тогда для нахождения, например, суммы $5 + 4$ можем разбить придаваемое число не на единицы, а на двойки: к 5 прибавить 2 и потом к 7 еще 2. Особенно удобен этот прием в том случае, когда сумма однозначных чисел более десяти, как, например, при сложении 8 и 7; здесь всего лучше разбить прибавляемое число на такие две группы (2 и 5), из которых одна (придаваемая сначала) дополнит первое слагаемое до десяти. Само собой разумеется, что, поступая таким образом, мы должны уметь дополнять число до десяти (сколько надо прибавить к 8, чтобы получить 10?) и вычитать однозначное число из однозначного (когда к 8 мы прибавили 2, то сколько еще осталось прибавить к 10?).

При составлении и заучивании таблицы сложения можно воспользоваться и тем свойством суммы, по которому она не зависит от порядка слагаемых: $5 + 7 = 7 + 5$.

Наибольшая сумма двух однозначных чисел есть число 18; поэтому можно сказать, что таблица сложения заключается в пределах двух десятков.

Для того чтобы применить таблицу к сложению чисел любой величины, ее надо предварительно распространить на единицы сложные: если 5 простых единиц и 7 простых единиц составляют 12 простых единиц, то 5 каких бы то ни было единиц и 7 таких же единиц дадут 12 таких же единиц ($500 + 700 = 1200$)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Иногда таблица сложения записывается в форме квадрата. Составляется она так. В верхнем горизонтальном ряду пишутся по порядку первые девять чисел, впереди ставится нуль. К числам верхнего ряда прибавляется по единице и результаты записываются во втором ряду; к числам второго ряда прибавляется по единице и результаты записываются в третьем ряду и т. д.; каждый ряд образуется из предыдущего прибавлением по единице.

Последний ряд начинается числом 9. Можно также составить эту таблицу по вертикальным столбцам: в левом столбце написать по порядку первые девять чисел, наверху поставить нуль; каждый следующий столбец образовать из предыдущего прибавлением по единице. Чтобы найти в такой таблице, например, сумму $7+6$, берем одно из слагаемых, положим, 7 в верхнем ряду, а другое слагаемое 6 в левом столбце; искомая сумма находится в пересечении вертикального столбца, имеющего наверху цифру 7, и горизонтального ряда, имеющего налево цифру 6.

Вычитание. Правило вычитания чисел любой величины, например $5249 - 2567$, состоит в том, что вычитаемое (2567) разбивается на десятичные группы (2 тысячи, 5 сотен, 6 десятков, 7 единиц), которые отнимаются от одноименных групп уменьшаемого, причем если в уменьшаемом единиц какого-либо разряда меньше, чем в вычитаемом, то в эти единицы раздробляется единица следующего, высшего разряда (уменьшаемое разбивается на группы: 4 тысячи, 11 сотен, 14 десятков, 9 единиц).

Так как вычитаемое разбивается на десятичные группы, из которых каждая содержит не более девяти разрядных единиц, и так как от вычитания этих групп из одноименных групп уменьшаемого получаются десятичные группы разности, содержащие каждая также не более девяти единиц, то вычитание чисел любой величины сводится к вычитанию однозначного числа из однозначного и из двузначного в случае однозначной разности. В приведенном примере вычитание числа 2567 из числа 5249 сводится к вычитаниям: $9-7$, $14-6$, $11-5$, $4-2$. Для того чтобы возможно быстро производить вычитание любых чисел, надо знать на память все однозначные разности при однозначном вычитаемом, т. е. знать наизусть так называемую *таблицу вычитания*.

ТАБЛИЦА ВЫЧИТАНИЯ.

$2-1=1$	$3-2=1$	$4-3=1$	$5-4=1$	$6-5=1$
$3-1=2$	$4-2=2$	$5-3=2$	$6-4=2$	$7-5=2$
$4-1=3$	$5-2=3$	$6-3=3$	$7-4=3$	$8-5=3$
$5-1=4$	$6-2=4$	$7-3=4$	$8-4=4$	$9-5=4$
$6-1=5$	$7-2=5$	$8-3=5$	$9-4=5$	$10-5=5$
$7-1=6$	$8-2=6$	$9-3=6$	$10-4=6$	$11-5=6$
$8-1=7$	$9-2=7$	$10-3=7$	$11-4=7$	$12-5=7$
$9-1=8$	$10-2=8$	$11-3=8$	$12-4=8$	$13-5=8$
$10-1=9$	$11-2=9$	$12-3=9$	$13-4=9$	$14-5=9$

$7-6=1$	$8-7=1$	$9-8=1$	$10-9=1$
$8-6=2$	$9-7=2$	$10-8=2$	$11-9=2$
$9-6=3$	$10-7=3$	$11-8=3$	$12-9=3$
$10-6=4$	$11-7=4$	$12-8=4$	$13-9=4$
$11-6=5$	$12-7=5$	$13-8=5$	$14-9=5$
$12-6=6$	$13-7=6$	$14-8=6$	$15-9=6$
$13-6=7$	$14-7=7$	$15-8=7$	$16-9=7$
$14-6=8$	$15-7=8$	$16-8=8$	$17-9=8$
$15-6=9$	$16-7=9$	$17-8=9$	$18-9=9$

Что касается составления таблицы вычитания, то оно может быть выполнено путем отсчитывания по единице; например вычитание $9-5$ можно сделать так: девять без одного — восемь, во-

семь без одного — семь, семь без одного — шесть и т. д. Если отсчитывание производится без помощи наглядных пособий, то надо вести порядковый счет отнимаемым единицам, для того чтобы знать, когда окончить отсчитывание: от девяти отнять первую единицу — останется восемь, от восьми отнять вторую единицу — останется семь и т. д.; или же надо определять всякий раз, сколько еще осталось отнять: девять без одного — восемь, остается отнять четыре; восемь без одного — семь, остается отнять три и т. д. Если некоторые результаты уже стали достоянием памяти, то этим можно воспользоваться для более скорого нахождения других результатов; пусть, например, отсчитывая по единице двойку и тройку от каждого однозначного числа, мы запомнили все полученные разности, так что можем отнять двойку или тройку сразу; тогда для вычитания $9 - 5$ можно разбить вычитаемое число не на единицы, а на группы 2 и 3, от 9 отнять 2, а потом от 7 отнять 3. Особенно удобен этот прием в том случае, когда уменьшаемое есть двузначное число, например при вычитании $15 - 8$; здесь лучше всего разбить вычитаемое 8 на такие две группы, из которых первая равна единицам уменьшаемого, т. е. на группы 5 и 3; отнимая первую группу, обратим уменьшаемое в десяток, из которого и вычитаем вторую группу. Само собой разумеется, что применение такого приема требует умения сразу вычитать число из десяти.

Наибольшее число, которое встречается в таблице вычитания, есть 18; поэтому можно сказать, что таблица вычитания заключается в пределах двух десятков.

Для того чтобы применить таблицу вычитания к вычитанию чисел любой величины, ее надо предварительно распространить на единицы «ложные»: если 8 простых единиц без 2 простых или 12 простых единиц без 5 простых единиц дают 6 или 7 простых единиц, то 8 каких бы то ни было единиц без 2 таких же единиц или 12 каких бы то ни было единиц без 5 таких же единиц дадут 6 или 7 таких же единиц ($8000 - 2000 = 6000$; $1200 - 500 = 700$).

Вычитание есть действие, обратное сложению. Два вопроса называются взаимно обратными, если то, что в одном из них отыскивается, в другом дается; а одно из данных первого вопроса во втором отыскивается. В сложении даются слагаемые, ищется сумма: $5 + 4 = ?$ Обратными вопросами будут такие: $? + 4 = 9$, т. е. к какому числу надо прибавить 4, чтобы получить 9? и $5 + ? = 9$, т. е. сколько надо прибавить к 5, чтобы получить 9? Эти два вопроса относятся к вычитанию. Вычитание есть такое действие, которым по данной сумме и одному из слагаемых требуется найти другое слагаемое.

Легко видеть, что вычитание может быть выполнено путем присчитывания по единице; например чтобы сделать вычитание $9 - 5$, станем прибавлять к пяти по единице, пока не получим девяти: к пяти прибавить первую единицу — будет шесть; к шести — вторую, будет семь; к семи — третью, будет восемь; к восьми — четвертую, будет девять; итак, к 5 надо прибавить 4, что-

бы получить 9; а потому если от 9 отнять 5, то останется 4. Конечно, производить вычитание посредством присчитывания по единице было бы слишком долго. Твердое знание таблицы сложения ведет к тому, что мы можем сразу находить табличные разности при помощи таблицы сложения: зная, что $8 + 6 = 14$, мы знаем вместе с тем, что $14 - 6 = 8$ и $14 - 8 = 6$; желая от 15 отнять 7, мы припоминаем по таблице сложения, какое число надо прибавить к 7 или к какому числу надо прибавить 7, чтобы получить 15. Вследствие этого считают иногда излишним составление и изучение особой таблицы вычитания.

Приведенная на стр. 41 таблица сложения, записанная в форме квадрата, может служить вместе с тем и таблицей вычитания: например, чтобы сделать вычитание $14 - 6$, берем вычитаемое 6 в верхнем ряду; в столбце, наверху которого стоит 6, находим, спускаясь вниз, уменьшаемое 14; от него идем налево и видим, что наше уменьшаемое находится в горизонтальном ряду, начинающемся числом 8, которое и будет искомой разностью. Можно также взять вычитаемое 6 в левом столбце, тогда искомую разность найдем в верхнем ряду.

Примечание. Не только в пределах таблицы, но и в случае любых чисел вычитание может быть выполнено путем сложения. Пусть надо сделать вычитание:

$$\begin{array}{r} 7245 \\ - 2682 \\ \hline 4563 \end{array}$$

Будем отыскивать разряды разности по таблице сложения: придаем к 2 столько, чтобы получить 5; этим мы найдем единицы искомой разности; далее соображаем: так как десятков в вычитаемом больше, чем в уменьшаемом, то, очевидно, искомые десятки, будучи приданы к десяткам вычитаемого, дадут одну сотню, кроме десятков, т. е. 14 десятков; придаем к 8 столько, чтобы получить 14; находим десятки разности; заметив, что одна сотня уменьшаемого образовалась от сложения десятков вычитаемого и разности, и продолжая рассуждать по-предыдущему, мы придадим к 6 (числу сотен вычитаемого) столько, чтобы получить 11, и т. д.

Когда в уменьшаемом единиц какого-либо разряда, как в нашем примере десятков и сотен, меньше, чем в вычитаемом, тогда можно поступать еще так: прибавив к 8 десяткам 6 десятков, получим 14 десятков, т. е. 1 сотню и 4 десятка, между тем как в уменьшаемом только 4 десятка; таким образом, будем иметь лишнюю 1 сотню; эта излишне взятая сотня исчезнет, если мы увеличим на единицу число сотен вычитаемого, т. е. будем считать в вычитаемом не 6, а 7 сотен; прибавив к этим 7 сотням 5 сотен, получим 12 сотен, или 1 тысячу и 2 сотни, тогда как в уменьшаемом только 2 сотни; излишне взятая 1 тысяча исчезнет, если мы увеличим на единицу число тысяч вычитаемого. Приведем еще два примера, чтобы показать ход рассуждения при употреблении этого способа вычитания.

Пример 1. Из 31 802 вычестъ 27 568.

Ход рассуждения будет таков:

$$\begin{array}{r}
 31802 \\
 - 27568 \\
 \hline
 4234
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 8 \text{ да } 4 \text{ дают } 12; \text{ пишем } 4, \text{ замечаем } 1. \\
 6 + 1 = 7 \text{ да } 3 \text{ дают } 10; \text{ пишем } 3, \text{ замечаем } 1. \\
 5 + 1 = 6 \text{ да } 2 \text{ дают } 8; \text{ пишем } 2. \\
 7 \text{ да } 4 \text{ дают } 11; \text{ пишем } 4, \text{ замечаем } 1. \\
 2 + 1 = 3.
 \end{array}$$

Пример 2. Из числа 80 926 вычестъ сумму чисел 19 548 и 32 969.

$$\begin{array}{r}
 80926 \\
 - 19548 \\
 32969 \\
 \hline
 28409
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 8 + 9 = 17 \text{ да } 9 \text{ дают } 26; \text{ пишем } 9, \text{ замечаем } 2. \\
 4 + 6 + 2 = 12 \text{ да } 0 \text{ дают } 12; \text{ пишем } 0, \text{ замечаем } 1. \\
 5 + 9 + 1 = 15 \text{ да } 4 \text{ дают } 19; \text{ пишем } 4, \text{ замечаем } 1. \\
 9 + 2 + 1 = 12 \text{ да } 8 \text{ дают } 20; \text{ пишем } 8, \text{ замечаем } 2. \\
 1 + 3 + 2 = 6 \text{ да } 2 \text{ дают } 8; \text{ пишем } 2.
 \end{array}$$

Умножение. Правило умножения чисел любой величины состоит в том, что данные числа разбиваются на их десятичные группы и все группы множимого умножаются на каждую группу множителя. Таким образом, умножение чисел любой величины приводится к перемножению их десятичных групп; а так как каждая десятичная группа содержит не более девяти единиц какого-либо разряда, то перемножение десятичных групп сводится к перемножению однозначных чисел. Для того чтобы возможно быстро производить умножение чисел любой величины, надо уметь на память перемножать все однозначные числа попарно, т. е. знать наизусть так называемую *таблицу умножения*.

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ.

$1 \times 1 = 1$	$1 \times 2 = 2$	$1 \times 3 = 3$	$1 \times 4 = 4$	$1 \times 5 = 5$
$2 \times 1 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times 5 = 10$
$3 \times 1 = 3$	$3 \times 2 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 5 = 15$
$4 \times 1 = 4$	$4 \times 2 = 8$	$4 \times 3 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$4 \times 5 = 20$
$5 \times 1 = 5$	$5 \times 2 = 10$	$5 \times 3 = 15$	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 5 = 25$
$6 \times 1 = 6$	$6 \times 2 = 12$	$6 \times 3 = 18$	$6 \times 4 = 24$	$6 \times 5 = 30$
$7 \times 1 = 7$	$7 \times 2 = 14$	$7 \times 3 = 21$	$7 \times 4 = 28$	$7 \times 5 = 35$
$8 \times 1 = 8$	$8 \times 2 = 16$	$8 \times 3 = 24$	$8 \times 4 = 32$	$8 \times 5 = 40$
$9 \times 1 = 9$	$9 \times 2 = 18$	$9 \times 3 = 27$	$9 \times 4 = 36$	$9 \times 5 = 45$
$1 \times 6 = 6$	$1 \times 7 = 7$	$1 \times 8 = 8$	$1 \times 9 = 9$	
$2 \times 6 = 12$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 8 = 16$	$2 \times 9 = 18$	
$3 \times 6 = 18$	$3 \times 7 = 21$	$3 \times 8 = 24$	$3 \times 9 = 27$	
$4 \times 6 = 24$	$4 \times 7 = 28$	$4 \times 8 = 32$	$4 \times 9 = 36$	
$5 \times 6 = 30$	$5 \times 7 = 35$	$5 \times 8 = 40$	$5 \times 9 = 45$	
$6 \times 6 = 36$	$6 \times 7 = 42$	$6 \times 8 = 48$	$6 \times 9 = 54$	
$7 \times 6 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$7 \times 8 = 56$	$7 \times 9 = 63$	
$8 \times 6 = 48$	$8 \times 7 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$8 \times 9 = 72$	
$9 \times 6 = 54$	$9 \times 7 = 63$	$9 \times 8 = 72$	$9 \times 9 = 81$	

Что касается составления таблицы умножения, или перемножения однозначных чисел, то оно может быть выполнено путем сложения, так как умножение вообще есть особый способ сложения равных слагаемых. Так, например, произведение 7×5 есть

сумма $7+7+7+7+7$; для вычисления ее прибавляем 7 к 7, к 14 еще 7, к 21 еще 7 и к 28 еще 7. Если таблица умножения составляется и усваивается по частям, то результатами, которые уже стали достоянием памяти, можно пользоваться для более скорого нахождения других результатов. Пусть, например, мы знаем наизусть таблицу умножения в пределах первого десятка (когда произведения не превышают 10), и нам надо умножить 2 на 8; вместо того чтобы путем сложения набирать двойки по одной, мы возьмем сразу столько двоек, сколько можем, например 5 двоек; а затем, тоже сразу, берем остальные 3 двойки; складывая $10+6$, получим искомое произведение 16. Положим, что мы знаем на память таблицу умножения в пределах 20, и нам нужно умножить 6 на 6, или вычислить сумму $6+6+6+6+6+6$; соединяем шестерки в такие группы, какие можем вычислить сразу, например в группы по две или по три шестерки; тогда мы приходим к вычислению суммы $12+12+12$ или суммы $18+18$; ту и другую сумму можно найти путем умножения 12×3 или 18×2 , так как оба эти умножения требуют знания таблицы лишь в пределах 20. В своем месте мы укажем еще некоторые другие приемы табличного умножения.

При изучении таблицы умножения можно пользоваться и тем свойством произведения, по которому оно не зависит от порядка сомножителей: $5 \times 7 = 7 \times 5$.

Наибольшее произведение однозначных чисел есть число 81; поэтому можно сказать, что таблица умножения заключается в пределах сотни.

Иногда таблица умножения подобно таблице сложения запи-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

сывается в форме квадрата. Составляется она так. В верхнем горизонтальном ряду пишутся по порядку первые девять чисел. Каждое из этих чисел складывается само с собой, т. е. удваивается, и результаты пишутся во втором ряду. К каждому из чисел второго ряда прибавляется стоящее над ним число первого ряда, и результаты помещаются в третьем ряду, где, таким образом, будут находиться первые девять чисел, умноженные на 3, и т. д.; каждый ряд образуется из предыдущего прибавлением к числам этого ряда стоящих над ними чисел первого ряда. Легко видеть, что каждый ряд будет содержать произведения первых девяти чисел и того числа, которым этот ряд начинается. Последний ряд начинается числом 9. Вместо того чтобы переходить от одного горизонтального ряда к другому, можно составить ту же таблицу по вертикальным столбцам. Чтобы найти в такой таблице, например, произведение 8×6 , берем один из сомножителей, положим, 8 в верхнем ряду, а другой сомножитель 6 в левом столбце; искомое произведение находится в пересечении вертикального столбца, имеющего наверху цифру 8, и горизонтального ряда, имеющего налево цифру 6.

Для того чтобы применить таблицу умножения к умножению чисел любой величины, ее надо распространить на сложные единицы. Когда сложные единицы будут множимым, а множителем служит число однозначное, тогда распространение таблицы может быть сделано путем такого рассуждения: если 5 простых единиц, повторенные 3 раза, дают 15 простых единиц, то и 5 каких бы то ни было единиц, повторенные 3 раза, дадут 15 таких же единиц: $5 \text{ сот} \times 3 = 15 \text{ сот}$; $500 \times 3 = 1500$. Для распространения таблицы на тот случай, когда сложные единицы будут множителем, надо предварительно рассмотреть умножение на 10, 100, 1000 и т. д., т. е. на число, обозначаемое единицей с нулями. Сделать это можно так. Пусть надо 7 умножить на 10; повторим 10 раз каждую единицу, вместо единицы будем иметь десяток: было 7 единиц, стало 7 десятков; письменно это выразится приписыванием справа ко множимому одного нуля: $7 \times 10 = 70$. Пусть требуется 500 умножить на 100; повторим 100 раз каждую сотню; счетная единица, которая в 100 раз больше сотни, занимает в ряду счетных единиц место двумя разрядами выше сотни и будет десятком тысяч: было 5 сотен, стало 5 десятков тысяч, письменно это выразится приписыванием ко множимому справа двух нулей: $500 \times 100 = 50\,000$. Распространим теперь таблицу умножения на сложный множитель. Пусть надо 4000×300 . Представляя себе это произведение как сумму трехсот слагаемых, из которых каждое равно 4000, вообразим, что слагаемые эти соединены в группы, по 3 слагаемых в каждой группе; таких групп выйдет 100; для вычисления такой группы надо 4000 умножить на 3, будет 12000; а для нахождения всей суммы надо вычисленную группу 12000 умножить на 100. Таким образом, для умножения на сложные единицы, или на значащую цифру с нулями, умножаем множимое на эту значащую цифру и к полученному произведению приписываем справа столько нулей, сколько их было при значащей цифре.

Примечание. Те рассуждения, какие мы привели для расширения таблицы умножения на сложные единицы, могут быть применены и вообще к тем случаям умножения, когда множимое или множитель, или оба вместе, оканчиваются нулями.

Деление. При делении чисел любой величины делимое разбивается на такие группы, которые по разделении на делителя дают десятичные группы искомого частного. Так, деление $965124:3876$

$$\begin{array}{r} 965124 \overline{) 3876} \\ - 7752 \quad 249 \\ \hline 18992 \\ - 15504 \\ \hline 34884 \\ - 34884 \\ \hline \end{array}$$

приводится к делениям на 3876 трех чисел: 9651, 18 992 и 34 884, из которых каждое дает в частном не более 9. Деление чисел любой величины состоит, следовательно, из ряда делений многозначного числа на многозначное при однозначном частном. Однозначное частное при делении многозначных чисел отыски-

вается следующим образом. Пусть, например, надо разделить $9748:2437$. Берем старший разряд делителя 2 тысячи и тот же разряд делимого 9 тысяч и вместо данных чисел $9748:2437$ делим 9 тысяч на 2 тысячи (закругляем данные числа назад); деление 9 тысяч на 2 тысячи сводится к делению 9 на 2; имеем в частном 4; испытываем это число 4, умножая на него делителя 2437 и сравнивая произведение с делимым. Число, найденное путем деления старших разрядов, иногда может оказаться велико, как, например, при делении $8052:2684$; тогда испытываем число, на единицу меньшее и т. д. Еще пример: $449771:64253$; берем старший разряд делителя 6 десятков тысяч и делим на него все десятки тысяч делимого, т. е. 44 десятка тысяч; 44 по делении на 6 дает в частном 7; умножая делителя 64 253 на 7 и сравнивая произведение с делимым, находим, что испытываемое число 7 и будет искомым частным. Еще пример: $2357:387$; деля по предыдущему все сотни делимого 23 на сотни делителя 3, имеем в частном 7; по испытании это число окажется велико; уменьшаем его на единицу и, испытавши число 6, увидим, что оно будет искомым частным. Если второй после старшего разряд делителя содержит единиц больше 5, особенно 8 или 9, например если делителем будет число 2976, то его лучше округлить вперед, т. е. взять 3 тысячи, так как 2976 значительно ближе подходит к 3 тысячам, нежели к 2 тысячам; так, при делении $17856:2976$ задаемся 3 тысячами в 17 тысячах; найденное таким путем число может оказаться мало; тогда испытываем число, на единицу большее и т. д.

Итак, деление чисел любой величины приводится к ряду делений многозначного числа на многозначное при однозначном частном, — делений, дающих десятичные группы искомого частного. А каждое из таких делений выполняется делением числа, состоящего из одного или двух старших разрядов делимого, на старший разряд делителя. Иначе сказать, деление чисел любой величины сводится к отысканию однозначного частного при однозначном делителе, причем делимое может быть числом однозначным или двузначным, т. е. сводится к таким делениям, как, например, $8:2$; $20:4$; $72:8$ и т. д. Для того чтобы возможно быстро производить деление чисел любой величины, надо уметь на па-

мать находить однозначные частные при однозначном делителе, т. е. надо знать наизусть так называемую *таблицу деления*.

ТАБЛИЦА ДЕЛЕНИЯ.

1:1=1	2:2=1	3:3=1	4:4=1	5:5=1
2:1=2	4:2=2	6:3=2	8:4=2	10:5=2
3:1=3	6:2=3	9:3=3	12:4=3	15:5=3
4:1=4	8:2=4	12:3=4	16:4=4	20:5=4
5:1=5	10:2=5	15:3=5	20:4=5	25:5=5
6:1=6	12:2=6	18:3=6	24:4=6	30:5=6
7:1=7	14:2=7	21:3=7	28:4=7	35:5=7
8:1=8	16:2=8	24:3=8	32:4=8	40:5=8
9:1=9	18:2=9	27:3=9	36:4=9	45:5=9
6:6=1	7:7=1	8:8=1	9:9=1	
12:6=2	14:7=2	16:8=2	18:9=2	
18:6=3	21:7=3	24:8=3	27:9=3	
24:6=4	28:7=4	32:8=4	36:9=4	
30:6=5	35:7=5	40:8=5	45:9=5	
36:6=6	42:7=6	48:8=6	54:9=6	
42:6=7	49:7=7	56:8=7	63:9=7	
48:6=8	56:7=8	64:8=8	72:9=8	
54:6=9	63:7=9	72:8=9	81:9=9	

Что касается составления таблицы деления или отыскания однозначного частного при однозначном делителе, то оно может быть выполнено каждым из предшествующих трех действий: сложением, вычитанием и умножением. Пусть надо 42 разделить на 7, или узнать, сколько раз 7 содержится в 42; составляем сумму $7+7+7+\dots$, прибавляя по семерке до тех пор, пока не получим 42; сосчитав число семерок, узнаем, сколько раз 7 содержится в 42. Отнимаем от 42 по семерке: $42-7-7-\dots$, пока ничего не останется; сосчитав число семерок, находим искомое частное.

Деление есть действие, обратное умножению. В умножении дается множимое и множитель, отыскивается произведение: $7 \times 5 = ?$ Обратными вопросами будут такие: $? \times 5 = 35$, т. е. какое число надо повторить 5 раз, чтобы получить 35? $7 \times ? = 35$, т. е. сколько раз надо повторить число 7, чтобы получить 35? Эти два вопроса относятся к делению, которое бывает двух видов: деление на части и деление по содержанию. Первый вопрос: $? \times 5 = 35$ — какое число надо повторить 5 раз, чтобы получить 35? — относится к делению на части, так как искомое число есть пятая часть 35, и для нахождения его надо 35 разделить на 5 равных частей. Второй вопрос: $7 \times ? = 35$ — сколько раз надо повторить число 7, чтобы получить 35? — относится к делению по содержанию, так как искомое число показывает, сколько раз число 7 содержится в числе 35, и для отыскания его надо 35 разделить на семерки (а не на 7 равных частей). Деление есть такое действие, которым по данному произведению и одному из сомножителей отыскивается другой сомножитель; если искомый сомножитель есть множимое, то мы имеем деление на части; если искомый сомножитель есть множитель, то имеем деление по содержанию. Так как произведение не изменяется от перестановки множимого и множителя, то оба вопроса, обратные умножению,

могут переходить один в другой, и решение одного из них будет вместе с тем и решением другого при тех же числовых данных: например узнавши, что восьмерка в числе 40 содержится 5 раз, мы узнаем этим, что восьмая часть числа 40 равна 5 единицам; и наоборот: найдя, что четвертая часть числа 28 равна 7 единицам, мы нашли вместе с этим, что четверка содержится 7 раз в числе 28.

Таблица деления является обратной таблице умножения, а потому лучше всего находить табличные частные при помощи таблицы умножения. Зная, что $9 \times 6 = 54$, мы знаем вместе с тем, что $54 : 9 = 6$ и $54 : 6 = 9$. Желая разделить 32 на 8, мы припоминаем по таблице умножения, какое число надо повторить 8 раз или сколько раз надо повторить число 8, чтобы получить 32. Вследствие этого считают иногда излишним составление и изучение особой таблицы деления.

Приведенная на стр. 46 таблица умножения, записанная в форме квадрата, может служить и таблицей деления; например чтобы сделать деление $48 : 6$, берем делителя 6 в верхнем ряду; в столбце, навёрху которого стоит 6, находим, спускаясь вниз, делимое 48; от него идем налево и видим, что наше делимое находится в горизонтальном ряду, начинающемся числом 8, которое и будет искомым частным. Можно также взять делителя 6 в левом столбце, тогда искомое частное найдем в верхнем ряду.

Если таблица деления составляется и усваивается по частям, то результатами, которые уже стали достоянием памяти, можно пользоваться для нахождения других результатов. Пусть, например, мы знаем наизусть таблицу деления в пределах первого десятка, и нам надо 16 разделить на 2; разлагаем 16 на такие группы, которые умеем разделить на память, например на 10 и на 6; полученные от деления этих групп частные складываем. Положим, мы знаем на память таблицу деления в пределах 20, и нам нужно разделить 36 на 4; разбиваем делимое на группы 20 и 16 и складываем частные, полученные от деления этих групп.

Наибольшее число, встречающееся в таблице деления, есть число 81; поэтому можно сказать, что таблица деления заключается в пределах сотни.

Часто приходится пользоваться таблицей деления в таких случаях, когда деление совершается с остатком. Пусть, например, требуется разделить 46 на 6. Ученики, твердо знающие таблицу деления, сразу назовут наибольшее, не превышающее 46, — число 42, которое делится без остатка на 6 и дает в частном 7; а потому, если 46 разделить на 6, то получится в частном 7 и в остатке 4 ($46 - 42 = 4$). Если же ученики не в состоянии сразу указать число 42, то они могут умножать делитель 6 на различные однозначные числа: на 5, на 6 и т. д., до тех пор пока не получат в произведении больше 46; это будет при умножении 6×8 ; тогда они возвратятся к предшествующему умножению $6 \times 7 = 42$.

Для того чтобы применить таблицу деления к делению чисел любой величины, ее надо распространить на сложные единицы.

Сделать это можно путем таких рассуждений: а) если 8 простых единиц, разделенные на 4 равных части, дают в каждой части по 2 простых единицы, то и 8 каких бы то ни было единиц, например 8 сотен, разделенные на 4 равных части, дадут в каждой части по 2 таких же единицы, т. е. по 2 сотни; если при делении 38 простых единиц на 5 равных частей получается в каждой части по 7 простых единиц и при этом 3 простых единицы остаются неразделенными, то и при делении 38 каких бы то ни было единиц, например 38 тысяч, на 5 равных частей будем иметь в каждой части по 7 таких же единиц, т. е. по 7 тысяч, причем останутся неразделенными еще 3 такие же единицы, т. е. 3 тысячи; б) если 6 простых единиц содержатся в 24 простых единицах 4 раза, то и 6 каких бы то ни было единиц, например 6 десятков, содержатся в 24 таких же единицах, в 24 десятках, также 4 раза (если 24 копеечных монеты разложить в кучки, по 6 монет в каждой, то таких кучек будет 4; если 24 гривенника разложить в кучки, по 6 гривенников в каждой, то кучек выйдет тоже 4); если 45 простых единиц разделить на группы, по 7 единиц в каждой, то таких групп будет 6, причем от делимого останется 3 простых единицы, не составивших полной группы; если 45 каких бы то ни было единиц, например 45 сотен, разделить на группы, по 7 таких единиц — по 7 сотен — в каждой, то таких групп выйдет тоже 6, и от делимого останется 3 его единицы, 3 сотни, которые не составят полной группы.

Подведем итог сделанному нами обзору арифметических действий.

Арифметические действия берут свое начало в счете до десяти.

Прямой счет до десяти состоит 1) в твердом знании восходящего порядка числительных: один, два, три ... десять и 2) в умении применять этот порядок к определению количества предметов, относя каждое числительное к соответствующей группе предметов. Счет словесный должен быть соединен со счетом предметным.

Обратный счет состоит в твердом знании нисходящего порядка числительных: десять, девять, восемь ... один, при наличии умения применять этот порядок на практике.

Прямой счет дает начало понятию о сложении: считая, мы присоединяем, или прибавляем, по единице сначала к одной единице, потом к двум, трем и т. д., хотя мысль о сложении сознается нами при этом, может быть, не совсем ясно. Представляя видоизменение счета, сложение может быть отлечено от него следующим образом. Вообразим себе, что мы соединяем (действительно или мысленно) две группы предметов в одну и желаем узнать, сколько предметов будет в составленной группе. Для этого мы можем сосчитать предметы составленной группы: один, два, три и т. д. Это будет счет. Но можем поступить несколько иначе: сосчитаем сначала, сколько предметов находится в каждой группе отдельно; тогда мы получим два числа, например пять и четыре; затем станем уже не *сосчитывать* пред-

метры обеих групп вместе, а *присчитывать* к одной группе другую: пять да один — шесть, шесть да один — семь, семь да один — восемь, восемь да один — девять. Таким образом, производя счет, мы сосчитываем единицы *одного и того же* числа (предметы одной и той же группы), начиная при этом с одной единицы; делая сложение, мы считаем, сколько единиц в *двух* числах, начиная не с одной, а со столькоких единиц, сколько их находится в одном из этих чисел; здесь уже вполне отчетливо выступает мысль о соединении, или прибавлении.

Итак, понятие о сложении вытекает из понятия о счете, а видоизменение счета — присчитывание по единице — служит первоначальным приемом сложения. В таком же отношении к вычитанию находится обратный счет.

Прием присчитывания и отсчитывания по единице применяется к составлению таблиц сложения и вычитания в пределах первого десятка, например при сложении $5 + 4$ и вычитании $8 - 3$. За пределом десяти непосредственный счет уже не имеет места: табличное сложение и вычитание совершаются при посредстве десятка на основании твердого знания таблиц этих действий в пределах десяти: $8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5$; $14 - 6 = 14 - 4 - 2 = 10 - 2$.

Отсюда можно видеть, какое значение имеет область первого десятка для изучения действий.

Усвоение таблиц сложения и вычитания дает возможность изучить сложение и вычитание в пределах сотни, как, например, $35 + 7$, $24 + 18$, $42 - 6$, $54 - 18$. Уменьше производить в этих пределах сложение и вычитание, а особенно сложение, требуется для последующего изучения таблиц умножения и деления.

При помощи сложения составляется таблица умножения, а затем при помощи таблицы умножения и таблица деления, причем к нахождению результатов табличного деления, кроме умножения, могут быть применены также сложение и вычитание.

В дальнейшем, за пределом сотни — а для сложения и вычитания и в пределах сотни — при выполнении каждого из четырех действий данные числа разлагаются на группы, иногда на десятичные, иногда на иные: в действиях прямых — сложении и умножении — происходит всегда разложение на группы десятичные, а в действиях обратных — вычитании и делении — уменьшаемое и делимое часто разлагаются на иные группы; например при вычитании $635 - 287$ уменьшаемое разлагается на группы 5 сотен, 12 десятков и 15 единиц; при делении $936 : 4$ делимое разлагается на группы 8 сотен, 12 десятков и 16 единиц. Действия над данными числами приводятся к действиям над теми группами, на которые разложены данные числа. А действия над этими группами сводятся к таблицам действий. Для возможно быстрого выполнения действий таблицы действий надо знать наизусть. Таблицы действий являются, таким образом, теми элементами вычисления, которые должны быть усвоены памятью.

Ввиду громадного значения, которое имеют таблицы действий для практики вычисления, — при концентрическом расположении учебного материала, — является необходимым выделить

ту область чисел, в пределах которой изучаются эти таблицы. Область эта — первая сотня, так как таблицы действий заключены в пределах ста.

Итак, одним из концентрв начального курса арифметики должен быть отдел „первая сотня“¹.

В частности, таблицы двух первых действий — таблицы сложения и вычитания — содержатся в пределах двух десятков. Поэтому в целях изучения таблиц сложения и вычитания в области сотни следует сделать подразделение, а именно выделить из нее первые два десятка.

Таким образом, одним из концентрв начального курса арифметики должен быть отдел „первые два десятка“.

Рассмотрев учебный материал арифметики со стороны изучения нумерации, мы пришли к необходимости или желательности образования таких концентрических отделов: „первый десяток“, „круглые десятки до ста“ и „первая тысяча.“ Рассмотрение материала со стороны изучения действий привело нас к отделам: „первая сотня“ и „первые два десятка“. Вместе с тем мы видели здесь подтверждение необходимости концентрв „первый десяток“.

В дальнейшем подразделении курса не встречается надобности.

За областью первой тысячи можно поставить отдел „числа любой величины“, подразумевая под числами любой величины числа не выше первых трех классов по трехразрядной системе, т. е. не выше сотен миллионов.

Вычисления с составными именованными числами — раздробление, превращение и четыре действия, — не составляя особого отдела, могут быть распределены по всем концентрвм курса.

Элементарные сведения о простейших дробях также должны быть размещены по различным отделам курса начальной арифметики.

Порядок выделенных нами концентрв определяется их объемом. Может лишь возникнуть вопрос о последовательности отделов „первые два десятка“ и „круглые десятки до ста“. С одной стороны, отдел круглых десятков является повторением того, что пройдено в отделе „первый десяток“, повторением на десятках того, что пройдено раньше на единицах. С этой точки зрения круглые десятки до ста должны быть поставлены тотчас после первого десятка и, следовательно, перед двумя десятками. С другой стороны, отдел круглых десятков, давая понятие о сложной единице, служит введением в область первой сотни. С этой точки зрения круглые десятки должны быть поставлены непосредственно перед отделом первой сотни и, следовательно, после отдела первых двух десятков. Мы предпочли этот последний порядок.

¹ Обратим внимание на то, что при попытках создать приемы обучения начальной арифметике именно первая сотня была тем отделом, который выделен из неограниченной области чисел. Мы видим это у Песталоцци, потом у Грубе, Евтушевского. Но там причины выделения сотни были иные, нежели те, которые мы привели здесь.

Таким образом, учебный материал курса начальной арифметики располагается следующими концентрическими отделами: 1) *первый десяток*, 2) *первые два десятка*, 3) *круглые десятки до ста*, 4) *первая сотня*, 5) *первая тысяча*, 6) *числа любой величины*.

Рассмотрим подробнее, чем характеризуется каждый из этих отделов, и какие познания должны быть приобретены изучением каждого из них.

1. Первый десяток. По отношению к нумерации отдел этот характеризуется отсутствием понятия о сложной единице и о местном значении цифр: каждое число первого десятка, представляя собой только группу простых единиц (точно так же рассматривается здесь и десяток), имеет особое название (не составленное из названий других чисел) и изображается особым знаком (обозначение 10 указывается здесь без всяких пояснений о местном значении цифр и нуля). По отношению к действиям особенность этого отдела та, что все действия выполняются тут не по правилам (при которых числа разлагаются на десятичные группы), но сначала — сложение и вычитание — путем присчитывания и отсчитывания по единице, а потом на основании уже усвоенных памятью результатов: умножение при помощи сложения, деление при помощи сложения, вычитания и умножения. По изучении этого отдела должны быть усвоены на память: половина всей таблицы сложения, половина таблицы вычитания, небольшая часть таблицы умножения и небольшая часть таблицы деления, заключенные в пределах десяти¹.

Проходя этот отдел, дети научаются правильно называть числа первого десятка в восходящем и нисходящем порядке и вести прямой и обратный счет на предметах; изучают цифры; знакомятся с понятиями „прибавить“, „отнять“, „повторить“, „разделить“, „сколько раз содержится“ и с приемами выполнения действий, выражаемых этими словами; научаются обозначать действия знаками и применять их к решению практических вопросов-задач.

2. Первые два десятка. Главная цель этого отдела — закончить таблицы сложения и вычитания, половина которых уже знакома ученикам после изучения первого отдела. Вторая половина таблиц сложения и вычитания составляется, как было упомянуто раньше, на основании твердого знания половины этих таблиц, заключенной в пределах первого десятка. Так, например, сложение $7 + 5$ мы производим, сразу дополняя 7 до 10 прибавлением 3 и затем придавая к 10 остальные 2 единицы; чтобы сделать вычитание $15 - 8$, отнимаем от числа 15 его 5 единиц и потом из 10 сразу вычитаем остальные 3 единицы.

¹ Новейшие методические течения относят первое знакомство с умножением и делением ко второму десятку, оставляя в пределах первого десятка изучение только сложения и вычитания; такой порядок изучения действий, принятый и в программе советской начальной школы, нужно считать наиболее целесообразным. Редакция.

Затем в этом отделе имеют место и внетабличные случаи сложения и вычитания, как, например, $12 + 5$, $16 + 4$, $3 + 15$, $7 + 13$, $17 - 4$, $20 - 8$, $19 - 15$, $20 - 17$. Здесь уже приходится данные числа разлагать на десяток и на единицы, а потому такие случаи внетабличного сложения и вычитания уже намечают пользование десятичным составом чисел и служат подготовкой к приемам сложения и вычитания в пределах сотни.

Сложение и вычитание в пределах таблиц и вне их дают возможность подвинуть далее и таблицы умножения и деления.

Рассматриваемый концентр делает шаг вперед и в изучении нумерации. Правда, здесь нельзя дать понятия о десятке, как о сложной единице: десяток является здесь или один или в соединении только с другим десятком — счет десятками тут не производится, а это необходимо для того, чтобы дети могли смотреть на десяток как на счетную единицу. Но все же здесь происходит выделение десятка как группы, к которой присоединяются первые девять единиц. При письменном обозначении таких чисел уже намечается местное значение цифр: десяток пишется слева — на втором месте, единицы справа — на первом месте.

Заметим, что в пределе от десяти до двадцати имеют место имена числительные, представляющие ту особенность, что название единиц предшествует в них названию десятка и сливается с ним в одно слово: одиннадцать, двенадцать и т. д.

3. Круглые десятки до ста. Главная цель этого отдела 1) приучить детей смотреть на десяток как на *единицу*, что весьма важно для последующего усвоения понятия о сложных единицах и о десятичном составе чисел, и 2) развить дальше уже намеченное понятие о местном значении цифр в связи с понятием о сложной единице: десятки пишутся на втором справа месте, единицы — на первом; если единиц нет, их место должно быть отмечено нулем.

В смысле приемов вычисления этот отдел ничего нового не дает; здесь повторяется на десятках лишь то, что пройдено было на единицах в пределах десяти: к 5 прибавить 3, будет 8; к 5 десяткам прибавить 3 десятка, будет 8 десятков, или к пятидесяти прибавить тридцать, будет восемьдесят: $50 + 30 = 80$. И т. д.

4. Первая сотня. Главной целью этого отдела служит изучение таблиц умножения и деления, небольшая часть которых пройдена в первых двух отделах. Намеченные во втором отделе приемы сложения и вычитания, при которых данные числа разбивались на десяток и на единицы, получают здесь дальнейшее развитие в применении к сложению двузначного числа с двузначным и к вычитанию двузначного числа из двузначного. Овладев приемами сложения и вычитания в пределе сотни, дети продолжают и заканчивают составление и изучение таблиц умножения и деления.

Кроме табличного умножения и деления, в пределах сотни имеют место также случаи внетабличного умножения двузначного числа на однозначное и обратно и внетабличного деления двузначного числа на однозначное и двузначного на двузначное, как, например, 24×4 , 3×32 ; $72 : 2$, $84 : 21$. Такие умножения и деле-

ния служат подготовкой к приемам умножения и деления в дальнейшей области чисел.

Более полное развитие получает в этом отделе и нумерация. В пределах 20, как сказано выше, не могло быть дано понятие о десятке как о счетной единице, так как там не имел места счет десятками; это понятие уяснено в отделе круглых десятков; но здесь дети имели дело с числами, состоящими только из десятков, при отсутствии простых единиц. В отделе сотни уже явно выступает десятичный состав чисел: появляются числа, состоящие из счетных единиц двух разрядов, из десятков и простых единиц, наличность которых ведет к дальнейшему уяснению местного значения цифр.

Арифметика первой сотни представляет собой как бы отражение, в уменьшенном виде, всего курса начальной арифметики в его главных чертах, чего нельзя сказать ни об одном из предшествующих отделов. В самом деле, пройдя арифметику первой сотни, ученики а) получают понятия об единицах разных порядков — о простой единице и десятке — и о местном значении цифр; а в этих понятиях и заключается сущность нумерации; б) усваивают таблицы всех действий, т. е. те элементы вычисления, которые должны быть удержаны памятью; в) знакомятся с такими приемами внетабличного выполнения действий, которые основаны на пользовании десятичным составом чисел и от которых потом легко перейти к правилам производства действий над числами любой величины. Все эти сведения приобретаются в теснейшей связи с уяснением значения каждого действия в смысле применения его к различного рода вопросам-задачам и прилагаются к решению задач, требующих выполнения одного и нескольких действий.

5. Первая тысяча. Говоря выше о причинах выделения первой тысячи, мы указали вместе с тем и цель, которая должна быть достигнута изучением этого отдела: это — подготовка к нумерации чисел любой величины, которая при трехразрядной классификации сводится к нумерации первого класса, т. е. чисел первой тысячи.

На область первой тысячи легко распространяются приемы выполнения четырех действий, уже знакомые детям по изучению первой сотни.

6. Числа любой величины. После прочного усвоения нумерации и приемов вычисления в пределе тысячи изучение нумерации чисел любой величины и вывод правил действий над такими числами являются делом весьма нетрудным.

Здесь придется обратить особенное внимание на правильное, аккуратное и возможно изящное расположение записей как при отдельных действиях, так и при выполнении ряда действий, необходимых для решения задач.

Как было сказано выше, вычисления с именованными числами, простыми и составными, — раздробление, превращение и четыре действия, — не образуя особого отдела, размещаются в разных концентрсах курса. Здесь, в отделе чисел любой величины, допол-

няются, расширяются и приводятся в систему те сведения о составных именованных числах, которые приобретены учениками при изучении предшествующих отделов.

Сведения о дробях. Элементарные сведения о простейших и наиболее употребительных в жизни дробях, знаменатели которых не превышают десяти, распределяются по разным отделам курса.

Понятие об *одной* доле и письменное обозначение ее впервые дается при изучении деления в пределе 20, т. е. во втором отделе. Здесь же даются упражнения в нахождении *одной* части целого числа.

В области первой сотни, в подготовительных к таблице умножения упражнениях, состоящих в счете равными однозначными группами, поставлено отыскание числа по *одной* его части (5 составляет $\frac{1}{8}$ какого числа?). В отделе первой сотни помещены сложение и вычитание одинаковых долей, т. е. дробей с одинаковыми знаменателями, а затем нахождение нескольких частей целого числа (сколько сантиметров содержит $\frac{3}{4}$ метра?) и отыскание целого числа по *нескольким* данным частям его (18 составляет $\frac{2}{3}$ какого числа?).

В отделе первой тысячи помещены сложение и вычитание разных долей (дробей с разными знаменателями), но лишь таких, из которых одни могут быть выражены в других, например половин и четвертей, третей и шестых, половин и десятых и т. п.

К области чисел любой величины отнесены: умножение дроби на целое число и целого числа на дробь в смысле отыскания частей этого целого числа; деление дроби на целое число, деление целого числа на дробь в смысле нахождения числа по данным частям его; деление целого, а также дробного числа на дробь в смысле определения содержания одного числа в другом¹.

§ 9. Наглядность обучения и наглядные пособия.

Обучение отнюдь не должно состоять в сообщении детям готовых понятий: это было бы лишь словесное обучение, при котором сообщаемые понятия являлись бы преимущественно словами, мало говорящими сознанию. Понятия должны быть выработаны из представлений, а представления приобретаются при помощи органов чувств.

Фундамент, на котором надо строить начальное обучение вообще, а обучение арифметике в частности, это — наблюдение и опыт. Будучи на первых порах наглядным, обучение арифметике должно постепенно вести детей от наглядного к отвлеченному, от частного к общему. Только при этом условии обучение арифметике даст детям прочные познания и принесет пользу делу общего развития учащихся.

¹ Для начальной школы курс дробей, намеченный автором, слишком велик, и в дореволюционной начальной школе фактически он не проводился. Редакция.

Наглядные пособия, употребляемые при обучении арифметике, могут быть разделены на две группы: а) естественные пособия, которыми служат предметы и явления окружающего мира, и б) искусственные пособия, как, например, палочки, кубики, счеты и т. д.

Естественные наглядные пособия служат для наблюдения предметов со стороны количественного соотношения между ними, причем наблюдение бывает прямым и косвенным. Прямому (непосредственному, внешнему) наблюдению подлежат предметы тогда, когда они находятся перед глазами, как, например, предметы классной обстановки (сколько в классе столов, шкапов, сколько картин висит на одной стене, на другой, на обеих). Наблюдение косвенное (наблюдение по памяти) относится к таким предметам, которых в данный момент перед глазами нет, но которые неоднократно были наблюдаемы раньше, а потому хорошо знакомы детям, например когда в классе идет речь о предметах домашней обстановки и домашнего быта (сколько у кого братьев, сестер, сколько в доме комнат, сколько овец держит отец, сколько коров и т. д.). Материалом прикладных задач и должны служить именно такие предметы и явления, которые доступны иногда непосредственному, а большей частью косвенному наблюдению, т. е. предметы и явления, хорошо знакомые детям.

Среди искусственных пособий, иногда простых, иногда более или менее сложных, следует обратить внимание на самодельные пособия, т. е. такие, которые изготовляются самими учениками, как, например, палочки, чертежи, рисунки, вырезаемые из бумаги фигуры, таблицы и т. д. Изготовление пособий учащимися содействует развитию в них самостоятельности и поднятию интереса к учению.

Укажем наиболее употребительные при обучении арифметике наглядные пособия.

1) Пальцы служат весьма удобным и целесообразным пособием при изучении прямого счета до десяти и обратного счета от десяти, а затем при сложении и вычитании в пределах первого десятка. Заметим, что наша десятичная система счисления обязана, как полагают, своим происхождением пользованию при счете пальцами обеих рук.

2) Палочки. Палочки, числом десять, величиной подходящие, приблизительно, к размерам круглого карандаша, могут служить для тех же целей, как и пальцы. Кроме того, палочки можно удобно соединять равными группами и разлагать на равные группы и таким образом наглядно представить на них умножение и деление в пределах десяти. Пособие это может изготовить для себя каждый из учеников.

3) Солома. Так называются тонкие, наподобие спичек или соломы, прутики длиной около 3 дециметров. Таких прутиков полезно иметь от 700 до 800. На этом пособии очень хорошо выясняется нумерация за пределом десяти и в пределах тысячи. Чтобы пересчитать груды таких прутиков, дети считают их до десяти и связывают каждые десять прутиков в пучки; затем счи-

тают пучки — десятки — совершенно так же, как считали прутики — простые единицы; каждые десять пучков связывают в большие пучки (связки). Чтобы узнать число всех прутиков, надо сосчитать, сколько получено связок (сотен), сколько осталось пучков (десятков), не составивших полной связки, и сколько осталось прутиков (простых единиц), не составивших полного пучка. Так может быть наглядно объяснена нумерация от 100 до 1000, а раньше этого — нумерация до 100, нумерация круглых десятков и даже нумерация от 10 до 20.

4) **Арифметический ящик.** Он заключает в себе: 1) 100 отдельных кубиков; 2) 30 или 40 брусков, из которых каждый представляет собой как бы 10 кубиков, сложенных в ряд, что и обозначается иногда сделанными на брусках надрезами; 3) 6 или 5 квадратных досок, длина и ширина которых равна длине бруска, а толщина — ребру кубика; доска представляет собой 10 соединенных вместе брусков, или 100 кубиков.

Кубики, числом не более десяти, могут быть использованы так же, как и палочки, при изучении счета и всех действий в пределах первого десятка. Кубики могут быть употребляемы в этих случаях и одновременно с палочками:

то, что один из учеников (по очереди) проделывает на кубиках, выставленных на планке классной доски, то остальные делают на своих палочках.

Содержимое арифметического ящика можно применить и к изучению нумерации за пределом десяти и в пределах тысячи: кубики будут изображать простые единицы, бруски — десятки и доски — сотни. Но самый процесс образования сложных единиц нагляднее уясняется при помощи соломы: там пучок — десяток — действительно составляется из десяти прутиков, связка — сотня — действительно составляется из десяти пучков; здесь же десять кубиков не переходят в брусок на самом деле, а лишь заменяются им условно: доска только условно служит изображением десяти брусков. Но раз при помощи соломы наглядно показан процесс образования сложных единиц, в дальнейшем, при упражнениях в нумерации, удобнее пользоваться кубиками, брусками и досками арифметического ящика, нежели прутиками, пучками

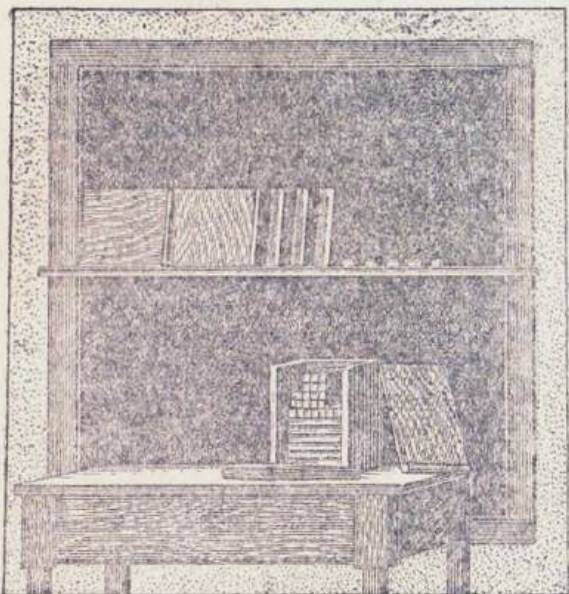


Рис. 4.

по десяти и связками по сто прутиков. На рис. 4 показано, как при помощи досок, брусков и кубиков изобразить число 235.

5) **Счеты.** Счетные приборы бывают различного устройства.

а) *Русские торговые счеты.* Этот прибор имеет скорее самостоятельное, чем служебное значение: он назначен для того, чтобы производить инструментально действия — главным образом сложение и вычитание — над отвлеченными и преимущественно именованными числами, выраженными в рублях и копейках. На каждую из проволок счетов, кроме двух проволок, надето по 10 шариков (косточек). Шарика эти, считая порядок проволок снизу вверх, означают: каждый шарик первой проволоки — копейку, шарик второй проволоки — гривенник, шарик третьей проволоки — рубль, шарик четвертой проволоки — десяток рублей и т. д. Шарика окрашиваются обыкновенно в желтый цвет; средние два шарика делаются черными — для наглядного различия пятков. Проволоки, находящиеся под проволоками копеек и рублей (нижняя и четвертая снизу), имеют каждая только по четыре шарика: шарик первый из них означает $\frac{1}{4}$ копейки, шарик второй — $\frac{1}{4}$ рубля (четвертак). Проволоки наглухо вделаны в рамку счетов. Применяя счеты к числам отвлеченным, надо класть простые единицы на проволоке рублей, десятки — на проволоке десятков рублей и т. д.

Выкладки на торговых счетах (сложение и вычитание) не стоят особняком от приемов устного или письменного вычисления, но могут прекрасно иллюстрировать эти приемы и тем содействовать пониманию их сущности. В этом смысле торговые счеты можно рассматривать как наглядное пособие при изучении сложения и вычитания.

Примечание. Сложение и вычитание на счетах отличаются от приемов устного или письменного выполнения этих действий в тех случаях, когда сложение совершается с превращением складываемых единиц, а вычитание с раздроблением единицы следующего высшего разряда; при письменном или устном вычислении мы пользуемся в таких случаях знанием наизусть таблиц сложения и вычитания: $8 + 7 = 15$; $12 - 7 = 5$; а при вычислении на счетах здесь употребляется прием округления чисел: если на какой-либо проволоке положено 8 шариков и надо положить еще 7, кладем шарик на следующей верхней проволоке (кладем 10) и скидываем 3 шарика с той проволоки, на которой нельзя было положить 7 шариков; если на какой-либо проволоке положено 2 шарика и надо сбросить с нее 7 шариков, сбрасываем шарик со следующей верхней проволоки (сбрасываем 10) и кладем еще 3 шарика на той проволоке, с которой нельзя было скинуть 7 шариков. Таким образом, выкладки на счетах требуют от памяти лишь умения дополнять однозначное число до десяти; все же остальные результаты получаются на самих счетах — инструментально.

Ручные торговые счеты должны быть в школе в таком количестве экземпляров, чтобы можно было раздать их всем ученикам класса. Кроме ручных счетов полезно иметь экземпляр классных счетов, прибор значительно больших размеров, который вешается на стену или на классную доску. За неимением такого прибора к торговым счетам могут быть приспособлены шведские счеты.

б) *Шведские счеты*. Это — классный прибор, рамка которого устанавливается на полу (рис. 5); проволоки вделаны в рамку так, что их можно вынимать и надевать на них различное число шариков; все шарики имеют одинаковую светлую окраску.

Таковыми счетами можно прежде всего пользоваться в тех же случаях, в каких употребляются палочки и кубики, т. е. при изучении счета и действий в пределе первого десятка.

Далее, счеты служат прекрасным пособием при изучении письменной нумерации, начиная с предела от 10 до 20 и кончая областью чисел любой величины. При прохождении устной нумерации процесс образования сложных единиц наглядно показы-

вается детям при помощи так называемой соломы: прутики связываются в пучки — десятки, из пучков образуются связки — сотни; в дальнейшем, при упражнениях в устной нумерации, более удобно пользоваться содержащим арифметического ящика: кубиками, брусками и досками. Счеты не дают наглядного представления о сравнительной величине счетных единиц, как это делают прутики, пучки по десять и связки по сто прутиков или кубики, бруски и доски: совершенно одинаковые шарики изображают каждую из счетных единиц. Но при ознакомлении с письменной нумерацией этого и не надо: назначение наглядного пособия состоит здесь в том, чтобы уяснить местное значение цифр и нуля; это назначение и выполняют счеты. Как шарики, совершенно одинаковые, означают сотни, десятки и единицы, смотря

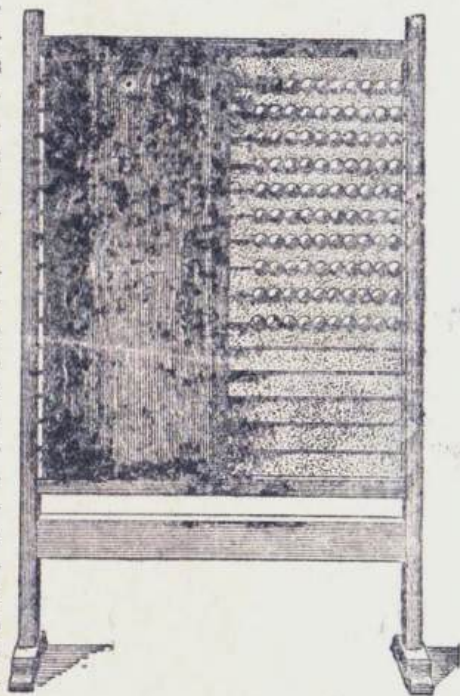


Рис. 5.

по тому, на которой проволоке они положены, так одна и та же цифра означает сотни, десятки и единицы в зависимости от того, на каком месте она написана; если в числе нет единиц какого-либо разряда, то проволока, назначенная для этих единиц, остается пустой (т. е. на ней не кладется шариков), а при письменном обозначении на месте этих единиц ставится нуль.

Некоторое несоответствие между обозначением чисел на счетах и на письме заключается в том, что на счетах единицы высших разрядов помещаются *над* единицами разрядов низших, а при письме — *влево* от них. Это несоответствие может быть устранено следующим приспособлением: в верхнем бруске рамы шведских счетов укрепляется ряд вертикальных проволок, на которые и надеваются шарики, означающие единицы различных разрядов. Но работать на таком приспособлении — надевать и

снимать шарики — довольно затруднительно и долго. На рис. 6 изображен весьма удобный прибор, заменяющий такие вертикальные проволоки. Прибор этот состоит из девяти проволок, согнутых в виде дуг и укрепленных вертикально на подставке. Между ветвями дуг пропущена деревянная дощечка, скрывающая задние половины дуг, когда они обращены к нам передними половинами. На каждой дуге надето 9 шариков, которые легко перебрасываются с одной ветви дуги на другую. Между каждыми тремя дугами оставлены заметные промежутки. Три дуги справа назначены для единиц первого класса: простых единиц, десятков и сотен; средние три проволоки относятся к классу тысяч: тысячи, десятки тысяч и сотни тысяч; на левых трех проволоках изображается класс миллионов. В ящике, вделанном в подставку, хранятся подвижные цифры, напечатанные на карточках. Этими

цифрами, расставляемыми на наклонной дощечке, помещенной внизу проволок, можно печатать изображаемое на шариках число.

в) *Счеты Шнейдера*. Устройство и употребление этих счетов с вращающимися двухцветными шариками указано в гл. I на стр. 26.

г) *Дробные счета*. Эти счета, назначенные для изуче-

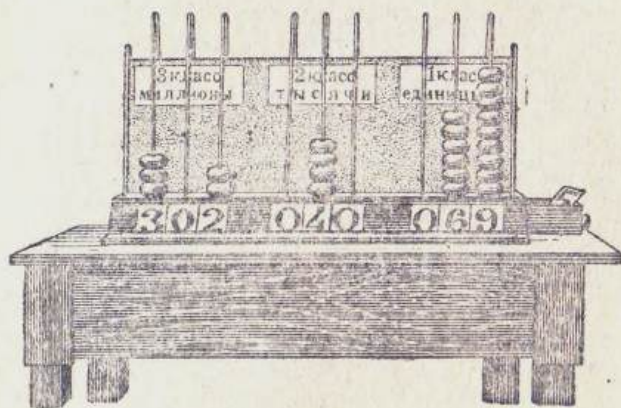


Рис. 6.

ния дробей, отличаются от шведских счетов тем, что на проволоках их вместо шаров надеты узкие подвижные цилиндрики — валики; на верхней проволоке валик целый, на других валики распилены на различное число равных частей для изображения наиболее употребительных долей (рис. 7).

Проволоки вынимаются из рамки, благодаря чему на соседних проволоках можно поместить любые из имеющихся долей, что бывает удобно при сравнении их между собой. Валик делается обыкновенно длиной в 3 дм.

На рис. 5 и 7 изображен прибор, совмещающий в себе и шведские и дробные счета: на проволоках по одной стороне надеты шарики, по другой стороне — валики; движущаяся в пазах дверца может закрыть любую половину прибора и сделать из него шведские или дробные счета. Дверца эта окрашена черной краской и представляет собой классную доску небольших размеров.

Весьма хорошим пособием при изучении простейших дробей служат чертежи, на которых единица изображается прямой линией: разделив прямую линию на равные части и отметив несколько таких частей, будем иметь изображение дроби.

6) Числовые фигуры. Не признавая за этим пособием того значения, какое придают ему Лай, Беетц и другие сторонники числовых фигур, мы полагаем, однако, что пособие это с пользой может быть употребляемо на первых ступенях обучения.

На рис. 8 изображено знаками (кружками) число семь сначала в виде числовой фигуры, а потом непрерывным рядом. Числовая фигура изображает число нагляднее, нежели непрерывный ряд. И вот почему: в случае непрерывного ряда мы воспринимаем значки по одному, на что требуется некоторое время, а число значков фигуры мы определяем группами, такими, какие доступны мгновенному восприятию, т. е. не превышающими трех значков: три налево, три направо — это шесть, да один в середине — всего семь. Но предположим, — а это мы должны сделать по отношению к детям, только что приступающим к изучению арифметики, — что ребенок считать группами — двойками и тройками — не умеет; тогда для определения числа значков как в числовой фигуре, так и в непрерывном ряду он должен в обоих случаях считать значки по одному. Но как часто ни приходилось бы ребенку пересчитывать значки одного и того же ряда, всякий раз при встрече с таким же рядом он должен снова производить счет, так как ряд своей внешней формой ничего не говорит о точном числе значков (судить об этом по

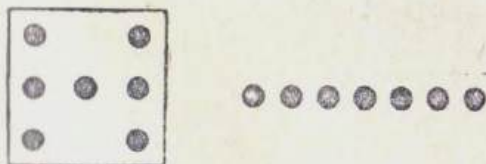


Рис. 8.

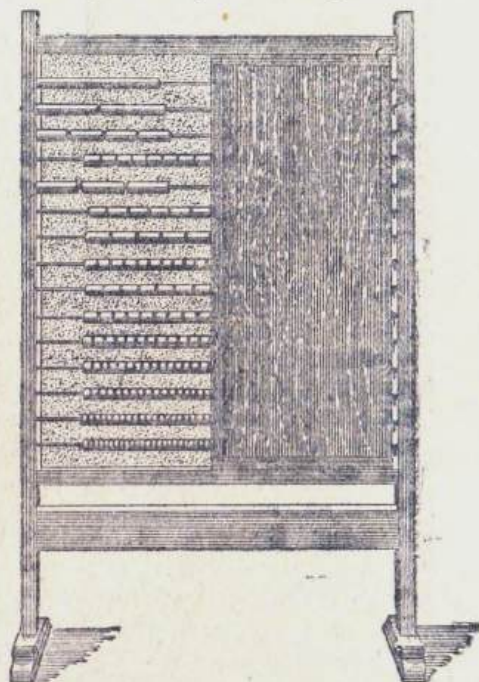


Рис. 7.

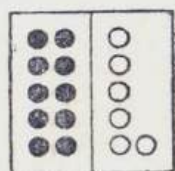
длине одиноко стоящего ряда невозможно). Другое дело будет в случае числовой фигуры. Пересчитав значки фигуры (может быть, для этого мало однократного опыта), ребенок при дальнейших встречах с этой фигурой, не прибегая к счету,

сразу узнает число значков: ему скажет об этом удержанная памятью форма фигуры¹. Хотя в данном случае число значков и

¹ Известно, что взрослые, играя в карты, не сосчитывают так или иначе числа очков, а узнают карту, например восьмерку, по ее форме. Иногда дети, даже дошкольного возраста, не умеющие считать, играют в домино, находя нужную косточку по образуемой очками фигуре.

не воспринимается, а узнается только по форме, все же фигура будет наглядным изображением числа, а не условным его обозначением, каким служит цифра: числовая фигура всегда дает возможность сделать проверку путем определения числа значков.

Числовые фигуры можно ввести с самого начала обучения, при изучении счета, изображая ими последовательные числа до десяти.



1 6
Рис. 9.

Такие фигуры по намеченной сетке учитель рисует на классной доске или изображает их бумажными кружками, прикалываемыми к доске кнопками. Ученики рисуют фигуры в уменьшенном виде в своих тетрадях, разлинованных клетками.

Черчение числовых фигур может иметь место при упражнениях в письме цифр, соединяя наглядное изображение числа с его условным знаком — цифрой.

Числовыми фигурами можно воспользоваться при изучении действий в пределах первого десятка. Например когда выполнено сложение $4 + 3 = 7$ на палочках или кубиках, шариках счетов, полезно в целях лучшего усвоения показать результат и данные на числовой фигуре 7, разделив эту фигуру (например линейкой) на части 4 и 3.

Числовые фигуры весьма уместны при изучении нумерации чисел второго десятка. Здесь числовая фигура состоит из двух клеток: в левой клетке черными кружками изображен десяток в виде двух пятков, расположенных вертикальными рядами; в правой клетке белыми кружками изображены простые единицы (рис. 9).

Подобные же фигуры могут служить для наглядного уяснения приемов табличного сложения и вычитания в пределах от 10 до 20. На рис. 10 изображена числовая фигура, показывающая процесс сложения $8 + 6$ или вычитания $14 - 6$. Первое слагаемое 8 изображено в левой клетке черными кружками; второе слагаемое 6 изображено белыми кружками, находящимися в обеих клетках. Фигура наглядно показывает сумму 14 и процесс получения этой суммы: 8 черных кружков дополняются до десяти 2 белыми кружками; остальные 4 белых кружка будут при десятке простыми единицами. Подобным образом фигура эта служит и для вычитания $14 - 6$: она наглядно показывает уменьшаемое 14 (вся фигура), вычитаемое 6 (белые кружки), искомую разность 8 (черные кружки) и процесс получения этой разности: откинуть 4 белых кружка правой клетки (простые единицы уменьшаемого 14), а затем от полного десятика отнять остальные 2 белых кружка.

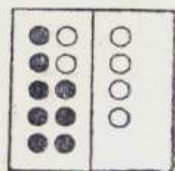


Рис. 10.

7) Картины. Существуют в продаже картины, назначенные для изучения отдельных чисел первого десятка. Но и не следуя методу изучения чисел, можно пользоваться такими картинами при изучении действий в пределах десяти так же, как это было показано относительно числовых фигур.

На рисунке 11 изображена картина, назначенная для изучения числа четыре. Центральное место картины занимают рисунок лошади, изображение числа четыре поставленными в ряд кружками и письменная цифра 4. На полях картины мы видим рисунок стула, тележки, четырех колокольчиков, бубенчиков, подков, пряжек. Здесь же изображены посредством кружков разложения числа четыре на составные части. В верхних углах картины помещены: цифра 4, составленная из четырех черточек, и печатная цифра 4.

Картина эта может быть показана детям после того, как на наглядных пособиях — палочках, кубиках и пр. — добыты результаты сложения: $3 + 1$, $2 + 2$, $1 + 3$, вычитания: $4 - 1$, $4 - 2$, $4 - 3$, умножения: 2×2 , деления: $4 : 2$. Картина может содейство-

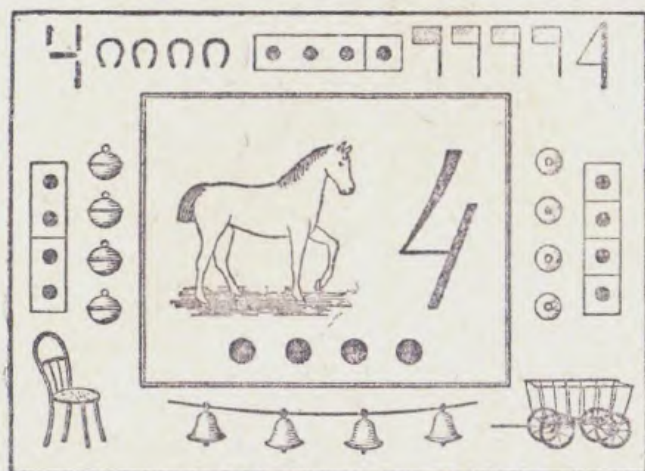


Рис. 11.

вать усвоению этих результатов. По картине можно поставить, например, такие вопросы. Сколько ног у лошади? Сколько передних ног, сколько задних? Сколько будет два да два? Сколько ног приподняла лошадь? Сколькими ногами стоит она на земле? От четырех отнять один, сколько останется? И т. п.

В целях арифметических, кроме специально для этого назначенных картин, могут быть использованы и многие другие картины, например из тех, которые употребляются при объяснительном чтении. Группируя изображенные предметы, заставляя предметы исчезать и вновь появляться, можно составить по картинке ряд задач на различные действия.

Картины являются, таким образом, некоторой заменой естественных наглядных пособий, каковыми служат предметы и явления окружающего мира, наблюдаемые со стороны количественного соотношения между ними.

б) Образцы мер. В течение всего курса при решении задач дети постоянно встречаются с различными мерами. Следует стремиться к тому, чтобы с названием какой-либо меры у детей связывалось достаточно ясное о ней представление. А для этого

надо время от времени показывать ученикам образцы мер и производить с учениками такие измерения, какие могут быть сделаны в классе, на школьном дворе, огороде. При ознакомлении с мерами длины следует указать на соответствие некоторых из этих мер размерам частей человеческого тела. Дети должны проделать несколько измерений линейными мерами. Полезно развить в детях некоторый навык в измерении линейных протяжений на-глаз. Дети должны видеть монеты и кредитные билеты. Из других мер надо показать сосуды для измерения жидких и сыпучих тел—литр, полулитровую кружку, меры веса—гири; если можно достать весы, то полезно сделать в классе несколько примеров взвешивания. При ознакомлении с мерами времени желательно иметь модель часов—циферблат с подвижными стрелками.

Повторяем: такое изучение различных мер, сопровождаемое показыванием образцов этих мер и практическим применением их к измерению, не составляет особого отдела—оно должно быть распределено по всему курсу и проводимо по всем годам обучения.

§ 10. Форма обучения.

Есть две главные формы обучения: 1) излагательная, или акроаматическая, и 2) вопросо-ответная, или катехизическая. Первая—монологическая—заключается в том, что учитель излагает, а ученики слушают (слово „acroаматическая“ происходит от греческого глагола „слушать“); слышанное усваивают при помощи книги и потом отвечают учителю как заданный урок. Катехизическая форма—диалогическая—состоит в беседе учителя с учениками, которые отвечают учителю на задаваемые им вопросы.

Катехизация может быть двух родов: а) катехизация повторительная, когда ученики по отдельным вопросам учителя отвечают то, что им было сообщено; такая катехизация часто соединяется с излагательной формой, и б) катехизация наводятельная: учитель при помощи наводящих вопросов заставляет самих учеников делать выводы и приходить к открытию того, что доселе им было неизвестно. Наводящая катехизация называется также эвристической формой обучения (от греческого глагола, означающего слово „находить“).

Наводящая катехизация является наиболее удобной формой начального обучения. Вопросо-ответная форма весьма уместна тогда, когда дети еще не умеют слушать, т. е. более или менее продолжительное время с должным вниманием следить за рассказом учителя, но в силу свойственной их возрасту восприимчивости и еще недостаточно развитой способности внутренней переработки воспринимаемого материала стремятся к немедленному проявлению получаемых впечатлений. Наводящие вопросы, требуя самостоятельности учащихся, возбуждают их внимание и интерес и делают прочным усвоение знаний, в приобретении которых дети принимают активное участие¹.

¹ Приведем здесь слова Руссо: „Je veux, que l'élève invente la science“ (я хочу, чтобы ученик изобретал науку).

Затем катехизическая форма обучения, постоянно контролируя познания учащихся, всегда укажет учителю, что для детей непонятно и трудно, а потому требует для разъяснения иного приема, чем тот, который был применен, на чем следует подольше остановиться, что можно на время отложить.

Вопросо-ответная форма обучения более, нежели к какому другому предмету, приложима к арифметике: все существенные выводы начальной арифметики ученики могут сделать сами под руководством учителя.

Однако не следует слишком увлекаться этой формой обучения и впадать в мелочную катехизацию там, где это может повести только к непроизводительной трате времени и утомлению детей. Помимо терминов, расположения записей, до которых или невозможно или весьма трудно довести учеников, и в других случаях прямое указание учителя может повести только к сбережению времени, столь дорогого в начальной школе.

§ 11. Задачи и значение их в курсе начальной арифметики.

Арифметической задачей называется вопрос, в котором требуется при помощи арифметических действий найти одно или несколько неизвестных чисел по числам данным. Найти неизвестные — значит решить задачу. Для того, чтобы можно было найти неизвестные числа по числам данным, надо знать, какая зависимость существует между неизвестными и данными. Всякое указание такой зависимости называется *условием задачи*.

Вопрос, в котором действия и порядок их названы или указаны знаками, называется *численным примером*.

Задачи разделяются на *простые* и *сложные*. Простой задачей называется такая, которая решается *одним* из четырех главных действий. Сложной задачей называется такая, которая решается *несколькими* действиями или повторением одного и того же действия.

Простые задачи. Перечислим простые задачи, решаемые каждым из четырех действий, или случаи употребления каждого из этих действий.

Сложением решаются такие задачи, в которых требуется:

1) Найти число, равное данным числам, вместе взятым, или ответить на вопрос: сколько всего.

Ученик купил тетрадь и карандаш; за тетрадь он заплатил 5 коп., за карандаш — 3 коп. Сколько денег пошло у него на всю покупку?

2) Одно число увеличить другим.

У ученика 5 черных карандашей, а красных на 2 больше. Сколько у него красных карандашей?

Вычитанием как действием, обратным сложению, решается вопрос, состоящий в отыскании одной из частей по данному целому и другой части. Например:

Девочка купила на 10 коп. иголок и ниток; за нитки она отдала 6 коп. Сколько она заплатила за иголки?

В частности, вычитанием решаются такие задачи, в которых требуется:

1) Узнать, сколько останется.

У хозяина было 8 овец, 3 овцы он продал. Сколько овец у него осталось?

2) Одно число уменьшить на другое.

Брату 8 лет, сестре на 3 года меньше. Сколько лет сестре?

3) Найти разность между двумя данными числами; узнать, на сколько одно из них больше или меньше другого (разностное сравнение чисел).

В одной семье 8 человек, а в другой 3 человека. На сколько человек в первой семье больше, чем во второй? На сколько человек во второй семье меньше, чем в первой?

Умножение употребляется в тех случаях, когда надо:

1) По данному числу равных слагаемых и величине слагаемого определить их сумму или повторить число слагаемым несколько раз.

Крестьянин ехал из деревни в город 3 часа и проезжал в час 8 км. Сколько километров от деревни до города?

2) Увеличить число в несколько раз.

Карандаш стоит 5 коп., а грифельная доска в 3 раза дороже. Сколько стоит грифельная доска?

Деление на части употребляется в таких случаях, когда надо:

1) Разделить данное число на известное число равных частей, или найти часть данного числа (а также и остаток, если он есть).

У м тери был кусок полотна в 15 м, третью часть этого куса она отрезала на простыню. Сколько метров она отрезала на простыню?

Учитель хотел разделить поровну перья 8 ученикам старшего класса; перьев оказалось 17. По сколько перьев достанется каждому, и сколько перьев останется нерозданными?

2) Данное число уменьшить в известное число раз.

Самовар весит 9 кг, кастрюля в 3 раза меньше. Сколько весит кастрюля?

Деление по содержанию употребляется в тех случаях, когда надо:

3) Узнать, сколько раз одно число содержится в другом или какую часть одного числа составляет другое.

Тетрадь стоит 5 коп. Сколько таких тетрадей дадут на 15 коп?

Во втором классе школы 30 учащихся, из которых 10 девочек. Какую часть всех учащихся в этом классе составляют девочки?

В случае неполного деления надо найти наибольшее число раз, какое одно число содержится в другом, а также величину остатка.

Яблоко стоит 25 коп. Сколько таких яблок можно купить на 80 коп. и сколько при этом придется получить сдачи?

4) Узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого (кратное сравнение двух чисел).

От деревни до города 15 км, а до села 3 км. Во сколько раз город дальше от деревни, чем село? Во сколько раз село ближе к деревне, нежели город?

Приведенные простые задачи могут быть разделены на две группы: 1) такие задачи, в которых мы по данным числам отыскиваем новое число, минуя вопрос о сравнительной величине данных чисел и искомого; 2) такие задачи, в которых явно выступает понятие об изменении числа в смысле увеличения и уменьшения его или о сравнении по величине данных чисел.

Вопросы, решаемые каждым из четырех арифметических действий, могут быть поставлены и косвенно, следующим образом.

На сложение. От какого числа надо отнять одно из данных чисел, чтобы осталось другое данное число? От какого числа надо отнять 3, чтобы осталось 5? $? - 3 = 5$.

Ученику было задано решить несколько задач; когда он решил 3 задачи, ему осталось решить еще 5 задач. Сколько задач было задано ученику?

На вычитание. К какому числу надо прибавить одно из данных чисел, чтобы получить другое данное? К какому числу надо прибавить 3, чтобы получить 8? $? + 3 = 8$.

У хозяйки было несколько кур; когда она купила еще 3 кур, тогда у нее стало 8 кур. Сколько кур было у нее сначала?

Сколько надо прибавить к одному из данных чисел, чтобы получить другое данное число? Сколько надо прибавить к 3, чтобы получить 8? $3 + ? = 8$.

На стене висело 3 картины; когда туда повесили еще несколько картин, тогда всех картин на стене стало 8. Сколько картин повесили на стену?

Сколько надо отнять от одного из данных чисел, чтобы осталось другое данное число? Сколько надо отнять от 8, чтобы осталось 3? $8 - ? = 3$.

В мастерской было 8 кг меди; когда из нее сделали несколько кастрюль, то осталось меди 3 кг. Сколько меди пошло на кастрюли?

В задачах на умножение и деление косвенная форма задания проявляется менее отчетливо.

Сложные задачи. Всякая сложная задача приводится к простым. Чтобы решить сложную задачу, ее надо разбить на простые, т. е. надо найти, какие простые задачи и в каком порядке следует решить, для того чтобы определить то, что отыскивается в сложной задаче. Найти содержание и порядок простых задач, на которые разлагается задача сложная, — значит составить план решения сложной задачи.

Арифметические задачи принято разделять на: 1) задачи чисто арифметические и 2) задачи алгебраического характера (иногда называемые задачами с предположениями). К первым относятся задачи более легкие, такие, условия которых прямо указывают ряд действий, приводящих к отысканию неизвестного. Задачи алгебраического характера — это задачи более трудные, условия кото-

рых скорее указывают ряд действий, совершенных над искомыми и данными (простейшими образцами таких задач могут служить приведенные выше простые задачи, выраженные в косвенной форме).

Для решения сложных задач, т. е. для определения содержания и порядка простых задач, на которые распадаются сложные, существуют два приема: синтетический и аналитический, или *синтез* и *анализ*.

Задача. Школа закупила 50 учебников русского языка по 65 коп., 75 учебников математики по 45 коп. и 60 учебников естествознания. За все учебники пришлось уплатить 99 р. 25 к. Сколько стоит учебник естествознания?

Употребляя синтетический прием, решаем задачу так. Выбираем из данных чисел два числа: 50 учебников и 65 коп. и по ним составляем простую задачу в соответствии со значением этих чисел (цена учебника и количество учебников). Вопрос ее будет такой: сколько стоят учебники русского языка? Точно так же по числам 75 учебников и 45 коп. составляем простую задачу с вопросом: сколько стоят все учебники математики? Берем снова два числа, найденные в двух первых задачах, — стоимость учебников русского языка и стоимость учебников математики, по этим двум числам составляем простую задачу с вопросом: сколько стоят все учебники русского языка и математики?

Взяв число, найденное в этой последней задаче, и одно из чисел, данное в самой сложной задаче (99 р. 25 к.), составляем простую задачу с вопросом: сколько стоят все учебники естествознания? Взяв стоимость всех учебников естествознания и цену одного учебника, данную в сложной задаче, составляем простую задачу с вопросом: сколько стоит учебник естествознания? Это будет последняя простая задача: ее вопрос совпадает с вопросом сложной задачи, и ответ на нее служит ответом на данную сложную задачу.

Употребляя прием аналитический, поступаем так. Берем вопрос сложной задачи — сколько стоит учебник естествознания? и подыскиваем такие данные, которые бы позволили решить этот вопрос одним действием. Чтобы решить этот вопрос одним действием, надо знать: 1) стоимость всех учебников естествознания и 2) их количество. Количество учебников в задаче (60) дано, а стоимость не дана. Подыскиваем такие данные, которые позволяли бы решить этот вопрос одним действием. Такими данными должны быть общая стоимость всех учебников и стоимость учебников русского языка и математики. Первое в задаче дано (99 р. 25 к.), а второе не дано. Подыскиваем далее такие данные, которые позволяли бы найти эти неизвестные. Такими данными должны быть стоимость учебников русского языка и стоимость учебников математики. Для решения этих вопросов надо знать цену учебников и их количество. Эти данные в задаче имеются (50 учебников и 65 коп.; 75 учебников и 45 коп.).

В синтезе мы всякий раз по двум данным составляем вопрос, который может быть посредством их решен. В анализе мы к по-

ставленному вопросу подбираем такие данные, зная которые, мы могли бы решить этот вопрос одним действием.

Примечание. Прежде чем приступить к решению задачи тем или иным приемом, мы должны, конечно, вникнуть в условия и вопрос ее, должны усвоить содержание задачи. Это ознакомление с содержанием задачи ведет к тому, что мы до известной степени уже намечаем себе зависимость искомого числа от данных. Поэтому, приступая к решению задачи синтезом, мы выбираем данные не совсем произвольно или наугад: мы берем такие числа, чтобы составленное по ним новое число могло служить к дальнейшему решению задачи; так, выбирая числа 50 учебников и 65 коп., мы уже наместили, по крайней мере, вопрос об определении стоимости всех учебников русского языка и математики, к решению которого послужит число, найденное по числам 50 учебников и 65 коп., показывающее стоимость учебников русского языка. Таким образом, составляя вопрос по выбранным данным, мы оцениваем число, даваемое решением этого вопроса, с точки зрения данного, необходимого для решения уже другого намеченного вопроса, т. е. вместе с синтезом делаем и анализ. (Например мы не берем числа 65 коп. и 45 коп. и не ставим вопроса: на сколько учебник русского языка дороже учебника математики, потому что не знаем, как воспользоваться этим данным для дальнейшего решения задачи.) С другой стороны, решая задачу анализом, подбирая данные, которые бы позволили одним действием решить вопрос: сколько стоят все учебники естествознания, мы останавливаемся на таких данных, которые могут быть найдены по условиям задачи, или мы оцениваем эти данные как результаты, которые могут быть получены из других данных, т. е. вместе с анализом делаем и синтез. Конечно, может случиться и так, что при решении задачи синтезом мы выберем иногда такие данные и составим по ним такой вопрос, решение которого бесполезно для отыскания неизвестного сложной задачи и который потом должны будем отбросить; при решении задачи анализом мы иногда временно остановимся на таком данном, которое по условиям задачи не может быть найдено и взамен которого станем потом искать другое данное.

Для решения более трудных задач (задач алгебраического характера) употребляется следующий прием, называемый также анализом.

Если мы затрудняемся решить данную задачу, то заменяем ее другой задачей с тем же самым вопросом. Для этого изменяем условия данной задачи, оставляя без перемены искомое. Если затрудняемся решить и новую задачу, то подобным же образом заменяем ее третьей и т. д., до тех пор пока не придем к такой задаче, решить которую умеем.

Задача. Куплено 14 кг муки одного сорта и 9 кг муки другого сорта; за весь первый сорт отдали на 6 р. 30 к. больше, чем за второй; а за 1 кг муки первого сорта платили на 20 коп. дороже, чем за 1 кг второго сорта. Почему платили за 1 кг муки того и другого сорта?

В этой задаче два неизвестных; но раз найдено одно из них, легко определится и другое. Поэтому будем искать, например, цену 1 кг муки второго сорта. Рассуждаем. За муку первого сорта заплачено дороже по двум причинам: 1) ее куплено больше; 2) 1 кг ее стоит дороже. Устраним одну из этих причин, например вторую; для этого сбросим по 20 коп. с цены каждого килограмма муки первого сорта, т. е. предположим, что 1 кг муки первого сорта стоит столько же, сколько и 1 кг второго сорта; тогда со всей стоимости муки первого сорта придется скинуть 20 коп. $\times 14 = 2 \text{ р. } 80 \text{ к.}$, и первый сорт будет дороже второго только на 3 р. 50 к. ($6 \text{ р. } 30 \text{ к.} - 2 \text{ р. } 80 \text{ к.} = 3 \text{ р. } 50 \text{ к.}$)

Данную задачу мы заменили такой:

Куплено 14 кг муки одного сорта и 9 кг муки другого сорта; за муку первого сорта отдали на 3 р. 50 к. больше, чем за муку второго сорта; за 1 кг муки того и другого сорта платили поровну. Почем платили за 1 кг муки?

За муку первого сорта заплатили дороже по одной только причине: ее купили больше на 5 кг; следовательно, 3 р. 50 к. есть стоимость 5 кг муки. Мы пришли к простой задаче: 5 кг муки стоят 3 р. 50 к. Сколько стоит 1 кг? $3 \text{ р. } 50 \text{ к.} : 5 = 70 \text{ коп.}$

Изменяя условия данной задачи, мы оставили без перемены цену 1 кг муки второго сорта; следовательно, 70 коп. стоит 1 кг муки второго сорта. Цена муки первого сорта равна: $70 \text{ коп.} + 20 \text{ коп.} = 90 \text{ коп.}$

Как мы уже говорили выше, при обучении начальной арифметике задачи являются и целью — научить детей разбираться в вопросах количественного характера, часто задаваемых жизнью, и средством — выяснять и выводить на задачах арифметические понятия и приемы вычисления.

На задачах преимущественно простых ученики: 1) убеждаются в необходимости арифметических действий; необходимость эта прямо вытекает из тех задач, которые создаются потребностями обиходной жизни и необходимость существования которых не подлежит для детей никакому сомнению; 2) знакомятся с различными случаями применения одного и того же действия; 3) уясняют свойства действий и приемы их выполнения. С этой точки зрения, как иногда говорят: *курс начальной арифметики должен быть построен на задачах.*

На задачах сложных дети применяют выработанные понятия о действиях и выведенные приемы выполнения их. Так как сложные задачи часто задаются потребностями обиходной жизни, то школа в целях практических должна научить своих учеников решать такие задачи. Этими же задачами главным образом достигается цель образовательная, в смысле развития способности мышления, так как на этих задачах, вырабатывая план решения, мысль приучается к последовательному ряду умозаключений, приводящему к ответу на поставленный вопрос.

Сложные задачи, которые должны иметь место в курсе начальной арифметики, это — преимущественно задачи чисто арифметические. В самом деле, образовательная цель решения задач может считаться достигнутой лишь в том случае, если ученики, сначала руководимые учителем, станут потом решать задачи вполне самостоятельно. Между тем задачи алгебраического характера для установления плана их решения требуют вообще такого тонкого анализа и такой сложной работы мысли, до каких ученики начальной школы доведены быть не могут: этого не позволят сделать и возраст учащихся и время обучения. К тому же большинство таких задач отличается искусственностью условий и в практической жизни почти совсем не встречается.

Конечно, возможно достигнуть того, что ученики станут решать трудные алгебраические задачи определенных типов по готовому образцу, или рецепту. Но такие результаты, не имея цены в практическом отношении, по самому характеру этих задач, едва ли имеют какое-либо значение и по отношению к общему развитию учащихся.

Полагаем, что учителю начальной школы при выборе задач можно руководствоваться следующим: 1) задачи должны быть такие, какие, по убеждению учителя, дети могут научиться решать вполне самостоятельно; 2) содержание задач должно быть совершенно понятно для детей, естественно и сообразно с теми требованиями, какие может ставить жизнь.

Скажем теперь об употреблении в начальном обучении синтетического и аналитического приемов решения задач.

В синтезе мы по данным составляем вопрос; в анализе — к поставленному вопросу подбираем данные, которые позволили бы его решить. Синтез ведет от известного к неизвестному. Сравнивая эти два приема, можно видеть, что синтез легче анализа: легче по данным составить вопрос, нежели к вопросу подыскать данные.

Легкость синтеза увеличивается еще тем, что здесь можно не откладывать вычислений до тех пор, пока будет выработан весь план решения: мы можем производить вычисления попутно с установлением плана решения. Так, поставивши вопросы: — сколько стоит учебник русского языка? сколько стоит учебник математики? — ученики могут тотчас же и решить их: $65 \text{ коп.} \times 50 = 32 \text{ р. } 50 \text{ к.}$; $45 \text{ к.} \times 75 = 33 \text{ р. } 75 \text{ к.}$ При составлении дальнейших вопросов детям легче иметь дело с числами, нежели с величинами, которые только предполагаются известными. Зная, что учебники русского языка стоят 32 р. 50 к., а учебники математики — 33 р. 75 к., можем узнать, сколько стоят те и другие учебники; для этого надо 32 р. 50 к. сложить с 33 р. 75 к. При анализе рассуждение труднее для детей: чтобы узнать, сколько стоят учебники естествознания, надо знать, сколько стоят учебники математики и русского языка; мы узнаем, сколько стоят учебники естествознания, когда из общей стоимости всех учебников отнимем стоимость учебников русского языка и математики.

Иногда думают, что анализ вернее ведет к цели, нежели синтез. Едва ли это так. Правда, синтез носит характер попыток,

угадываний: составляя по данным числам простую задачу, мы можем поставить такой вопрос, решение которого не нужно для дальнейшего хода и который, следовательно, не подвинет нас дальше. Но, с другой стороны, всякий вопрос может быть решен при помощи различных данных, а потому и в анализе, подыскивая к вопросу данные, мы можем выбрать такие, которые по условиям задачи не могут быть найдены. Полагаем, что по отношению к задачам чисто арифметическим, идя синтетическим путем, мы не будем блуждать больше, чем на пути аналитическом; напротив, скорее придем к цели, так как путь этот более легкий¹.

Полагаем, едва ли возможно достигнуть того, чтобы ученики начальной школы стали самостоятельно решать задачи анализом. Однако, ввиду образовательного своего значения, анализ времени от времени может иметь место в начальной школе при решении задач вместе с учителем, не говоря уже о том, что частичное применение анализа может встречаться довольно часто: когда, например, решая задачу синтезом, дети пропустят один из последовательных вопросов или же составят такой вопрос, который окажется бесполезным для дальнейшего решения задачи; путем анализа весьма удобно разъяснить ученикам сделанную ими ошибку. Что же касается последовательного проведения анализа самими учениками, то все, чего можно требовать от них, — это изложить в аналитической форме решение такой задачи, которая уже решена ими иным (синтетическим) путем; анализ при этом, конечно, перестает быть приемом решения, делаясь только формой изложения. По приведенным соображениям мы можем сказать, что преобладающим в начальной школе приемом решения задач должен быть синтез.

§ 12. Устные вычисления.

Первоначальные приемы вычисления представляют собой видоизменение прямого и обратного счета: это — присчитывание и отсчитывание по единице. Такими приемами мы составляем сравнительно небольшую часть таблиц сложения и вычитания. Добытые результаты, сделавшись достоянием памяти, позволяют докончить таблицы сложения и вычитания путем более коротким, чем простой счет. При помощи этих таблиц, а затем приемов выполнения этих действий вне таблиц, но в пределах сотни, идет составление таблиц двух остальных действий, причем и здесь уже добытые и усвоенные памятью результаты действия могут служить к дальнейшему составлению его таблицы. Действия над числами любой величины состоят из ряда действий над десятичными группами этих чисел и сводятся, таким образом, к таблицам. Составление таблиц и вывод правил действий требуют более или менее деятельной работы мысли; но раз правила выведены, вычи-

¹ Что касается задач алгебраического характера, то и здесь этот анализ не приведет к цели скорее, чем синтез. Такие задачи требуют анализа другого рода, сущность которого изложена выше.

счисления по этим правилам скоро становятся механическими, представляя собой работу памяти, руки и глаза, но не мысли. Рано или поздно школа должна, конечно, довести своих учеников до такого механизма вычисления, при котором арифметические действия становятся исключительно орудиями для решения задач, вся же сознательная деятельность сосредоточивается на раскрытии связи между входящими в задачу величинами и на установлении последовательного ряда действий, приводящих к решению вопроса.

Однако не следует спешить с письменным механическим вычислением. В начальной школе должны иметь широкое применение устные расчеты, которые, помимо своего очевидного практического значения, представляют собой один из важных образовательных элементов обучения начальной арифметике: устные расчеты сознательнее письменного вычисления, так как постоянно напоминают о системе счисления и о свойствах действий, на которых основаны приемы их выполнения.

Определим точнее, что разумеем мы под устными вычислениями и чем отличаем их от письменных. Производя действие письменно, мы записываем результаты действий над отдельными группами по мере их получения; выполняя действие устно, мы держим эти результаты в памяти. Например, производя письменно сложение чисел 574 и 389, мы записываем цифру единиц суммы (3) тотчас после того, как эта цифра найдена, не дожидаясь, пока сложены будут десятки; записываем цифру десятков суммы (6), не дожидаясь, пока сложены будут сотни. Вычисляя устно, мы без всяких промежуточных записей находим сполна всю сумму в уме и потом, если нужно, записываем ее. При устном вычислении следует начинать все действия с высших разрядов, так как в названии числа высшие разряды предшествуют низшим; при письменном вычислении первые три действия удобнее начинать с разряда низшего: в противном случае пришлось бы весьма часто записанную уже цифру заменять другой, стирая или зачеркивая ее. Таким образом, устное вычисление, как мы его понимаем, вовсе не требует того, чтобы данные числа мы держали в уме: числа эти могут быть написаны раньше вычисления, а результат лишь тогда, когда он целиком найден в уме. Так как устные расчеты удобны над числами сравнительно небольшими, то общепринятое при письменном вычислении расположение записей не представляет здесь особенной выгоды: числа данные и найденные с удобством могут быть записываемы в строку.

Производя действие устно, ученик непременно должен назвать (хотя бы и про себя) те отдельные группы, на которые разбиваются данные числа; и при письменном вычислении следует требовать от учеников на первых порах, чтобы они называли те группы, над которыми производят действие; но здесь это не является необходимостью, здесь место группы единиц заступает значок—цифра, и дети скоро уже будут говорить: „трижды пять—пятнадцать; пять писать, одну замечать“ вместо слов: „три раза по пяти десятков—будет пятнадцать десятков, или одна сотня и

пять десятков". Называя группы, дети относятся к вычислению сознательнее.

В прямых действиях (сложении и умножении) данные числа всегда разбиваются на группы десятичные (на разряды); в действиях обратных (вычитании и делении) уменьшаемое и делимое весьма часто разлагаются на группы не десятичные, а иные; так, для вычитания 378 из 925 разбиваем уменьшаемое на 8 сотен, 11 десятков и 15 единиц; для деления 672 на 7 разбиваем делимое на 63 десятка и 42 единицы. При письменном вычитании и делении такое разложение уменьшаемого и делимого совершается незаметно и постепенно; при устном вычислении это разложение должно быть сделано явно и наперед. Такое явное образование групп вносит в вычисление известную долю сознательности.

Как обширна должна быть область устных вычислений в начальной школе? Нам кажется, что обязательно устно следует производить: 1) действия в пределе сотни; 2) действия над круглыми числами, сводящиеся к вычислениям в пределе сотни: $25\,000 \times 3$ (25 тысяч $\times 3$), $6400 : 4$ (64 сотни $: 4$); 3) вычисления, легко выполнимые при помощи сокращенных приемов, как-то: приема округления чисел (например $258 + 399 = 258 + 400 - 1$; $463 - 198 = 463 - 200 + 2$; $97 \times 4 = 100 \times 4 - 12$), особого приема умножения и деления на 5 и 25 [например $468 \times 5 = (468 : 2) \times 10$; $84 \times 25 = (84 : 4) \times 100$; $340 : 5 = (340 : 10) \times 2$; $1200 : 25 = (1200 : 100) \times 4$].

Но, кроме того, весьма желательно приучить детей производить устно большинство вычислений в пределах первой тысячи, причем, конечно, нет нужды насильствовать память ученика, заставляя его держать данные числа в уме; но раз эти числа записаны (будь то при решении задач или при вычислении примеров), — результат следует найти устно и уже потом записать.

Во всяком другом случае не надо спешить знакомить учеников с письменными правилами тотчас по выходе из области первой сотни, а следует предложить детям применять в пределах тысячи приемы устного выполнения действий, которыми они пользовались в пределах сотни. Тем ученикам, для которых это оказалось бы трудным, можно предоставить делать вспомогательные записи. Например в случае затруднения выполнить устно вычитание $612 - 485$ или деление $567 : 3$ ученики надписывают над уменьшаемым или делимым те группы, на которые эти данные должны быть разложены; над уменьшаемым — 5 сотен 10 десятков 12 единиц, над делимым — 3 сотни 24 десятка 27 единиц; при умножении двузначного числа на двузначное может быть введена такая запись: $36 \times 24 = 720 + 144 = 864$.

Но письменных правил во всей их полноте сообщать не следует: не надо указывать общепринятого расположения записей, записывания отдельных цифр искомого результата по мере их получения и вытекающего отсюда удобства начинать три первые действия с низших разрядов. Вообще письменным приемам надо придать здесь характер исключения. Этим путем можно достигнуть того, что большинство учеников станет производить все

расчеты устно. Если письменные приемы показаны слишком рано (например тотчас по выходе из сотни), то потом трудно будет развить в детях привычку и интерес к устным расчетам. Не говоря уже о самостоятельных работах даже во время занятия с учителем, который в данном случае, положим, требует устного вычисления, дети по большей части будут производить действия по правилам письменного выполнения их, рисуя в уме картину расположения записей.

Практическое значение устных расчетов очевидно: кончающему курс начальной школы редко придется делать вычисления на бумаге; устные расчеты и выкладки на счетах — вот та область, в которой он найдет главное применение вынесенных из школы познаний по арифметике.

§ 13. Самостоятельные работы и проверка их.

Учителю нередко приходится работать одновременно с двумя-тремя классами.

Так как познания учеников различных классов различны, то учитель, занимаясь сам с учениками одного класса, дает на это время другим самостоятельные работы. Распределяя по возможности равномерно свои уроки между классами, учитель занимается с каждым из них лишь половину, а иногда и треть учебного времени, а остальное время ученики работают одни. Отсюда само собой понятно огромное значение самостоятельных работ, которые отнюдь не должны являться простым заполнением времени или средством заставить детей держать себя тихо под предлогом занятий. Во время этих работ ученики усваивают и отчасти готовят те выводы, которые делаются на уроках с учителем, приобретают необходимый навык в вычислениях и упражняются в применении действий к решению задач.

Как бы хорошо ни был выбираем материал для самостоятельных работ, они тогда только достигнут своей цели, когда будут тщательно проверяемы; в противном случае они легко могут привести к отрицательному результату, так как ученики станут относиться к ним небрежно. Не говорим уже о том, что при недостаточной внимательности к этим работам учитель лишается прекрасного средства контролировать успехи учеников.

Время проверки самостоятельных работ выбирается учащими различно: 1) Работы проверяются на уроке — на том же или следующем. 2) Проверке отводится внеклассное время: после уроков, и перемену между уроками, до начала уроков следующего дня. 3) Работы проверяются частью на уроках, частью во внеклассное время.

Некоторые учащие делают просмотр каждой работы с подчеркиванием ошибок. Просмотренные работы возвращаются ученикам, и те исправляют ошибки или сами доходят до сознания их или по указанию учителя. Другие практикуют *общую проверку*: ученики по очереди читают решение задачи или примера и сделанные при этом вычисления, прочие следят по своим тетрадям, заявляя, так или не так у них сделано; вычисления,

выполненные кем-либо неверно, производятся на классной доске. Общая проверка работ кажется нам в высшей степени желательной. Предоставить самим ученикам исправить указанные (подчеркнутые) ошибки, конечно, весьма хорошо. Но это требует второй проверки с целью убедиться, поняты ли учениками ошибки и исправлены ли они, как должно. Дело очень усложняется. Если же надо будет разъяснять ошибки и заставлять при себе исправлять их, то не лучше ли к исправлению ошибок привлечь всех учеников класса: для тех, работа которых верна, это послужит бесполезным повторением задачи или примера и будет служить к развитию уверенности в своих силах; другим это покажет, что работа посильна для их товарищей, и приведет, быть может, скорее к сознанию ошибок, чем разъяснения учителя, действуя некоторым образом на чувство самолюбия. Конечно, общая проверка не исключает необходимости просмотра письменных работ, так как ближайшее ознакомление с письменными работами служит одним из средств для ближайшего ознакомления с учениками.

ГЛАВА III.

ПЕРВЫЙ ДЕСЯТОК.

§ 14. Счет прямой и обратный.

Первый урок арифметики может быть посвящен проверке умения считать.

Ребенок, поступающий в школу в возрасте восьми лет, еще до школы — в домашнем быту, в играх с товарищами — встречался с числовыми вопросами: ему приходилось считать, и у него есть некоторый запас уже готовых чисел.

С целью выявить этот запас готовых чисел, служащий в известной степени показателем умения считать, учитель спрашивает детей о том, сколько у кого братьев и сестер; сколько пальцев на правой руке, на левой, на обеих; сколько дней в неделе и т. п.

Спросивши затем, что надо сделать, чтобы узнать — сколько (что надо сделать, чтобы узнать, сколько учеников в классе), и получивши ответ: „надо сосчитать“, учитель приступает к испытанию детей в умении считать.

Умение считать состоит: 1) в твердом знании восходящего порядка числительных: один, два, три, четыре и т. д.; это — словесный счет; 2) в безошибочном применении словесного счета к счету предметному, т. е. к определению количества предметов, причём каждое числительное относится к соответствующей группе предметов.

Выставив на планку доски кубики, положивши шарики на классных счетах, начертив ряд крестиков на доске, учитель после общего вопроса, обращенного ко всем ученикам — сколько кубиков поставил я? — и после ответов, данных на него с места, вызывает к доске (или счетам) нескольких учеников (по очереди),

преимущественно тех, которые с места дали ответ неверный или не дали никакого ответа, и заставляет их вести вслух при помощи указки количественный прямой счет: один, два, три, четыре и т. д. Тут может обнаружиться, что иные ученики, зная названия чисел, нетвердо знают порядок их следования одного за другим: так, ученик после слова „шесть“ скажет „восемь“. Это — случай недостаточного знакомства со словесным счетом. Иные, зная порядок числительных, неправильно отнесут числительное к группе предметов; так, ученик, указывая на шестой кубик, успевает назвать по порядку все числа, кончая пятью или семью. Здесь словесный счет расходится с предметным, не поспевая за ним или опережая его.

После прямого счета идет счет обратный. Учитель снимает по кубику (скидывает по шарик, стирает по крестик), а дети говорят: десять, девять, восемь, семь и т. д. Ученики, знающие обратный счет, т. е. нисходящий порядок числительных, при наличии умения применять этот порядок на практике будут сразу называть число остающихся кубиков, а те ученики, которые остающиеся кубики станут считать, не умеют вести обратного счета.

Испытание детей в умении считать можно закончить упражнением в порядковом счете. Ученики считают, например крестики, начерченные на классной доске: первый, второй, третий и т. д., потом обратно: десятый, девятый, восьмой и т. д. Затем, уже не видя крестиков, отвечают на вопросы: какой крестик находится после пятого? какой — перед седьмым? какой — между седьмым и девятым? И т. д.

В результате произведенного испытания, как показывает опыт, обнаруживается, что большинство учеников свободно ведет счет до десяти, а иные и дальше; многих не затрудняет и обратный счет от десяти. И лишь меньшинство считает не вполне удовлетворительно, особенно назад. Если это меньшинство не состоит из детей слишком малолетних, болезненных и отсталых в своем развитии, то оно научится считать при последующих систематических занятиях, общих для всего класса. В противном случае с этим меньшинством придется вести еще и особые занятия.

Первоначальные упражнения — прямой и обратный счет, при считывании и отсчитывании по единице — удобно провести сначала в пределах первой пятерки, потом в пределах второй пятерки и затем повторить в пределах обеих пятерок, т. е. в области всего десятка. Во время этих упражнений можно познакомить детей с цифрами — сначала римскими¹, как более наглядными, а потом с обыкновенными (арабскими) и со знаками $+$, $-$, $=$.

Упражнения в счете сначала от 1 до 5 и от 5 до 1, потом от 6 до 10 и от 10 до 6 и, наконец, от 1 до 10 и от 10 до 1 ведутся так, как мы показывали, говоря об испытании детей в умении считать. Каждый счет должен быть проделан не один раз и притом на различных наглядных пособиях. Употребление раз-

¹ Ознакомление с римскими цифрами на этой ступени излишне. — *Ред.*

личных наглядных пособий, внося в урок разнообразие и оживление, содействует вместе с тем образованию понятия о числе отвлеченном; единичное наблюдение, например однажды виденная группа из пяти предметов, не может дать понятия о числе: это понятие образуется путем повторного, многократного наблюдения групп, одинаковых по численности, но состоящих всякий раз из различных предметов.

Для перехода к изображению чисел римскими цифрами следует провести счет на пальцах: обозначая отдельные пальцы вертикальными (стоячими) черточками, а всю кисть руки знаком V, дети научатся писать римские цифры I, II, III, IV, V, а потом VI, VII, VIII, IX, X, причем начертание X объясняется как происшедшее из двух знаков V, приложенных один к другому остриями.

Одновременно с римскими цифрами идет изображение чисел кружками (точками), располагаемыми в виде числовых фигур.

§ 15. Присчитывание и отсчитывание по единице.

Присчитывание по единице мы отличаем от простого счета. Один, два, три, четыре, пять — это счет. Один да один — два, два да один — три, три да один — четыре, четыре да один — пять, это — присчитывание по одному. Подобным же образом отсчитывание по единице отличается от счета обратного. В присчитывании и отсчитывании явно выступает понятие о действии, о прибавлении и отнятии, выражаемое, например, словами „да“, „без“.

Присчитывание и отсчитывание по единице, с одной стороны, тесно примыкают к счету (прямому и обратному); с другой стороны, начинают собой сложение и вычитание, давая первые понятия об этих действиях и служа первоначальными приемами их выполнения.

Присчитывание и отсчитывание по единице не может затруднить детей в смысле отыскания результата, если дети умеют вести прямой и обратный счет. Вся суть настоящих упражнений заключается в том, чтобы познакомить учеников с понятиями „прибавить“ и „отнять“ и приучить детей подводить под эти понятия те разнообразные выражения, под которыми понятия эти скрыты в практических вопросах-задачах, как-то: купить, подарить, найти, продать, потерять, съесть и т. д.

На планку доски ставится несколько кубиков, например четыре.

— Сколько кубиков стоит на планке? Как это узнать? Поди и считай вслух.

Рядом с ними ставится еще кубик.

— Сколько кубиков теперь на планке? Считали ли вы сейчас все кубики снова, с самого начала, или сразу сказали, что стало пять кубиков?

— Сказали сразу.

В случае противоположного ответа учитель может разъяснить детям, что считать кубики снова незачем, а надо прямо сразу сказать, сколько кубиков, так как мы знаем, что за четыремья идет пять.

— Да, мы сейчас не считали всех кубиков, а только присчитали один кубик к четырем кубикам.

— Что же мы сейчас сделали?

Дети дают *полный ответ*:

— Присчитали один кубик к четырем кубикам.

— Один кубик присчитать к четырем кубикам — сколько будет кубиков?

Полный ответ.

— Слушайте, дети. Вместо „присчитать“ говорят также „прибавить“. Что же мы сделали с кубиками?

— К четырем кубикам прибавили один кубик — стало пять кубиков.

То же присчитывание продлевается на других предметах, для того чтобы потом перейти к отвлеченным числам.

— Сколько шариков положил я на счетах?

Кладется еще один шарик.

— Сколько шариков положено теперь? Что же мы сейчас сделали?

— К четырем шарикам прибавили один шарик — стало пять шариков.

— Сколько крестиков написал я?

Чертится еще один крестик.

— Сколько крестиков написано теперь? Что мы сейчас сделали?

— К четырем крестикам прибавили один крестик — стало пять крестиков.

— К четырем кубикам прибавить один кубик — сколько будет кубиков? К четырем шарикам прибавить один шарик — сколько будет шариков?

К четырем прибавить один — сколько будет?

Идет присчитывание по одному в порядке.

— К одному прибавить один — сколько будет? к двум прибавить один? к трем прибавить один? И т. д.

Затем следуют задачи.

— Девочка пошла в лес за грибами; скоро набрала она четыре гриба и положила их в корзинку; потом она нашла еще один гриб, положила и его в корзинку. Сколько грибов стало у нее в корзинке?

— Пять грибов.

— А как это узнать?

На этот вопрос дети обыкновенно пересказывают задачу: было четыре гриба, нашла еще один гриб — стало пять грибов. На желаемый ответ можно навести детей при помощи наглядных пособий.

— Сколько грибов было в корзинке раньше? А мы поставим четыре кубика. Сколько еще грибов нашла девочка? А мы поставим еще один кубик. Сколько стало всех кубиков? Что сделали мы сейчас с кубиками?

— К четырем кубикам прибавили один кубик.

— Так как же узнать, сколько грибов стало в корзинке?

— К четырем грибам прибавить один гриб — будет пять грибов.

— Скажем это короче: к четырем прибавить один — будет пять. Как же узнать, сколько грибов стало в корзинке?

— К четырем прибавить один — будет пять.

После присчитывания по единице в пределах первого пятка, считаем уместным познакомить детей со знаками $+$ и $=$, с которыми связываются сначала уже известные детям римские цифры¹.

¹ Современная методика не считает целесообразным прибегать при изучении первого десятка к римским цифрам. Ознакомление со знаками $+$ и $=$ с большим успехом может быть дано на арабских цифрах. — Ред.

— Перед домом растет вот сколько березок (пишет III) и вот сколько липок (пишет I направо от III, немного отступя). Сколько деревьев растет перед домом? Как это узнать?

— К трем прибавить один — будет четыре.

— Что написано на доске? Да тут написано число три, а потом число один. Что нам надо было сделать с этими числами? Написано ли на доске, что надо прибавить один к трем? Смотрите: когда надо прибавить, то ставят между числами знак $+$, прямой крестик: $III + I$. Это надо читать так: к трем прибавить один.

Следуют упражнения: учитель пишет на классной доске остальные примеры на присчитывание единицы в пределах пятка, а дети читают. Не ограничиваясь чтением примеров учениками с места, учитель вызывает детей к доске и велит им читать примеры, указывая на то, что они читают: к двум (указывается II) прибавить (ученик показывает на $-$) один (указывается I). Весьма полезно заставлять детей читать примеры хором, причем дети произносят написанные числа и знаки действия, по мере того как учитель указывает на эти числа и знак. Затем учитель диктует такие примеры, а дети пишут в своих тетрадях.

Учитель пишет $III + I$.

— Читайте.

— К четырем прибавить один.

— К четырем прибавить один — сколько будет? Запишем вот здесь (пишет направо, немного отступя: $III + I V$). Прочтите теперь все, что написано на доске.

— К четырем прибавить один — будет пять.

— Прочитаем еще раз и будем показывать на то, что читаем. К четырем (указывается III) прибавить (указывается $+$) один (указывается I) — пять (указывается V). А где же слово „будет“?

— Его нет.

— Смотрите, слово „будет“ пишется вот так $=$, две лежащие черточки: $III + I = V$.

Написанная строка читается детьми хором, по мере того как учитель указывает на числа и знаки; затем ее читают несколько учеников по очереди, сами указывая на то, что читают.

Следуют упражнения.

Учитель пишет $III + I$.

— Читайте.

— К трем прибавить один, — сколько будет?

— К трем прибавить один, — будет четыре.

— Как написать слово „будет“? Где это написать? Покажите. Что писать потом?

Написанную строку дети читают хором и отдельно, как показано выше. Знак равенства учитель иногда заставляет детей читать словом „получится“.

— Напишите в своих тетрадях: к двум прибавить один. К двум прибавить один — сколько будет? Что же вы теперь напишете?

— Знак „будет“.

— Напишите. А после этого знака что запишете? Напишите. Прочитайте.

После этого детям уже можно дать в виде самостоятельной работы решение примеров на присчитывание единицы в пределах пятка¹.

Несколько последующих уроков можно отвести ознакомлению детей с обыкновенными (арабскими) цифрами от 1 до 5. Упражнения в письме этих цифр следует соединить с изображением чисел римскими цифрами и числовыми фигурами. Усвоив первые пять цифр, дети самостоятельно проделывают примеры на присчитывание единицы в пределах пятка с обозначением чисел арабскими цифрами.

Далее идет отсчитывание по единице, которое прорабатывается так же, как присчитывание.

На планку доски ставится несколько, например пять, кубиков.

— Сколько кубиков стоит на планке? Как это узнать? Поди и считай вслух.

Один кубик снимается.

— Что я сделал сейчас?

— Один кубик сняли.

— Сколько кубиков осталось на планке? Слушайте, дети. Считали вы снова те кубики, что остались, или сказали сразу, сколько их?

— Сказали сразу.

— Запомните: когда мы сняли один кубик и сказали, сколько осталось, то мы *отсчитали* один кубик от пяти кубиков. Что же мы сделали?

Дети дают полный ответ:

— Отсчитали один кубик от пяти кубиков.

— От пяти кубиков отсчитать один кубик — сколько кубиков останется?

Полный ответ.

— Слушайте дети. Вместо „отсчитать“ говорят также „отнять“. Что же мы делали с кубиками?

— От пяти кубиков отняли один кубик — осталось четыре кубика.

То же отсчитывание проделывается и на других предметах для перехода к отвлеченным числам.

— Сколько шариков положил я на счетах?

Один шарик скидывается.

— Сколько шариков положено теперь? Что же мы сейчас сделали?

— От пяти шариков отняли один шарик — осталось четыре шарика.

— Сколько кружков написал я?

Один кружок стирается.

— Сколько кружков написано теперь? Что же мы сейчас сделали?

— От пяти кружков отняли один кружок — осталось четыре кружка.

— От пяти кубиков отнять один кубик — сколько останется кубиков? От пяти шариков отнять один шарик — сколько останется шариков? От пяти кружков отнять один кружок — сколько останется кружков? От пяти отнять один — сколько останется?

Идет отсчитывание по одному в порядке.

— От двух отнять один — сколько останется? От трех отнять один? От четырех отнять один? И т. д.

¹ Эти упражнения нужно проделать с арабскими цифрами. — Ред.

Затем следуют задачи.

— У хозяйки было пять стаканов, один стакан она разбила. Сколько стаканов осталось у хозяйки?

— Четыре стакана.

— А как это узнать?

Если не последует желаемого ответа, то можно навести на него так, как это сделано раньше.

— Сколько стаканов было сначала у хозяйки? А мы поставим пять кубиков. Сколько стаканов она разбила? А мы один кубик снимем. Сколько кубиков осталось? Что сделали мы сейчас с кубиками?

— От пяти кубиков отняли один кубик.

— Так как же узнать, сколько стаканов осталось у хозяйки?

— От пяти стаканов отнять один стакан — останется четыре стакана.

— Скажите короче.

— От пяти отнять один — останется четыре.

После отсчитывания по единице в пределах первого пятка уместно познакомить детей со знаком „отнять“.

— У девочки было вот сколько пряников (учитель пишет на классной доске цифру 4); из них она съела вот сколько (пишет цифру 1 направо от цифры 4, немного отступя). Сколько пряников осталось у девочки? Как это узнать?

— От четырех отнять один — останется три.

— Что написано на доске? Тут написано число 4, а потом 1. Что нам надо сделать с этими числами? Написано ли на доске, что надо *отнять* один от четырех? Смотрите: когда надо отнять, то ставят между числами знак —, лежащую черточку: 4 — 1. Это надо читать так: от четырех отнять один. От четырех отнять один — сколько останется? Слушайте, дети. Слово „останется“ пишется так же, как и слова „будет“, „получится“. Как же написать нам слово „останется“? Где написать его? Покажите. Что написать после двух черточек?

Является запись $4 - 1 = 3$, которую ученики читают хором и отдельно.

Следуют упражнения в чтении и письме примеров на отсчитывание. Знак равенства и здесь иногда читается словами „будет“, „получится“.

После этого детям можно дать уже в виде самостоятельной работы решение примеров на отсчитывание единицы в пределе пятка.

Порядок упражнений в пределах второй пятерки остается тот же, а именно:

1) Прямой и обратный счет на разнообразных наглядных пособиях: кубиках, шариках классных счетов, письменных значках, например крестиках, и т. д.

2) Счет на пальцах обеих рук. Изображение чисел от шести до десяти римскими цифрами и числовыми фигурами¹.

3) Присчитывание по единице на наглядных пособиях, на отвлеченных числах и на задачах. Самостоятельные упражнения в присчитывании единицы.

¹ См. подстрочное примечание на стр. 81. — *Ред.*

4) Ознакомление с арабскими цифрами от 6 до 10. Указывая детям обозначение 10, учитель может сказать, что десять пишется цифрой 1 и кружком, который называется нулем; здесь преждевременно входить в какие-либо разъяснения о значении нуля, о первом и втором месте. Упражнения в письме арабских цифр соединяются с изображением чисел римскими цифрами и числовыми фигурами. Самостоятельные упражнения в присчитывании единицы.

5) Отсчитывание по единице — на наглядных пособиях, на отвлеченных числах и на задачах. Самостоятельные упражнения в отсчитывании единицы на арабских цифрах.

Упражнения в прямом и обратном счете и в присчитывании и отсчитывании единицы, распределенные сначала по пяткам, повторяются затем в пределах обоих пятков, т. е. в области всего десятка. Здесь надо требовать от учеников, чтобы решение задач они записывали при помощи обыкновенных цифр и знаков $+$, $-$ и $=$. Впрочем, такие записи могли иметь место и раньше.

§ 16. Присчитывание и отсчитывание нескольких единиц.

Присчитывание и отсчитывание нескольких (а также и одной) единиц есть сложение и вычитание в пределе первого десятка. Но вводить терминологию этих действий (сложить, сложение; вычесть, вычитание; слагаемое, сумма; уменьшаемое, вычитаемое, остаток) было бы здесь преждевременно; дети обозначают первое из этих действий словами „присчитать“, „прибавить“, а второе — словами „отсчитать“, „отнять“. Впрочем, надо заметить, что термин „сложить“, вследствие его простоты и понятности дети иногда вводят сами. Не препятствуя этому, учитель предоставляет ученикам употреблять слово „сложить“ наряду с выражениями „присчитать“, „прибавить“.

Первоначальный прием сложения и вычитания есть присчитывание и отсчитывание по единице. Пусть надо, например, к пяти прибавить три: к пяти прибавить один — будет шесть, к шести прибавить один — будет семь, к семи прибавить один — будет восемь. Так поступаем мы, если пользуемся какими-либо наглядными пособиями. Если же сложение выполняется без всяких наглядных пособий, то мы должны вести счет и прибавляемым единицам: к пяти прибавим первую единицу — будет шесть, к шести прибавим вторую единицу — будет семь, к семи прибавим третью единицу — будет восемь; иначе мы, конечно, не будем знать, где остановиться; или же мы определяем всякий раз, сколько осталось еще прибавить: к пяти прибавить один — будет шесть, осталось прибавить два; к шести прибавить один — будет семь, осталось прибавить один; к семи прибавить один — будет восемь. Подобным же образом поступаем и при вычитании.

Если некоторые результаты сложения и вычитания уже усвоены памятью, то этим можно пользоваться для более скорого нахождения других результатов. Положим, например, что мы запомнили результаты присчитывания и отсчитывания двух и трех;

тогда, чтобы прибавить, например, пять к четырем, мы разобьем пять не на единицы, но на группы — два и три; приложим сразу, на память, два к четырем и потом три к шести; точно так же мы вычтем, например, пять из восьми, отнимая от восьми два и затем от шести три. Мы видим, что применение этого приема, к сожалению, требует умения и вычитать: разбивая придаваемое число пять на группы и назначая первую группу в две единицы, для определения второй группы мы должны от пяти отнять два. Вследствие этого сложение и вычитание в пределе первого десятка мы ведем параллельно (чередую присчитывание и отсчитывание), а не одно после другого. Кроме того, такое совместное изучение действий вносит в занятия разнообразие.

Таким образом, при составлении таблицы сложения и вычитания в пределе десяти могут иметь место два приема: разложение придаваемого и отнимаемого числа на единицы и разложение их на иные числа. Чтобы внести некоторый порядок в пользование тем и другим приемом, мы предлагаем поступить так.

Таблица сложения в пределе десяти может быть разделена на две почти равные части, отличающиеся одна от другой перестановкой слагаемых. Отнесем к первой части те случаи, когда к большему числу прибавляется меньшее ($8+2$) или равное к равному ($4+4$), а следовательно, ко второй части — те случаи, когда к меньшему числу прибавляется большее ($3+5$). Первую часть этой таблицы мы предлагаем составить присчитыванием по одному, а вторую часть — после усвоения первой части на память — путем разложения второго слагаемого не на единицы, а на иные группы; здесь же дети могут пользоваться подмеченной ими или указанной им неизменяемостью результата от перестановки слагаемых. Таблица вычитания в пределе десяти также может быть разбита на две почти равные части, отличающиеся друг от друга тем, что одно и то же число в одной из них служит вычитаемым, а в другой — остатком ($10-4$, $10-6$). К первой из них мы отнесем те случаи, когда вычитаемое меньше остатка или равно ему ($9-3$, $8-4$), а ко второй — те, когда вычитаемое больше остатка ($9-6$). Первую часть этой таблицы мы предлагаем составить отсчитыванием по одному, а вторую — разложением вычитаемого не на единицы, а на иные группы; здесь же дети могут подметить или же это может быть указано им, что при одном и том же уменьшаемом вычитаемое становится остатком, если остаток делается вычитаемым: от 10 отнять 4 — останется 6; а от 10 отнять 6 — останется 4; это может служить к запоминанию таблицы.

Рассмотрим подробнее происхождение первой части таблиц сложения и вычитания.

На планку доски ставится налево, например, пять кубиков, направо — четыре кубика.

— Сколько кубиков налево? сколько направо? а сколько всех кубиков на планке? Как вы это узнали?

— Сосчитали.

Р Это весьма вероятный ответ; может быть, скажут иначе: присчитали, прибавили.

— Как же вы сосчитали (присчитали, прибавили)? Поди к доске и считай вслух.

Здесь может быть или желаемый ответ или же, что вероятнее, ученик будет считать так: один, два, три, четыре, пять; переходит направо: шесть, семь, восемь, девять.

— Слушайте, дети. Зачем же нам еще раз считать те кубики, что налево: ведь мы уже знаем, что их пять; нам надо только присчитать и прибавить четыре кубика к пяти кубикам. Мы с вами умеем прибавлять по одному. Как же прибавить нам четыре кубика к пяти кубикам?

— По одному кубику.

Ученик, вызванный к доске, отодвигая справа налево по одному кубику, говорит: к пяти кубикам прибавить один кубик — будет шесть кубиков; шесть кубиков да один кубик — семь кубиков; к семи кубикам прибавить один кубик — будет восемь кубиков; восемь кубиков да один — будет девять кубиков.

— Сколько кубиков было налево? сколько направо? Что сделали мы с этими кубиками?

— К пяти кубикам прибавили четыре кубика.

— Как прибавили мы четыре кубика к пяти кубикам: сразу или нет?

— Не сразу, по одному кубику.

Это упражнение имеет целью выяснить прием сложения, который потом и применяется к составлению первой части таблицы сложения.

На планку доски ставится, например, десять кубиков.

— Сколько кубиков поставлено на планку? Я хочу отнять отсюда четыре кубика и узнать, сколько кубиков останется. Как это сделать?

— Отсчитывать по одному кубику.

Если бы такого ответа не последовало, на него можно было бы извести, спросивши: а как мы прибавляли четыре кубика?

Ученик, вызванный к доске, вслух выполняет отсчитывание, отодвигая направо по одному кубику: от десяти кубиков отнять один кубик — останется девять кубиков, от девяти кубиков отнять один кубик — останется восемь кубиков и т. д. При этом надо обращать внимание учеников на отсчитывание (отодвинутые) кубики.

— Сколько кубиков мы отсчитали?

— Два.

— А сколько нужно отсчитать?

— Четыре.

— Кончили мы отсчитывание?

— Нет.

— Продолжай.

— Как же отняли мы четыре кубика от десяти кубиков?

— По одному кубику.

Это упражнение служит для выяснения приема вычитания, который затем применяется к составлению первой части таблицы вычитания.

Составление обеих таблиц хорошо вести, как мы уже говорили, параллельно, т. е. чередуя сложение с вычитанием, и в определенном порядке, начиная с присчитывания и отсчитывания наименьших групп, причем следует перебрать все относящиеся сюда случаи, так как настоящие упражнения имеют целью не только усвоение учениками указанных приемов сложения и вычитания, но и запоминание результатов; имея в виду последнее, учитель требует, чтобы дети, называя получаемое число, не-

временно говорили и данные, т. е. давали бы *полный ответ*; так, на вопрос: к пяти прибавить три — сколько будет? дети должны отвечать. к пяти прибавить три — будет восемь; такие полные ответы помимо развития речи содействуют усвоению на память добываемых результатов.

Нам кажется удобным начинать каждое упражнение с задачи, которая и поведет к требованию: одно число прибавить к другому или отнять от другого. Это присчитывание или отсчитывание выполняется затем на наглядных пособиях, а иногда и без них; в тех же случаях, когда результаты окажутся известными всем детям (в чем, конечно, учитель должен убедиться), можно и не добывать этих результатов указанными выше приемами.

Приведем пример проработки этих задач.

— В комнате два окна по одной стене да два окна по другой. Сколько окон в комнате?

Получится ответ или нет, верный или неверный, надо спросить:

— А как это узнать?

— Надо к двум прибавить два.

Если бы дети не дали этого ответа, на него можно было бы навести их так, как это было показано раньше (§ 15).

— К двум прибавить два — сколько будет?

Если не все дети верно ответят на этот вопрос, следует добыть результаты на наглядных пособиях, как это изложено выше.

— Сколько же всех окон в комнате?

— В комнате четыре окна.

Подобным же образом решается задача на вычитание.

При добывании результатов сложения и вычитания желательно применение различных наглядных пособий: помимо того, что это придает разнообразие и оживление уроку, употребление различных наглядных пособий содействует образованию понятия о числе отвлеченном: видя, что пять кубиков и два кубика составляют семь кубиков, пять шариков и два шарика дают семь шариков, пять крестиков и два крестика — семь крестиков, дети сознают, что пять каких бы то ни было предметов и два таких же предмета составляют семь таких же предметов, что вообще пять и два будет семь. Весьма хорошее пособие представляют здесь палочки, которых должно быть у каждого ученика по десяти штук.

— Выньте ваши палочки и положите их перед собой на верх стола. Возьмите из них пять палочек и положите их налево. Возьмите еще три палочки и положите их направо. Теперь три палочки, что направо, прибавьте к тем пяти палочкам, что налево. Как станете прибавлять?

— По одной палочке.

— Прибавляйте вы про себя, а ты прибавляй вслух. К пяти прибавить три — сколько будет? Теперь сложите палочки на место (на верх стола). Возьмите девять палочек и положите их перед собою. От девяти палочек отнимите четыре палочки. Как станете отнимать?

— По одной палочке.

— Отнимайте вы про себя (отодвигая по палочке направо), а ты отнимай вслух. От девяти отнять четыре — сколько останется? Сложите палочки на место.

— Такие упражнения с палочками приучат детей пользоваться этими пособиями во время самостоятельных занятий, когда ученики уже без помощи учителя будут делать сложение и вычитание; палочки в этом

случае очень удобны как пособие, которое весьма легко достать: каждый ученик сам для себя может заготовить по десяти палочек и принести их в школу. Для той же цели могут служить и пальцы.

Как мы уже говорили, иногда следует заставлять детей выполнять присчитывание и отсчитывание и без наглядных пособий так, как это объяснено в начале настоящего параграфа. Чтобы не вводить слова „единица“, можно пользоваться вторым из указанных приемов, отсчитывая по одному от того числа, которое надо прибавить или отнять.

Все рассматриваемые случаи сложения и вычитания подлежат запоминанию, на что учитель обращает внимание детей, поощряя похвалой тех учеников, которые помнят многие из таких результатов.

— К шести прибавить три — сколько будет? Вот он знает: это хорошо. И все вы дети, потом должны будете знать это на память. А пока не знаете, давайте прибавлять по одному.

Упражнения нужно располагать в следующем порядке: сначала случаи присчитывания и отсчитывания двойки, относящиеся к первой половине таблиц сложения и вычитания в пределах десяти: $2+2$, $4-2$; $3+2$, $5-2$; $4+2$, $6-2$; $5+2$, $7-2$; $6+2$, $8-2$; $7+2$, $9-2$; $8+2$, $10-2$. Потом случаи присчитывания и отсчитывания тройки: $3+3$, $6-3$; $4+3$, $7-3$; $5+3$, $8-3$; $6+3$, $9-3$; $7+3$, $10-3$. В следующих примерах вместе с присчитыванием и отсчитыванием тройки по одной единице (например $4+1+1+1$; $7-1-1-1$) должны содержаться упражнения, в которых придаваемая или отнимаемая тройка разбивается на двойку и единицу ($4+2+1$; $7-2-1$). Такие упражнения служат, во первых, для повторения прибавления и вычитания двойки; а во вторых готовят к последующему приему сложения и вычитания, при котором придаваемое и отнимаемое числа разбиваются не на единицы, а на иные группы.

Далее задачи и примеры должны заключать в себе остальные случаи сложения и вычитания, относящиеся к первой половине таблиц этих действий в пределах десяти: $4+4$, $8-4$; $5+4$, $9-4$; $6+4$, $10-4$; $5+5$, $10-5$.

Последние примеры исчерпывают все пройденные случаи сложения и вычитания в определенном порядке и в разбивку.

Изучение сложения и вычитания в пределах первого десятка должно привести к тому, чтобы дети: 1) усвоили приемы выполнения этих действий и 2) запомнили все полученные результаты. Для достижения последней цели, кроме достаточного количества упражнений, можно указать еще следующее средство: из всех результатов сложения и вычитания выделить, т. е. особенно тщательно изучить, несколько результатов, которые служили бы вехами на пути отыскания остальных результатов. Так, из приведенных выше случаев сложения и вычитания особого внимания заслуживали бы сложения и вычитания, содержащие прямой и обратный счет равными группами: $2+2$, $4+2$, $6+2$, $8+2$; $3+3$, $6+3$; $4+4$; $5+5$; $4-2$, $6-2$, $8-2$, $10-2$; $6-3$, $9-3$; $8-4$; $10-5$. Твердое знание этих результатов могло бы помочь учащимся в нахождении и прочих результатов сложения и вычитания: зная, например, что $6+3=9$, ученик легко вспомнит, что $5+3=8$; помня, что $8-4=4$, ученик легко найдет, что $9-4=5$.

Что же касается выделяемых случаев сложения и вычитания, то для лучшего усвоения их наизусть, помимо указанного выполнения их на кубиках, шариках и т. п. предметах, полезно применить к ним такие наглядные пособия, как числовые фигуры и картины, употребляя эти пособия так, как сказано в § 9 гл. II.

К первой половине таблиц сложения и вычитания в пределах десяти мы отнесли такие сложения, когда меньшее число прибавляется к большему, например $5 + 4$, или равное к равному, например $5 + 5$, и такие вычитания, когда отнимаемое число меньше остатка, например $8 - 3$, или равно ему, например $6 - 3$.

Вторую половину таблиц составят такие сложения, когда большее число прибавляется к меньшему, например $2 + 5$, и такие вычитания, когда отнимаемое число больше остатка, например $8 - 6$.

Когда первая половина таблиц твердо усвоена памятью, тогда при прохождении второй их половины детям следует показать прием сложения и вычитания, состоящий в том, что прибаваемое и отнимаемое числа разбиваются не на единицы, а на иные группы, такие, какие дети могут прибавить и отнять на память, зная первую половину таблиц.

Приведем примеры относящихся сюда работ.

— Крестьянин свез с луга до обеда 2 воза сенз, а после обеда 6 возов. Сколько всех возов свез он с луга в этот день? Как это узнать? К 2 прибавить 6 — сколько будет? Если мы этого не знаем, то как станем прибавлять? По одному долго, как скорее?

— По два.

— К 2 прибавить 2 — сколько будет? Сколько еще осталось прибавить? К чему надо прибавить 4? Надо ли и 4 прибавлять по два? Не прибавите ли вы 4 к 4 сразу? Сколько будет? К 2 прибавить 6 — сколько будет? Запишите ($2 + 6 = 8$). Как прибавили мы 6 к 2? Как разложили мы 6?

Подобным же образом указывается этот прием и в применении к вычитанию.

Но главным образом вторую половину таблицы сложения надо приводить к первой ее половине, пользуясь тем свойством сложения, по которому сумма не изменяется от перестановки слагаемых.

На планку доски ставится налево, например, 6 кубиков, направо — 3.

— Сколько кубиков налево? сколько направо? Если 3 кубика, что направо, прибавить к 6 кубикам, что налево, то сколько будет кубиков? (3 кубика придвигается к 6 кубикам.) Поди и запиши это.

Ученик пишет $6 + 3 = 9$. Затем кубики расставляются попрежнему.

— А если 6 кубиков, что налево, прибавить к 3 кубикам, что направо, тогда сколько получится? (6 кубиков придвигаются к 3 кубикам.)

— Тоже 9 кубиков.

— Поди и запиши это.

Ученик пишет $3 + 6 = 9$.

Написавши $8 + 2$, учитель говорит:

— Читайте. Сколько будет? (Записывает, потом пишет $2 + 8$). Читайте. Сколько будет? (Записывает). Как вы это сообразили?

— К 8 прибавить 2 — будет 10 и к 2 прибавить 8 — будет тоже 10.

— Ученик купил себе перо и тетрадь; за перо он заплатил 2 коп., а за тетрадь 5 коп. Сколько денег пошло на всю покупку? Как это узнать? Запишите. ($2 + 5 = 7$). Как прибавляли вы 5 к 2?

— Мы прибавили 2 к 5 — будет столько же.

— А как прибавили вы 2 к 5?

— Сразу, на память.

Что же касается второй половины таблицы вычитания, то она может быть приводима к первой ее половине постановкой вычитаемого на место остатка и отыскиваем на память соответствующего вычитаемого. Например, чтобы сделать вычитание $9 - 7$, припомним, какое число надо отнять от 9, чтобы стало 7.

Для изучения таблицы вычитания можно пользоваться и таблицей сложения в виде упражнений, называемых *разложением* и *дополнением* чисел: $9 = 5 + ?$, т. е. 9 состоит из 5 и еще из какого числа? Это — разложение числа 9 на два слагаемых, из которых одно (5) дается; $6 + ? = 8$, т. е. сколько надо прибавить к 6, чтобы получить 8? Это — дополнение 6 до 8.

Приведем примеры пользования разложением и дополнением при решении задач на вычитание.

— В школу поступило осенью 9 человек; из них пять мальчиков. Сколько девочек? Что надо сделать, чтобы узнать это?

— Надо от 9 отнять 5. (Запись: $9 - 5 =$).

— Сколько всех детей поступило в школу? (Учитель пишет 9). Из кого состоят эти 9 человек? (Пишет после 9 знак $=$). Они состоят из 5 мальчиков (после знака $=$ пишет 5) и еще (ставит знак $+$) из девочек сколько девочек — мы не знаем: поставим знак вопроса. Прочитаем то, что написано: $9 = 5 + ?$, 9 состоит из 5 и еще из какого числа? Припомним, какое это число. Сколько же девочек поступило в школу? Чтобы решить задачу, надо было от 9 отнять 5. Как это мы сделали?

— Мы припомним, что 9 состоит из 5 и из 4.

К ранее сделанной записи приписывается результат $9 - 5 = 4$.

— Девочка нашла 10 грибов; из них 6 были боровики, а прочие — белые. Сколько белых грибов нашла девочка? Как это узнать?

— Надо от 10 отнять 6. ($10 - 6 =$).

— Девочка нашла 6 боровиков (учитель пишет 6) и еще (пишет знак $+$) несколько белых грибов (после знака $+$ ставит знак вопроса), а всего (пишет знак $=$) 10 грибов. (Пишет 10). Прочитаем то, что написано: $6 + ? = 10$. Сколько надо прибавить к 6, чтобы получить 10? Припомним: сколько? Сколько же белых грибов нашла девочка? Чтобы решить задачу, надо было от 10 отнять 6. Как мы это сделали?

— Мы припомним, что к 6 надо прибавить 4, чтобы получить 10.

После прочного усвоения первой половины таблиц сложения и вычитания, изучение второй половины таблиц не потребует такой же подробной проработки во время занятий с учителями.

Задачи, которые до сих пор предлагались детям, имели своими данными числа предметные, т. е. такие, которые получаются от счета предметов: 3 овцы, 6 карандашей, 8 окон и т. д. В задачах этих не было чисел именованных, которые получаются от измерения таких величин, как длина, вес, цена и пр., например 2 метра, 8 килограммов, 9 копеек и т. д. Сделано это было потому, что предметные числа, как более наглядные, на первых порах доступнее детям, нежели числа именованные.

Теперь, когда дети познакомились с приемами сложения и вычитания в пределах десяти и проделали достаточно много упражнений, для того чтобы все полученные результаты стали достоянием памяти, — последующие упражнения в сложении и вычитании будут уже носить характер повторительный и контрольный. Здесь уместно внести в задачи именованные числа, знакомя детей попутно с решением задач с употребительнейшими мерами. При этом следует держаться известной системы, группируя около каждой меры по несколько задач. Задачи эти непременно должны сопровождаться объяснением тех мер, о которых в них говорится. Детям должны быть показаны образцы мер. Кроме наблюдений, дети должны произвести и некоторые простейшие измерения. Попутно с решением задач дети знакомятся с монетами медными, в 1, 2, 3, 5 копеек, серебряными в 10 копеек, кредитными билетами в 3, 5 и 10 рублей. На задачах уясняется представление о метре.

§ 17. Беглый счет на сложение и вычитание.

Все результаты сложения и вычитания в пределах первого десятка ученики должны твердо знать на память. Это достигается отчасти посредством упражнений на уроках с учителем, отчасти во время самостоятельных занятий.

Иногда думают: не надо смущаться тем, что дети на первых порах вычисляют не бойко, что это придет со временем, при изучении дальнейших отделов курса. Мы держимся другого взгляда: не следует идти дальше, пока дети не научились бойко вычислять в том пределе, в каком до сих пор производились все вычисления; не следует идти дальше, пока дети не станут вполне свободно и быстро складывать и вычитать в пределе 10.

Для проверки усвоения памятью результатов действий и для развития быстроты в вычислениях служат упражнения, называемые *беглым счетом*. Это — примеры и задачи, которые решаются учениками по мере чтения их учителем.

Подготовительным упражнением может служить ряд отдельных сложений и вычитаний, связанных между собой тем, что каждое новое действие производится над результатом предыдущего действия. Например: к 2 прибавить 6 — сколько будет? К 2 прибавить 6 — будет 8. К 8 прибавить 1 — сколько получится? К 8 прибавить 1 — получится 9. От 9 отнять 5 — сколько останется? И т. д.

При решении дальнейших примеров дети не говорят результат каждого отдельного действия, а держат его в уме: спрашивается только окончательный ответ.

— От 5 отнимите 3. То, что получили, держите про себя. Прибавьте сюда 8. От того, что получили, отнимите 4. Отсюда отнимите еще 4. К тому, что осталось, прибавьте 7. Сколько теперь получилось? — 9.

Затем выражения „к тому, что получили“, „от того, что получили“ опускаются и заменяются паузами, дающими детям время сообразить результат.

— К 3 прибавьте 6. (Пауза.) Отнимите 4. (Пауза.) Прибавьте 5. (Пауза.) Отнимите 8. (Пауза.) Прибавьте 5. (Пауза.) Сколько вышло?

С течением времени паузы могут становиться все короче и короче.

Беглый счет на задачах представляет собой цепь простых задач, т. е. задач на одно действие, связанных между собою тем, что искомое (ответ) каждой задачи является одним из данных следующей задачи. Мы считаем нужным на первых порах ставить вопрос каждой простой задачи; только ответ на этот вопрос дети должны держать про себя.

— Перед домом стояла скамейка; на ней сидели 3 девочки; потом к ним сели еще 2 девочки. Сколько девочек сидит теперь на скамейке? Вы мне этого не говорите, а держите про себя. Скоро 4 девочки ушли. Сколько девочек осталось на скамейке? (Про себя.) А вместо них село 6 мальчиков. Сколько ребят сидит теперь на скамейке?

Впоследствии можно предоставить самим детям догадываться об этих промежуточных вопросах. Для развития быстроты в вычислении полезно решать сложные примеры; например: $8 - 2 + 4 - 3$.

1) Дети решают такие численные примеры во время самостоятельных занятий, употребляя промежуточные записи, записывая каждое отдельное действие в особой строке.

Пример: $10 - 4 - 2 + 3$:

$$10 - 4 = 6$$

$$6 - 2 = 4$$

$$4 + 3 = 7$$

2) Эти примеры служат как бы упражнениями в беглом счете во время самостоятельных занятий; в этом случае дети должны решить пример без всяких промежуточных записей и написать только окончательный результат: $10 - 4 - 2 + 3 = 7$.

3) Примеры эти могут служить материалом для упражнений в беглом счете и во время занятий с учителем; дети читают их, решают по мере чтения и заявляют (поднятием руки) о получении окончательного результата. Выждав, когда значительное большинство учеников заявило о решении примера, учитель спрашивает ответы.

Так как беглому счету предшествовало достаточное количество примеров и задач, на которых дети могли запомнить все результаты сложения и вычитания в пределе десяти, то есть основание ожидать, что во время упражнений в беглом счете большинство детей будет давать верные ответы. Отдельные отстающие

ученики не должны задерживать весь класс: с ними учитель может заняться особо. Если же будут получаться неверные ответы от многих учеников, то это укажет или: 1) на то, что пример или задача прочитаны учителем слишком быстро, а в этом отношении надо соблюдать постепенность; или 2) на то, что дети утомились, напрягая свое внимание в одном и том же направлении, а в этом случае следует переменить упражнения: вместо примера, во время которого все числа дети должны держать в уме, дать пример с записью данных чисел или же чередовать примеры с задачами.

Заканчивая обзор упражнений в сложении и вычитании, скажем еще несколько слов о *задачах*. В пределах первого десятка задачи на сложение и вычитание должны быть почти исключительно задачами простыми, т. е. решаемыми только одним действием (см. § 11 гл. II). Цели, преследуемые решением сложных задач, могут быть достигаемы лишь после того, как дети вполне освоятся с применением действий к отдельным простым задачам и приобретут достаточный навык в вычислениях. Проводимые на задачах упражнения в беглом счете представляют ряд связанных между собой простых задач, образующих в целом задачу сложную. Но если постановка вопросов отдельных задач делается учителем, а не учениками, то и эти упражнения не могут быть отнесены к разряду сложных задач, служа только подготовкой к ним.

Далее, в пределах первого десятка допустимы лишь такие задачи на сложение, в которых требуется узнать, сколько всего, и такие задачи на вычитание, в которых надо узнать, сколько останется. Здесь не должно быть таких задач на сложение, в которых требуется данное число увеличить на сколько-нибудь, и таких задач на вычитание, в которых надо данное число уменьшить на сколько-нибудь, а также узнать, на сколько одно число больше или меньше другого. Такие задачи, нуждающиеся в предварительном разъяснении выражений „больше и меньше на сколько-нибудь“, мы нашли более уместным ввести при последующих упражнениях в сложении и вычитании, а именно во втором концентре, при изучении этих действий в пределах двух десятков.

§ 18. Умножение¹.

После того как дети усвоили сложение и вычитание, можно дать ученикам понятие о новом действии — умножении, не сообщая пока относящихся сюда терминов, а выражая это действие словами „взять“, „повторить“.

В пределе первого десятка умножение выполняется посредством сложения, а потому не является новым действием в смысле нового способа вычисления. Не будет новым и вопрос, к реше-

¹ Современная методика относит первоначальное ознакомление с умножением и делением ко второму концентру, т. е. ко второму десятку. Такое направление в методике нужно считать правильным. — *Ред.*

нию которого оно прежде всего прилагается: узнать, сколько всего (ученик сшил 3 тетради в 3 листа каждую; сколько листов бумаги пошло на все тетради?). С вопросом, в который входит основное выражение „больше в несколько раз“, дети знакомятся позже. Особенности нового действия, отличающие его от сложения, будут здесь такие: 1) Замена слова „прибавить“ словами „взять“ или „повторить“, — замена, возможная вследствие равенства слагаемых и ведущая к сокращению речи: к двум прибавить два, еще прибавить два и еще прибавить два; короче: два повторить четыре раза. Этой замене слов соответствует и замена знака $+$ знаком $\times$, приводящая к сокращению записи: $2 + 2 + 2 + 2$, короче 2×4 . 2) Требование запомнить результаты сложения *нескольких* равных между собой чисел.

Учитель ставит на планку доски различные группы кубиков, оставляя промежутки между группами, и спрашивает всякий раз, сколько кубиков он поставил.

— Сколько кубиков поставил я на планку? (2 кубика.) Еще сколько? (4 кубика.) Еще сколько? (1 кубик.) Еще сколько? (3 кубика.) Как узнать, сколько здесь всех кубиков?

— К 2 прибавить 4, еще прибавить 1, еще прибавить 3.

— Прибавляйте.

— К 2 прибавить 4 — будет 6, к 6 прибавить 1 — будет 7, к 7 прибавить 3 — будет 10.

Не снимая этих кубиков, учитель попрежнему ставит на другую планку четыре раза по два кубика.

— Как узнать, сколько всех кубиков поставил я на другую планку?

— К 2 прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2.

— Прибавляйте.

— К 2 прибавить 2 — будет 4, к 4 прибавить 2 — будет 6, к 6 прибавить 2 — будет 8.

— Сколько раз ставил я кубики на первую планку? на вторую? Поровну ли кубиков ставил я всякий раз на первую планку? а на вторую?

— Поровну, по два.

— Слушайте, дети. Когда приходится прибавлять все поровну, то не говорят „прибавить“, а говорят „взять столько-то раз“. Так короче. (Указывает на вторую планку). К двум прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2. Вместо этого скажем: „2 взять 4 раза“. 2 взять 4 раза — сколько будет?

— 2 взять 4 раза — будет 8.

— Вместо „взять“ говорят также „повторить“. 2 повторить 4 раза — сколько будет?

— 2 повторить 4 раза — будет 8.

Учитель пишет $2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

— Читайте.

— К 2 прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2 — будет 8.

— А как сказать по-другому, покороче?

— 2 взять 4 раза — будет 8; 2 повторить 4 раза — будет 8.

— Когда приходится прибавлять поровну, то и говорят короче и пишут короче. Смотрите, как пишут: $2 \times 4 = 8$. Читать надо это так:

два (указывает на цифру 2) взять, или повторить (указывает знак $\times$), четыре раза (указывает на цифру 4) — будет 8. Скажите мне, каким знаком написано слово „взять“, или „повторить“.

— Крестиком.

— Такой ли это крестик, как тот который означает „прибавить“?

— Не такой.

— Тот крестик прямой (пишет $+$), а этот — косой (пишет $\times$). Как же пишется слово „взять“, или „повторить“?

— Косым крестиком.

Следуют упражнения. Учитель ставит на планку доски 5 раз по 2 кубика.

— Сколько раз ставил я кубики на планку? По сколько кубиков ставил я каждый раз? Как узнать, сколько тут всех кубиков? Поди и прибавляй вслух.

Ученик, переходя от пары к паре кубиков, но не сдвигая их, говорит: к 2 прибавить 2 — будет 4, к 4 прибавить 2 — будет 6 и т. д.; а учитель в это время пишет: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

— Скажем еще раз (указывает на кубики или на запись): к 2 прибавить 2, еще прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2 — будет 10. А как сказать это короче?

— 2 взять 5 раз — будет 10; 2 повторить 5 раз — будет 10.

— Нельзя ли записать это короче? Поди и запиши.

Ученик пишет $2 \times 5 = 10$.

— Прочитайте, что написал я (2×3)?

— 2 повторить 3 раза.

— Кто может обозначить это на кубиках?

Если ученики затруднятся это сделать, учитель спросит:

— Сколько раз надо повторить число 2? Сколько же раз надо ставить кубики на планку? Какое число надо повторить 3 раза? По сколько же кубиков надо ставить каждый раз? Поставь. 2 повторить 3 раза — сколько будет? Запиши ($2 \times 3 = 6$). А как вы узнали, что 2 повторить 3 раза — будет 6?

— К двум прибавили 2 — стало 4; к 4 прибавили 2 — вышло 6.

Для ознакомления учеников с выражением „взять“, или „повторить“, и со знаком $\times$ мы выбрали такие примеры, когда число слагаемых больше двух, так как в этих только случаях новые выражения и новый знак действительно ведут к сокращению речи и письма.

После этого можно прозести в порядке счет равными группами: 2×2 , 2×3 , 2×4 , 2×5 , 3×2 , 3×3 , 4×2 , 5×2 .

— Сколько кубиков поставил я?

— 2 кубика.

— Два кубика — как сказать это по-другому? (Запрягли двух лошадей: — как сказать по-другому?)

— Пара кубиков.

— А как еще можно назвать пару?

— Двойка.

Ставится еще два кубика.

— Сколько пар кубов поставлено теперь? 2 пары кубиков — это сколько кубиков? 2 двойки — это сколько? Как это узнать?

— К 2 прибавить 2 — будет 4.

— А как сказать это по-другому? (Я брал 2 раза по 2 кубика.)

— 2 взять 2 раза — будет 4; 2 повторить 2 раза — будет 4.

— Как это записать? Запишите.

Дети пишут на своих досках (в тетрадах): $2 \times 2 = 4$.

Учитель кладет на классных досках 3 раза по 2 шарика, оставляя промежутки между парами; каждый раз он спрашивает, по сколько шариков кладется.

— Сколько пар шариков положил я? 3 пары шариков — это сколько шариков? 3 двойки — это сколько? А как это узнать?

— К 2 прибавить 2 — будет 4; к 4 прибавить 2 — будет 6.

— Двойка, еще двойка и еще двойка — будет 6. Скажите короче.

— 3 двойки будет 6.

— К двум прибавить 2 и еще прибавить 2 — будет 6. Скажите короче.

— 2 повторить 3 раза — будет 6.

— Запишите.

Подобным же образом проходятся и остальные случаи умножения в пределах первого десятка.

Нелишне сделать с учениками один-два примера на умножение единицы.

— Читайте, что написал я ($1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$).

— К одному прибавить один, еще прибавить один...

— Сколько раз написано здесь по одному? Как прочитать это короче?

— Один повторить 6 раз.

— Один повторить 6 раз — сколько будет ($1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$)?

— Как записать это короче? Запишите ($1 \times 6 = 6$).

Мы не вводим здесь весьма употребительных в табличном умножении выражений „дважды три“, „пятью два“ и т. д.: выражения эти, представляющие вследствие своей краткости некоторое удобство при изучении таблицы умножения во всем ее объеме и при умножении многозначных чисел, в данном случае не имеют почти никакого значения, и усвоение их является здесь излишним трудом для учеников. Но наряду с такими выражениями, как „два повторить пять раз — будет десять“, мы считаем весьма уместными и выражения „пять двоек будет (составляют) десять“: последние служат к уяснению первых, нагляднее показывая счет равными группами.

В пределах первого десятка подлежат запоминанию собственно четыре случая умножения: 2×3 , 2×4 , 2×5 и 3×3 , так как умножение на 2, например 4×2 , есть сложение только двух чисел, результаты которого ученикам уже известны; а умножение единицы, например 1×8 , не требует никакого вычисления. Для более прочного усвоения памятью названных четырех результатов после отыскания их на кубиках или других предметах полезно применить к ним и числовые фигуры.

Предлагаемые учащимся задачи должны даваться в форме, явно указывающей на повторение несколько раз, например: „Девушка ходила за водой на реку 3 раза и каждый раз приносила по 2 ведра. Сколько всего ведер воды она принесла?“. Такие задачи могут решаться или после того, как указанным выше образом пройдены все случаи умножения в пределах десятка, или же во время их прохождения, завершая соответствующие упражнения на наглядных пособиях.

Полезно здесь давать такие задачи, которые попарно содержат случаи умножения, отличающиеся перестановкой сомножителей. Эти задачи могут служить к тому, чтобы, во-первых, заронить мысль о неизменяемости произведения от перестановки сомножителей; во-вторых, что здесь важнее возможно лучше уяснить, какое из данных чисел является множимым (какое число надо повторить) и каков множителем (какое число показывая, сколько раз надо повторить). С этой последней целью весьма полезно сначала записать решение этих задач при помощи знака „прибавить“, а потом уже перейти к знаку „повторить“.

— Ученик сшил 4 тетради в 2 листа каждую. Сколько вышло у него листов бумаги? Как это узнать?

Если дети дадут и верный ответ: 2 повторить 4 раза — будет 8, учитель может повести с ними такую беседу:

— Сколько листов пошло на одну тетрадь? (Пишет 2.) На другую? (Пишет рядом еще 2.) На третью? (Пишет 2.) На четвертую? (Пишет 2.) Что надо теперь сделать, чтобы узнать, сколько будет всего?

— К 2 прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2.

— Сколько будет?

Получив ответ, учитель ставит между написанными цифрами знаки + и пишет итог: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

— Как записать это короче ($2 \times 4 = 8$)? Как это прочитать? Как же узнать, сколько листов бумаги пошло на все тетради? По сколько листов шло на каждую тетрадь? Сколько тетрадей сшил ученик? А другой ученик сшил 2 тетради в 4 листа каждую. Сколько бумаги вышло у этого ученика? Сколько листов пошло на одну тетрадь? (Пишет 4.) На другую? (Пишет рядом еще 4.) Что надо сделать, чтобы узнать, сколько будет всего?

— К 4 прибавить 4.

— Сколько будет (ставит знак + и пишет итог: $4 + 4 = 8$)? Как записать это по-другому ($4 \times 2 = 8$)? Как это прочитать? Как же узнать, сколько бумаги вышло у другого ученика? По сколько листов шло на каждую тетрадь? Сколько сшил он тетрадей?

Во всех задачах на этой ступени умножение употребляется для решения таких вопросов, в которых путем нахождения суммы равных чисел или повторения числа несколько раз требуется узнать, сколько всего. Тут нет применения умножения к увеличению числа в несколько раз: это будет показано детям позже. Поэтому, если при решении настоящих задач учитель будет ставить вопрос: „почему надо повторить?“, то не должен требовать на него такого ответа, который заключал бы в себе выражение „во столько-то раз больше“.

— Кузнец подковал 4 лошадей: новые подковы он поставил каждой лошади только на передние ноги. Сколько потребовалось новых подков? Как это узнать? Почему надо 2 повторить 4 раза?

— На одну лошадь шло 2 подковы, а на 4 лошади — 4 раза по 2.

Но не надо требовать такого ответа: на одну лошадь шло 2 подковы, а на 4 лошади — в 4 раза больше.

Задачи на умножение, решаемые учениками во время занятий с учителем, чередуются с численными примерами, назначенными для решений во время самостоятельных занятий.

Весьма полезными считаем мы упражнения, состоящие в переходе от знака $+$ к знаку $\times$ и обратно; они в значительной мере содействуют усвоению нового выражения „повторить“ и нового знака $\times$, связывая их со знакомым уже детям выражением „прибавить“ и знаком $+$.

На этой ступени следует вводить примеры, в которых к сложению и вычитанию присоединяется и умножение. Здесь еще преждевременно вводить скобки. Если в примерах ставить умножение только один раз, в начале примера, то для решения примера придется выполнять действия в том порядке, в каком они идут одно за другим. Так, пример $2 \times 5 - 3 =$ решается следующим образом: 2 повторить 5 раз — будет 10; от 10 отнять 3 — останется 7.

§ 19. Деление¹.

А. Деление на равные части. Для выполнения деления на наглядных пособиях служит следующий пример. Из группы предметов, которую надо разделить, например из группы кубиков, берем число предметов, равное числу частей, например берем 3 кубика, если надо разделить на 3 равные части; расставляя их отдельно (деля на 3 равные части), имеем в каждой части по одному предмету; снова берем три кубика и, поступая по предыдущему, получим в каждой части еще по одному, а всего по два кубика; так поступаем до тех пор, пока не исчерпаем всех предметов данной группы.

Связывая этот прием с предшествующими арифметическими действиями, мы приходим к вычитанию или сложению равных чисел. Так, чтобы разделить 8 на 2 равные части, берем (вычитаем) 2 из 8 и, деля пополам, имеем в каждой части по одному; берем (вычитаем) 2 из 6 и, деля пополам, получим в каждой части еще по одному, а всего по два и т. д. Вместо того чтобы отнимать по 2, мы можем набирать по 2, пока не получим 8, деля пополам каждую двойку; 2 разделить пополам — будет 1, еще 2 разделить пополам — будет 1; значит, 4 разделить пополам — будет 2 и т. д.

Если мы уже знаем на память некоторые результаты деления, то можем этим воспользоваться для ускорения дела; например, если мы знаем половину 6 и половину 4, но не знаем половины 10, то для отыскания последней разобьем 10 на 6 и 4.

Для добывания результатов деления весьма удобно пользоваться таблицей умножения; для того чтобы найти половину 8, припомним, какое число надо повторить 2 раза, чтобы получить 8.

Обращаем внимание учителя на то, что такие выражения, как „восемь разделить на два“, являются следствием обобщения обоих видов деления (на части и по содержанию): 8 разделить на 2 равные части — будет 4 (единицы в каждой части) и 8 разделить на двойки — будет 4 (двойки); то и другое можно сказать вместе, вообще: (число) 8 разделить на (число) 2 — будет 4. Такие выражения здесь неуместны; вместо них следует употреблять

¹ См. подстрочное примечание на стр. 94.

выражения более полные: „разделить на две равные части, или пополам“, „разделить на три равные части“ и т. д.

Уясняя детям деление на наглядных пособиях, начинаем с деления стольких предметов, на сколько частей надо разделить; потом показываем общий прием деления на данный делитель и применяем этот прием ко всем случаям деления на этот делитель чисел первого десятка.

На планку доски ставится рядом два кубика.

— Сколько кубиков стоит на планке? Если два кубика разделить на две равные части, то по сколько кубиков будет в каждой части? (Кубики раздвигаются.)

— Два кубика разделить на две равные части — в каждой части будет по одному кубiku.

— Два пряника разделить поровну между двумя братьями — сколько пряников придется каждому? Два разделить пополам — сколько будет? Половина двух — это сколько? Веревку длиной 2 метра разрезали пополам; какой длины вышла каждая часть? Как это узнать?

— 2 разделить пополам — будет один.

На стол кладется четное число кубиков (считать их ученикам не надо).

— Вот у меня на столе кубики, и я хочу разделить их поровну между двумя учениками. (Вызывает к столу двух учеников.) Кто умеет это сделать?

К столу выходит третий ученик и начинает делить кубики: дает кубик одному и кубик другому, кубик одному и кубик другому... Учитель останавливает его.

— По сколько кубиков надо брать для каждой раздачи?

— По два кубика.

— Так ты и делай. Начнем снова. Говори: беру 2 кубика и делю их на 2 равные части. Продолжай.

— Беру еще 2 кубика и делю их на 2 равные части... Беру последние 2 кубика и делю их на 2 равные части.

Это упражнение имеет целью уяснить детям прием деления на две равные части, который потом применяется к делению пополам четырех, шести, восьми и десяти.

На планку доски ставят 4.

— Сколько кубиков стоит на планке? Как разделить их на 2 равные части?

— Взять два кубика и разделить их на 2 равные части.

Ученик берет два кубика и ставит их отдельно на другой планке.

— Сколько будет в каждой части? Потом что сделать?

— Взять еще 2 кубика и разделить их на 2 равные части.

Ученик берет остальные 2 кубика и ставит их отдельно на другой планке рядом с прежде разделенными.

— По сколько кубиков придется еще в каждую часть? Значит, если 4 кубика разделить на 2 равные части, то по сколько кубиков будет в каждой части? 4 пера разделить поровну между 2 учениками — по сколько перьев достанется каждому? 4 разделить пополам — сколько будет? Половина 4 — это сколько? Мать раздала 4 яблока 2 дочерям поровну. Сколько яблок досталось каждой? Как это узнать?

— 4 разделить на 2 равные части (пополам) — будет 2.

Далее идет деление пополам чисел 6, 8, 10.

Точно так же ведется деление на 3 равные части чисел 3, 6 и 9; на 4 равные части — чисел 4 и 8; на 5 равных частей — чисел 5 и 10. Другим делителям в пределах первого десятка соответствуют лишь такие случаи деления, когда в результате получается единица.

В качестве наглядного пособия полезно применять числовые фигуры, разделенные на равные части. Наверху каждой фигуры можно сделать надписи, показывающие составление данного числа из других равных между собой чисел посредством умножения; сбоку же нужно поместить запись, указывающую деление числа на равные части. Каждая из таких фигур может быть рассмотрена тотчас после того, как соответствующее деление изложенным выше способом проделано на кубиках или на иных предметах. При рассмотрении фигур может быть объяснен и знак деления. Возьмем для примера числовую фигуру шести.

— Сколько кружков изображено налево от черты? направо? по обе стороны черты? Сколько раз надо повторить 3, чтобы получить 6? Прочитайте надпись наверху фигуры; 3 повторить 2 раза — сколько будет? На сколько равных частей черта делит 6 кружков? Сколько кружков в каждой части? Прочитайте то, что написано сбоку фигуры; 6 разделить на 2 равные части — по сколько будет в каждой части?

$$3 \times 2 =$$



$$6:2=$$

Рис. 12.

Задачи нужно решать такие, которые содержат по порядку все случаи деления на 2 равные части: 2:2, 4:2, 6:2, 8:2, 10:2, причем на каждый из этих случаев полезно привести две задачи, для того чтобы наряду с выражением „разделить на 2 равные части“ ввести в употребление и выражения „разделить пополам“, „найти половину“. Задачи эти могут быть решаемы после того, как соответствующее деление проработано на кубиках и рассмотрено на числовой фигуре.

Так же располагаются и остальные случаи деления на равные части: 3:3, 6:3, 9:3, 4:4, 8:4, 5:5, 10:5.

На каждое деление (кроме 3:3, 4:4 и 5:5) имеется по две задачи, для того чтобы вместе с выражением „разделить на 3, 4, 5 равных частей“ ввести выражения: „найти третью, четвертую, пятую части“. Эти задачи следуют за выполнением соответствующего деления на кубиках и рассмотрением его на числовой фигуре.

В конце нужно давать такие примеры, в которых ученики делят число на равные части, припоминая, какое число надо повторить столько-то раз, чтобы получить данное число, например $? \times 4 = 8$ и потом 8:4.

Задачи на этой ступени не должны содержать таких вопросов, в которых требуется уменьшить число в несколько раз: здесь деление употребляется лишь в прямом своем значении — раздать, разрезать, распилить, вообще найти некоторую часть. С выражением „меньше в несколько раз“ мы знакомим детей позже. Поэтому, если при решении задач учитель будет ставить вопрос: „почему надо разделить?“, то он не должен требовать на него такого ответа, который заключал бы выражение: „во столько-то раз меньше“.

— У конюха выходит на 3 лошади 9 кг овса в день. Сколько

килограммов выходит на 1 лошадь? Как это узнать? Почему надо 9 разделить на 3 равные части?

— Потому что на одну лошадь выходит третья часть 9 кг.

Но не надо требовать ответа: потому что на одну лошадь выходит в 3 раза меньше.

Б. Отыскание содержания одного числа в другом (деление по содержанию). Деление на равные части, уже рассмотренное нами, и отыскание содержания, к которому мы теперь переходим, являются двумя видами одного и того же арифметического действия, называемого делением. Но на первых порах тот и другой случай деления представляются двумя отдельными действиями и должны быть рассмотрены особо: не все равно — 8 кубиков разделить на две равные части и 8 кубиков расставить парами. Здесь было бы преждевременно обобщать или объединять оба вида деления, т. е. разъяснить ученикам, что, несмотря на различие решаемых ими вопросов, оба эти действия могут быть выполнены одинаково, одно может быть сведено к другому: если мы узнали, скольким единицам равна, например, третья часть какого-нибудь числа, то вместе с тем узнали, сколько раз три содержится в этом числе, и наоборот. Однако, не вдаваясь в эти разъяснения, которые на данной ступени обучения не могут быть вполне понятны ученикам, мы можем отыскание содержания называть словом „разделить“ и обозначить знаком (:), так как и здесь число (группа предметов) *делится* на равные части¹. Это слово „разделить“ мы советовали бы сопровождать выражениями „на двойки, на тройки, на четверки, на пятерки“, не употребляя, как и в случае деления на части, слов „на два, на три“ и т. д.; последние выражения мы считаем уместными лишь тогда, когда оба вида деления будут объединены.

Примечание. Некоторые руководства по методике арифметики вводят для двух случаев деления два различных знака: например знак $\lfloor$ для деления на равные части и знак (:) для отыскания содержания). Нам кажется это излишним, так как рано или поздно оба вида деления должны быть объединены в одно действие, откуда и вытекает возможность обозначения их одним и тем же знаком. Здесь же, как мы уже говорили, употребление общего знака для того и другого действия оправдывается возможностью назвать их общим словом „разделить“.

Отыскание содержания может быть выполнено: 1) посредством вычитания: чтобы узнать, сколько двоек в 10, будем отнимать по двойке, пока ничего не останется, и считать эти двойки; 2) путем обратным, т. е. сложением делителей: набираем по двойке, пока получим 10. В том и другом случае удобно брать сразу по нескольку делителей: 3 двойки — будет 6, осталось 4, а это 2 двойки; всего 3 да 2, т. е. 5 двоек. Это сводится к разложению делимого на такие группы (6 и 4), которые мы можем

¹ В данном случае (деление на части) назначается число частей, отыскивается величина каждой части; в другом случае (деление по содержанию) назначается величина каждой части, отыскивается число частей.

разделить на память, предполагая, что мы затрудняемся сказать прямо, сколько двоек в 10. Всего скорее найдем результат, если сразу вспомним, сколько раз надо повторить двойку, чтобы получить 10.

Для уяснения детям понятия о новом действии (второй вид деления) весьма удобно одно и то же число предметов (кубиков) разложить на группы различной величины: на двойки, тройки и т. д.

Учитель ставит на планку доски двенадцать кубиков сплошным рядом¹.

— Сколько кубиков поставлено на планке? Поди и считай вслух. Наши кубики стоят рядом, вплотную. А теперь как я расставил их?

— Врозь (отдельно) по одному.

Кубики снова сближаются вместе, потом расставляются парами.

— Как теперь расставлены наши кубики? По скольку?

— Парами, попарно, по два.

— Мы расставили кубики парами. Скажем так: мы разделили кубики на пары. Что же сделали мы с кубиками? Сколько вышло у нас пар? Двенадцать кубиков разделить на пары — сколько будет пар?

— Двенадцать кубиков разделить на пары — будет 6 пар.

Кубики сближаются вместе.

— Разделим теперь наши кубики на тройки. Кто хочет сделать это?

Ученик расставляет кубики по три.

— Двенадцать кубиков разделить на тройки — сколько будет троек?

Точно так же делятся кубики на четверки и на шестерки.

Знакомя детей с делением по содержанию, считаем нужным перебрать все случаи этого действия в пределах первого десятка.

На планку доски ставится рядом 4 кубика.

— Сколько кубиков поставлено на планке? Как расставил я теперь эти кубики? По скольку?

— По два, по паре.

— 4 кубика разделить на пары — сколько выйдет пар? 4 разделить на двойки — сколько будет двоек?

— Грифель стоит 2 копейки. Мальчик купил грифелей на 4 копейки. Сколько грифелей купил мальчик?

Далее идет деление на двойки 6, 8 и 10 кубиков; деление на тройки 6 и 9; деление на четверки 8 и деление на пятки 10 кубиков.

Вместе с выражением „разделить на двойки, на тройки“ и т. д. можно познакомить детей и с выражением „содержится, заключается столько-то раз“.

— 8 разделить на двойки — сколько будет двоек? Сколько же двоек в 8? Слушайте, дети. В 8 — четыре двойки; поэтому говорят: двойка содержится в 8 четыре раза, двойка заключается в 8 четыре раза. Сколько раз двойка содержится в 8? Сколько раз двойка заключается в 8? Что сделали мы с 8 кубиками, для того чтобы узнать, сколько выйдет пар?

— 8 кубиков разделили на пары.

— Что надо сделать, чтобы узнать, сколько раз двойка содержится в 8?

— Надо 8 разделить на двойки.

¹ Мы взяли число двенадцать как имеющее много делителей; нужды нет, что оно больше 10; мы берем его только для уяснения понятия о делении на группы определенной величины; кроме того, счет до двенадцати едва ли затруднит детей, а если бы и так, то всех кубиков можно и не пересчитывать.

После того как то или иное деление выполнено на кубиках, полезно применить числовые фигуры.

Возьмем для примера числовую фигуру шести.

$$2 \times 3 =$$



$$6 : 3 =$$

Рис. 13.

— Сколько кружков изображено налево, в середине, направо? Сколько всего? Прочитайте надпись наверху фигуры. Из скольких пар состоит 6? Сколько раз двойка содержится в 6? По сколько кружков отделяет от фигуры каждая черта? Прочитайте то, что написано сбоку фигуры. 6 разделить на двойки — сколько будет двоек?

Задачи должны содержать по порядку все случаи деления на двойки, тройки, четверки, пятерки. Эти задачи могут быть решаемы после того, как соответствующее деление проработано на кубиках и рассмотрено на числовой фигуре.

В последней группе задач должно быть деление на единицу.

— Учитель rozdal ученикам 7 перьев, по 1 перу каждому. Скольким ученикам rozdal он перья? Как это узнать? — Надо 7 разделить на единицы.

Задачи чередуются с численными примерами, решаемыми во время самостоятельных занятий. В конце должны даваться примеры, в которых дети производят деление, например 8 на четверки, припоминая, сколько раз надо повторить 4, чтобы получить 8 ($4 \times ? = 8$ и потом $8 : 4$).

Задачи, относящиеся ко второму виду деления, приводят к отысканию, сколько раз одно число содержится в другом, но не ставят вопроса, во сколько раз одно число больше или меньше другого. С этим вопросом дети знакомятся позже. Поэтому если при решении этих задач учитель будет спрашивать: „почему надо разделить?“, то он не должен требовать такого ответа, в котором бы заключалось выражение „во сколько раз больше“.

— В столовой было 8 кг масла; в неделю она расходовала по 2 кг. Во сколько времени столовая израсходовала все масло? Как это узнать? Почему надо 8 разделить на двойки? — Потому, что все масло вышло во столько недель, сколько двоек в 8 (сколько раз 2 кг содержится в 8 кг). Но не должно требовать ответа: во сколько недель, во сколько раз 8 больше 2.

В. Оба вида деления. Как мы сказали выше, на настоящей ступени обучения было бы преждевременно объединять оба вида деления, т. е. разъяснять ученикам, что хотя этими действиями решаются и различные вопросы, однако оба эти действия составляют одно действие, так как могут быть выполнены совершенно одинаково, и одно из них может быть сведено к другому: если мы узнали, скольким единицам равна, например, четвертая часть какого-нибудь числа, то вместе с тем узнали, сколько раз четверка содержится в этом числе, и наоборот. Деление на равные части и деление по содержанию должны быть рассмотрены здесь особо, потому что на первых порах они являются для детей как бы двумя различными действиями: не все

равно — десять кубиков разделить на две равные части и десять кубиков расставить парами.

Когда деление на части и деление по содержанию пройдены порознь, тогда, не задаваясь объединением их, следует сопоставить оба вида деления с целью уяснить ученикам, что в обоих случаях происходит деление: только в одном случае мы знаем, на сколько частей надо разделить, и хотим узнать, как велика будет каждая часть, а в другом случае мы знаем, как велика должна быть каждая часть, и хотим узнать сколько выйдет таких частей. Для сопоставления обоих видов деления могут служить следующие задачи:

— Из 6 листов бумаги ученик сшил 2 одинаковые тетради. Сколько листов пошло на каждую тетрадь? Как это узнать?

— 6 разделить на 2 равные части — будет 3.

— Сделайте это деление на кубиках. (Ученики раздвигают 6 кубиков на 2 равные части). Из задачи вам известно, что делить надо 6, а что вы знаете из задачи о том, как надо делить?

— Мы знаем, что надо делить на 2 равные части.

— Что же требуется, узнать?

— Требуется узнать, сколько будет в каждой части.

— Запишите это деление.

Является запись $6:2=3$.

— Из 6 листов бумаги ученик сшил тетради в 2 листа каждая. Сколько тетрадей сшил этот ученик? Как это узнать?

— 6 разделить на двойки — будет 3 (двойки).

Сделайте это деление на кубиках. (Ученики расставляют 6 кубиков парами). Из задачи вам известно, что надо делить 6. А что вы знаете из задачи о том, как надо делить?

— Мы знаем, что надо делить на двойки.

— Что же требуется узнать?

— Требуется узнать, сколько выйдет двоек.

— Запишите это деление.

Является запись $6:2\text{-ки}=3$, которая делается под первой записью $6:2=3$.

— Прочитайте первую строчку.

— 6 разделить на 2 равные части — будет 3.

— Прочитайте вторую строчку.

— 6 разделить на 2-ки — будет 3.

— Обе строчки мы начинали читать так: 6 разделить... А потом как говорили?

— В первой строчке говорили: на 2 равные части, а во второй — на двойки.

§ 20. Беглый счет на все действия

Беглый счет на все действия преследует те же цели, которые мы указали, говоря в § 18 о беглом счете на сложение и вычитание. Прежним остается и характер упражнений. Беглый счет на числах отвлеченных чередуется с беглым счетом на задачах. Численные примеры на все действия могут быть использованы так же, как об этом сказано в § 17.

ПЕРВЫЕ ДВА ДЕСЯТКА.

§ 21. Нумерация.

При изучении нумерации в пределах от 10 до 20 значение десятка как счетной единицы не может быть выяснено с достаточной полнотой, так как здесь являются лишь один и два десятка, а для усвоения понятия о десятке как о счетной единице надо произвести счет круглыми десятками до ста. Но и тут необходимо дать детям понятие об единице и десятке: иногда считают вещи (прутики, кубики, карандаши и т. д.) по одной, тогда каждая вещь называется единицей; а иногда считают вещи десятками, например яйца, яблоки и т. д.

Как показывает опыт, почти всем ученикам первого класса знакомы названия чисел второго десятка, и дело учителя будет состоять главным образом в том, чтобы объяснить детям эти названия и показать, как пишутся числа второго десятка.

Устная нумерация от 10 до 20 может быть наглядно объяснена на таких пособиях, как солома (прутики) или кубики и бруски арифметического ящика.

Учитель кладет на стол 20 прутиков, не говоря детям о числе их.

— У меня на столе лежат прутики. Что надо сделать, чтобы узнать сколько их. Поди и сосчитай.

Ученик на виду у всего класса громко считает, откладывая по пруту: один, два, три ... девять, десять. Тут учитель остановит ученика.

— Свяжем эти десять прутиков в пучок. Сколько же прутиков в пучке? Теперь считай дальше: прибавь еще один прутик. Сколько насчитано сейчас прутиков?

Многие ученики ответят: одиннадцать.

— Да, верно: мы прибавили, накиннули один на десять — и вышло одиннадцать. Теперь к одиннадцати палочкам (тут прутики можно назвать палочками) прибавь еще палочку. Сколько палочек будет тогда сверх десяти? Как называется это число?

Многие ученики ответят: двенадцать.

— Верно. Мы прибавили, накиннули две палочки на десять палочек, и вышло две на десять, короче — двенадцать.

Так идет ознакомление детей с числительными до двадцати.

Когда дети прибавят к девятнадцати прутикам еще один и на вопрос, сколько насчитали мы прутиков, ответят — двадцать, учитель объясняет образование этого названия.

— Сколько прутиков у нас сверх десяти? Свяжем и эти прутики в пучок. Все прутики связаны у нас в два пучка, по десяти штук в каждом. Всех прутиков у нас десять и десять, два раза по десять, короче — двадцать, двадцать.

Если ученики достаточно продвинулись в чтении и письме, то все числительные второго десятка — от одиннадцати до двадцати — могут быть записаны учителем на классной доске и — в виде самостоятельной работы — списаны учениками в их тетради.

Для ознакомления с письменной нумерацией от 10 до 20 весьма хорошим пособием могут служить приводимые здесь числовые фигуры.

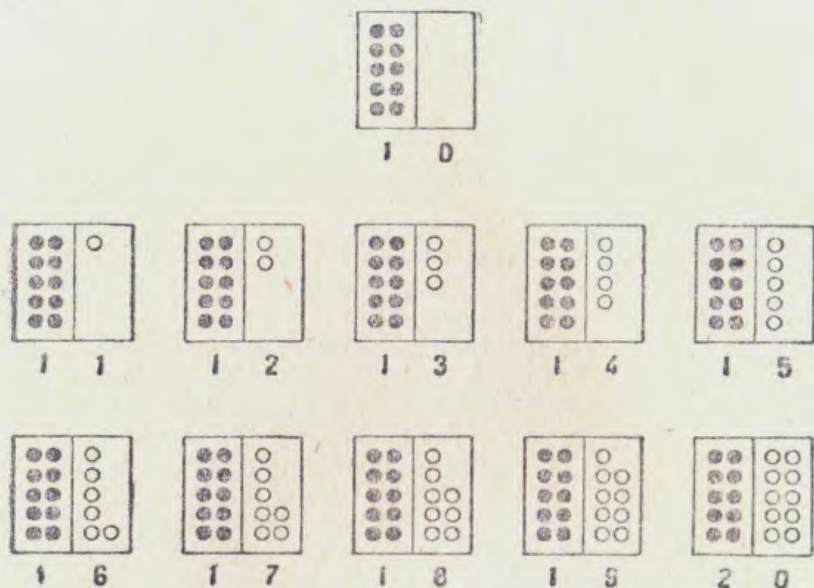


Рис. 14.

Рассматривая с учениками числовую фигуру одиннадцати, учитель предлагает детям узнать, сколько черных кружков изображено в левой клетке. Дети считают.

— Во сколько рядов расположены эти десять кружков и по сколько кружков в каждом ряду? Как иначе называется число десять? (Десять — как сказать по другому?)

При рассматривании дальнейших фигур дети уже не станут пересчитывать черные кружки левой клетки; они будут воспринимать их сразу как десяток, чему способствует расположение кружков двумя пятками.

— Сколько белых кружков в правой клетке? Сколько всех кружков в обеих клетках? Сколько кружков в левой клетке? Слушайте, дети. Когда считают какие-нибудь вещи по одной, то каждая вещь называется *«единицей»*. А иногда считают вещи десятками. Скажите, какие вещи считают десятками? Посмотрите, какая цифра написана внизу в левой клетке? А сколько десятков в этой клетке? Что же означает эта цифра 1? Какая цифра стоит внизу правой клетки? А сколько единиц (кружков) в этой клетке? Что же означает эта цифра 1? Как написать цифрами число одиннадцать?

Подобным же образом рассматриваются и остальные числовые фигуры, кончая фигурой девятнадцать, причем дети упражняются в письме чисел. Последними рассматриваются числовые фигуры десяти и двадцати. На первый из них детям уясняется уже знакомое им обозначение 10.

— Какая цифра написана внизу левой клетки? Что означает эта цифра? Есть ли здесь кружки в правой клетке, есть ли единицы? Какой знак написан внизу правой клетки? Что же означает ноль?

При рассмотрении числовой фигуры двадцати, переходя к письменному обозначению этого числа цифрами, учитель предложит детям вообразить, что все кружки из правой клетки перенесены в левую: тогда в левой клетке окажется 2 десятка, а правая клетка будет пустой.

Изучение нумерации заканчивается решением примеров на сложение 10 с однозначным числом ($10 + 3$, $6 + 10$, а также $10 + 10$) и на вычитание из числа второго десятка его собственных единиц и 10 ($14 - 4$, $15 - 10$, а также $20 - 10$).

§ 22. Сложение и вычитание без перехода через десяток.

В пределах двух десятков следует различать сложение и вычитание табличное и внетабличное. Табличное сложение — это сложение двух однозначных чисел, сумма которых превышает 10, как, например, $8 + 7$; табличное вычитание есть вычитание однозначного числа из числа второго десятка, когда получается в остатке однозначное число, как, например, $12 - 5$. При изучении табличных сложения и вычитания дети должны быть ознакомлены с приемами выполнения этих действий и, кроме того, должны усвоить на память все результаты таких сложений и вычитаний. К внетабличным случаям сложения относится сложение двузначного числа с однозначным, когда сумма их не более 20, как, например, $15 + 2$, $4 + 13$, $12 + 8$, $3 + 17$. Внетабличные случаи вычитания — это вычитание однозначного числа из числа второго десятка, когда остаток более 10, как, например, $17 - 4$, $20 - 6$, и вычитание числа второго десятка из числа второго десятка, как, например, $14 - 12$, $20 - 18$.

Для выполнения внетабличных сложения и вычитания надо знать таблицы этих действий, заключенные только в пределах первого десятка, так как сложение приводится к сложению однозначных чисел, сумма которых меньше 10 ($15 + 2$) или равна 10 ($12 + 8$); а вычитание приводится к вычитанию однозначного числа из однозначного ($17 - 4$) или из 10 ($20 - 6$).

По этой причине вслед за нумерацией чисел второго десятка мы поставили внетабличное сложение и вычитание в пределах 20, или сложение и вычитание без перехода через десяток. Такие сложение и вычитание уже дают начало общим правилам выполнения этих действий: складывать и вычитать числа по разрядам.

Учитель пишет $14 + 3$.

— Читайте. Сколько будет?

Большинство учеников дает правильный ответ, или доходя до него путем присчитывания по единице (15, 16, 17), или придавая сразу 3 к единицам первого слагаемого. Дело учителя довести детей до сознательного усвоения этого последнего приема. Записавши названную сумму ($14 + 3 = 17$), учитель спросит:

— Сколько десятков в 14? А сколько десятков в 17? Сколько единиц в 14? А сколько единиц в 17? Вы видите, что десяток как был один, так и остался один. К чему же прибавили вы 3 единицы?

— К 4 единицам.

— Вот видите: для того чтобы прибавить 3 к 14, надо разложить 14 на десяток и 4 единицы и прибавить 3 единицы к 4 единицам. К 4

прибавить 3 — сколько будет? К чему же теперь надо приложить 7 единиц? К 10 прибавить 7 — сколько будет? А как прибавили вы 7 к 10? сразу или нет? — Да, сразу; вы знаете, что число, которое состоит из десятка и 7 единиц, называется 17.

Следуют примеры.

Затем учитель пишет $5 + 13$.

— Читайте. Сколько будет?

Многие ученики дадут верный ответ. На вопрос, как вы это узнали, могут сказать: к 13 прибавили 5, переставили числа. Одоблив этот прием, учитель спросит:

— А как можно иначе прибавить 13 к 5? Из чего состоит число 13? Прибавим сначала 10 к 5. Сколько будет? Что теперь надо прибавить? К чему надо прибавить 3? Умеем ли мы прибавить 3 к 15? Да, умеем: мы уже раньше делали это.

Этот прием имеет значение подготовки к сложению двузначных чисел.

Следуют примеры.

Затем рассматривается сложение двузначного числа с однозначным, когда в сумме получается 20.

Учитель пишет $17 - 3$.

— Читайте. Сколько будет?

Большинство учеников дает верный ответ, или доходя до него путем отсчитывания по единице (16, 15, 14), или отнимая сразу 3 от единиц уменьшаемого. Дело учителя довести детей до сознательного усвоения этого последнего приема. Записавши названный остаток ($17 - 3 = 14$), учитель спросит:

— Сколько десятков в 17? А сколько десятков в 14? Сколько единиц в 17? А сколько единиц в 14? Вы видите, что десяток как был один, так и остался один. Откуда же отняли мы 3 единицы?

— От 7 единиц.

— Вот видите: для того чтобы отнять 3 от 17, надо разложить 17 на десяток и 7 единиц и отнять 3 единицы от 7 единиц. От 7 отнять 3 — сколько останется? Что еще останется сверх 4? Сколько же получится, когда от 17 отнимем 3?

Следуют примеры.

Далее учитель пишет $20 - 2$.

— Читайте. Сколько будет? (Получив ответ, записывает $20 - 2 = 18$). Из чего состоит число 20? Сколько осталось целых десятков? Сколько осталось от другого десятка? Вот видите: чтобы отнять 2 от 20, надо разложить 20 на 10, и 10; один десяток так и оставить, а от другого отнять 2. От 10 отнять 2 — сколько будет? Сколько останется еще сверх 8? Сколько же получится, если от 20 отнять 2?

Изложенный процесс вычитания полезно показать детям наглядно; обозначить число 20 пучками по десяти палочек, развязать один из пучков (роздробить десяток в единицы) и взять из него две палочки.

Следуют примеры.

Вычитание двузначного числа из двузначного начнем вычитанием одного десятка. Учитель пишет $16 - 10$.

— Читайте. Сколько получится? Как отняли вы 10 от 16: сразу или нет? Да, вы знаете, что 16 состоит из 10 и 6? Отнимем 10 — останется 6. От 18 отнимите 15 ($18 - 15$). Сколько останется?

Ученики, назвавши верно остаток, могут затрудниться в ответе на вопрос: как отняли вы 15 от 18?

— Из чего состоит число 15? Отнимем сначала 10 — сколько останется? Что теперь надо отнять? Откуда надо отнять 5? Сколько получится? Сколько же останется, если от 18 отнять 15? Повторите, как отняли мы 15 от 18?

Следуют примеры.

Подобным же образом выполняется вычитание двузначного числа из 20, например $20 - 14$.

При решении задач дети попутно знакомятся с монетами в 15 и 20 копеек.

§ 23. Увеличение и уменьшение на несколько единиц. Разностное сравнение¹.

До сих пор мы имели дело с такими случаями употребления действий, когда сложением надо узнать, сколько будет всего, вместе, а вычитанием — сколько останется. Мы еще не применяли этих действий к решению тех вопросов, в которых требуется сложением увеличить, вычитанием уменьшить одно число на другое и найти разность между двумя числами. Сделано было это потому, что на этих последних случаях применения действий следует остановиться особо и разъяснить детям относящиеся сюда выражения, что должно иметь место не прежде, чем дети освоятся со сложением и вычитанием в их прямом значении: узнать, сколько всего и сколько останется.

Обращаем внимание учителя на то, что выражения „больше и меньше на сколько-нибудь“ не совсем обычны в детской речи: в большинстве случаев было бы ошибочно предполагать, что дети знают эти выражения, что они им вполне понятны и что можно давать задачи, в которые входят эти выражения, не объяснив предварительно этих выражений так, как объясняются термины. Выражения „больше, меньше на сколько-нибудь“ можно разъяснить, сводя их к более знакомым детям выражениям: „столько-то лишку“, „столько-то нехватает“. Такую замену одних выражений другими следует делать возможно чаще, пока дети не освоятся с выражениями: „больше, меньше на сколько-нибудь“.

Учитель кладет на двух проволоках классных счетов, например, по 4 шарика.

— Сколько шариков положил я на верхней проволоке? сколько — на второй? На какой проволоке положено шариков больше?

— На обеих ровно, поровну.

На верхней проволоке кладется еще 3 шарика.

¹ Одновременное прохождение увеличения и уменьшения на несколько единиц и разностного сравнения создает большое нагромождение у учащихся новых и трудных для них понятий. Поэтому нужно признать более правильным тот порядок изучения этих понятий, который установлен в современной нам советской методике. — Ред.

— Сколько шариков положил я еще на верхней проволоке? Поровну ли теперь положено шариков на обеих проволоках? На какой проволоке больше? Сколько лишних шариков положено на верхней проволоке?

— Лишних 3 шарика.

— Слушайте, дети. Вместо „лишних 3 шарика“ будем говорить „больше на 3 шарика“. На верхней проволоке лишку 3 шарика. Скажите по-другому.

— На верхней проволоке больше на 3 шарика.

— Сколько крестиков написал я в ряд (5)? А внизу (во втором ряду) я хочу написать крестиков на 2 больше. Что это значит? Как сказать по-другому?

— Лишних 2 крестика.

— Как же это сделать?

— Написать 5 крестиков и еще 2 крестика.

— Сколько кубиков поставил я на планку (6)? А теперь кто-нибудь из вас пусть поставит на другой планке на 4 кубика больше. Что это значит: на 4 кубика больше? Как же это сделать?

— В одной комнате 6 стульев, а в другой на 3 стула больше. Что это значит: на 3 стула больше?

— Лишних 3 стула; 6 стульев да еще 3 стула.

— Сколько же стульев в другой комнате? Как это узнать?

— К 6 прибавить 3 — будет 9.

— Карандаш стоит 3 копейки, а тетрадь на 2 копейки дороже. Что это значит: дороже на 2 копейки?

— Тетрадь стоит лишних 2 копейки, стоит 3 копейки да еще 2 копейки.

— Сколько же стоит тетрадь? Как это узнать?

Слушайте, дети. Мы сейчас говорили „больше на 3 стула“, „дороже на 2 копейки“, говорят еще и так: „больше тремя стульями“, „дороже двумя копейками“.

У одного крестьянина 4 сына, а у другого одним сыном больше. Сколько сыновей у другого крестьянина? Как это узнать?

От деревни до села 5 км, а город от деревни 4 км дальше, чем село. Сколько километров от деревни до города?

К 6 прибавить 2. Сколько будет? Что больше: 8 или 6? Значит, когда мы вместо 6 получили 8 (из 6 сделали 8), то мы *увеличили* число 6. Что же мы сделали с числом 6?

— Мы увеличили его.

— Сколько прибавили мы к 6? Сколько стало лишних? Как сказать иначе?

— Стало больше на 2.

— На сколько увеличили мы число 6?

— Мы увеличили 6 на 2.

— Как же увеличить 6 на 2?

— Надо к 6 прибавить 2.

— Увеличьте 7 на 3. Сколько будет? Как вы это сделали? Увеличьте 4 на 6; 3 на 5 и т. д.

На двух проволоках классных счетов учитель кладет, например, по 8 шариков.

— Сколько шариков положено на верхней проволоке? сколько на нижней? На которой проволоке положено шариков больше? Сколько шариков

скинул я с нижней проволоки? Поровну ли теперь положено шариков на обеих проволоках? На которой меньше? Скольких шариков нехватает теперь на нижней проволоке?

— Нехватает 3 шариков.

— Не скажет ли кто это по-другому?

Если не последует желаемого ответа, учитель сам объясняет: вместо „нехватает 3 шариков“ будем говорить „меньше на 3 шарика“.

— Сколько крестиков написал я (10)? Теперь я хочу, чтобы здесь было на 2 крестика меньше. Как же это сделать?

— 2 крестика стереть.

— Сколько кубиков стоит на планке (7)? Я хочу, чтобы тут было четырьмя кубиками меньше. Как же это сделать?

— 4 кубика снять, отнять.

— Брат умеет писать 9 букв, а сестра на одну букву меньше. Сколько букв умеет писать сестра? Как это узнать?

У рабочего две комнаты: одна длиной в 10 м, другая 3 м короче. Сколько метров имеет в длину вторая комната? Как это узнать?

От 7 отнимите 2 — сколько будет? Что меньше: 5 или 7? Значит, когда мы вместо 7 получили 5 (из 7 сделали 5), то мы уменьшили число 7. Что же мы сделали с числом 7? Сколько отняли мы от 7? На сколько уменьшили мы число 7? Как же уменьшить 7 на 2?

— От 7 надо отнять 2.

— Уменьшить 5 на 3. Сколько будет? Как вы это сделали? Уменьшите 8 на 4; 10 на 6 и т. д.

На одной проволоке классных счетов учитель кладет, например, 7, а на другой 4 шарика.

— Сколько шариков положено на верхней проволоке? Сколько на нижней? На которой проволоке положено шариков больше? Сколько лишних положено на верхней проволоке?

— Лишних 3 шарика.

— А как сказать это по-другому?

— Больше на 3 шарика.

— На сколько же 7 шариков больше 4 шариков?

— 7 шариков больше 4 шариков на 3 шарика.

— Сколько крестиков написано в верхнем ряду (8)? сколько в нижнем (6)? Где меньше крестиков? Скольких крестиков внизу нехватает?

— Нехватает 2 крестиков.

— Как сказать это по-другому?

— Меньше на 2 крестика.

— На сколько же 6 крестиков меньше 8 крестиков?

— 6 крестиков меньше 8 крестиков на 2 крестика.

Приведенные два упражнения имеют целью навести учеников на разностное сравнение чисел. После этого показывается детям прием разностного сравнения: чтобы узнать, на сколько одно число больше или меньше другого, надо от большего из них отнять меньшее.

Учитель вызывает к своему столу двух учеников и на виду у всего класса дает одному из них, например, 5 кубиков, другому — 9 кубиков.

— Сосчитай вслух, сколько кубиков дал я тебе. Сосчитай теперь ты. (Обращаясь ко всем.) Кому из них дал я кубиков больше? Узнаем,

сколько дал я ему лишних? Дай мне назад все кубики. (Ученик отдает 5 кубиков.) И ты дай мне назад кубики, только лишние оставь себе. (Ко всем.) Сколько же он должен отдать мне кубиков?

— Тоже 5 кубиков.

— Сколько у тебя осталось кубиков? (Ко всем.) Сколько же дал я ему лишних?

— Лишних 4 кубика.

— Как сказать по-другому?

— Больше на 4 кубика.

— Сколько кубиков дал я одному? другому? На сколько же 9 кубиков больше 5 кубиков? Когда у него остались лишние кубики?

— Когда он отдал назад 5 кубиков.

— Как же получить лишек?

— Надо от 9 кубиков отнять 5 кубиков.

— Как узнать, на сколько 9 кубиков больше 5 кубиков?

— Надо от 9 кубиков отнять 5 кубиков.

Можно еще раз повторить это объяснение, несколько видоизменивши его. Учитель чертит на классной доске две группы крестиков:

× × × × × × × × × × × × × × × × × ×

— Где больше крестиков: в первом или во втором ряду (налево или направо)? Кто может указать, где здесь (во втором ряду) лишние крестики? Как бы это сделать (как отыскать лишние крестики)?

— Надо отсчитать столько крестиков, сколько их в первом ряду.

— Сколько крестиков в первом ряду? Поди, отсчитай во втором ряду столько же крестиков.

Ученик отсчитывает 7 крестиков, идя, например, от правой руки к левой; остальные крестики учитель отмечает, например подчеркивая их.

— Укажи лишние крестики. Сколько их? На сколько крестиков во втором ряду больше, чем в первом? Сколько всех крестиков во втором ряду? а в первом? На сколько же 10 крестиков больше 7 крестиков? Как мы это узнали?

— От 10 крестиков отсчитали, отняли 7 крестиков — осталось 3 крестика.

— Сколько крестиков недостает в первом ряду до второго? На сколько 7 крестиков меньше 10 крестиков? А как мы это узнали?

— От 10 крестиков отняли 7 крестиков.

— На сколько 8 больше 3? Как это узнать? На сколько 6 меньше 9? Как это узнать?

В первом классе 15 девочек, а во втором — 12 девочек. В каком классе больше девочек? На сколько больше? Как это узнать?

— От 15 отнять 12 — останется 3.

— В саду 7 яблонь, а грушевых деревьев 4. Чего меньше в саду: яблонь или грушевых деревьев? На сколько штук меньше? Как это узнать?

— От 7 отнять 4 — получится 3.

— Брату 8 лет, сестре 6 лет. Кто из них старше? На сколько лет брат старше? Как это узнать?

§ 24. Сложение с переходом через десяток (табличное сложение).

Наиболее удобный прием сложения двух однозначных чисел, дающих в сумме более 10, состоит в разложении придаваемого числа на такие две группы, из которых одна дополняет первое слагаемое до 10. Так, чтобы к 8 прибавить 7, разбиваем 7 на 2 и на 5: $8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15$.

— К 6 прибавить 4 — сколько будет? Делали ли вы сейчас какой-нибудь счет или сказали сразу, на память, что 6 да 4 будет 10? А если бы вы забыли это, то как стали бы прибавлять 4 к 6?

— По одному.

— К 6 прибавить первую единицу — будет 7. Продолжайте.

— К 7 прибавить вторую единицу — будет 8, к 8 — третью, будет 9, к 9 — четвертую, будет 10.

Или так:

— К 6 прибавить 1 — будет 7; осталось прибавить 3; к 7 прибавить 1 — будет 8; осталось прибавить 2; к 8 прибавить 1 — будет 9; осталось прибавить 1; к 9 прибавить 1 — будет 10.

— К 10 прибавить 7 — сколько будет? Делали ли вы сейчас какой-нибудь счет или сразу узнали, что будет 17?

— Узнали сразу.

— Да, вы знаете, что число, которое состоит из одного десятка и семи единиц, называется семнадцать (семь сверх десяти — семнадцать).

— К 8 прибавить 6 — сколько будет?

Некоторые ученики могут ответить верно, другие — нет.

— Если мы не знаем, сколько составят 8 и 6, то как станем прибавлять 6 к 8?

— По одному. К 8 прибавить 1 — будет 9; осталось прибавить 5; к 9 прибавить 1 — будет 10; осталось прибавить 4.

— К чему же надо теперь прибавить 4? Как прибавите вы 4 к 10? (Сразу.) Сколько будет? Сколько же получится, если к 8 прибавить 6? Для того чтобы прибавить 6 к 8, мы стали сначала прибавлять по одному. До которых пор шли мы, прибавляя по одному? Надо ли непременно прибавлять по одному, чтобы дойти до 10? Можно ли прибавить сразу 2? Как же лучше прибавить 6 к 8?

— Сначала прибавить 2 к 8, потом 4 к 10.

— Как прибавите вы 5 к 7, если не можете прибавить сразу?

— С двух раз: сначала прибавить 3 к 7 — будет 10; потом 2 к 10 будет 12.

— На какие же части разбили вы число 5, для того чтобы прибавить его к 7?

— Мы разбили 5 на 3 и 2.

— Почему вы разбили 5 на 3 и 2?

— Потому что к 7 надо прибавить 3, чтобы вышло 10.

— А почему мы хотим получить 10?

— Потому что тогда остальное прибавим к 10 сразу.

Кроме приведенного объяснения, этот прием сложения удобно показывать на счетах. Уговорившись с учениками считать шарик нижней про-

волоки за единицу, а шарик второй снизу проволоки за десяток (в случае торговых счетов здесь разумеются проволоки копеек и гривенников или рублей и десятков рублей), учитель предлагает детям сделать на счетах, например, сложение $7 + 5$. Положив на нижней проволоке 7 шариков, дети прибавят к ним остальные 3 шарика, заменят положенные 10 шариков одним шариком второй проволоки и отложат на нижней проволоке 2 шарика. По наводящим вопросам учителя дети объясняют, почему они к 7 прибавили 5 с двух раз; сначала прибавили 3 к 7 и потом 2 к 10.

Ознакомившись с указанным приемом сложения, дети должны проделать и во время занятий с учителем и самостоятельно достаточное количество упражнений, для того чтобы усвоить на память все сложения однозначных чисел, сумма которых превышает 10.

Для достижения последней цели, а равно и для уяснения приема сложения, весьма полезными могут оказаться уже знакомые детям фигуры чисел второго десятка.

Приводимая здесь таблица числовых фигур (рис. 15) содержит вразбивку все случаи сложения однозначных чисел, дающих в сумме более 10.

Желательно, чтобы все эти числовые фигуры были рассмотрены учениками под руководством учителя.

Приведем пример рассмотрения фигур на первой фигуре, соответствующей сложению $9 + 2$.

— Сколько всех кружков в левой клетке? сколько в правой? 10 и 1 — это сколько? Сколько в этой фигуре черных кружков? сколько белых? К 9 прибавить 2 — сколько будет? Но 11 — это 10 и 1; как составить 10 и 1 из 9 и 2? — Надо к 9 прибавить 1 — будет 10; да еще сверху 10 будет 1, а всего 11.

По мере рассмотрения фигур вопросы учителя становятся менее подробными. Возьмем для примера сложение $8 + 7$.

— Какое число изображает эта фигура? Из каких чисел требуется здесь составить 15? Как это сделать?

Нелишним считаем и при решении задач обращаться, хотя бы временами, к числовым фигурам. Можно предоставить делать это ученикам и при решении примеров во время самостоятельных занятий.

После указанных упражнений на числовых фигурах, на задачах и примерах можно дать детям в виде самостоятельной работы составление таблицы сложения в порядке, причем следует обратить внимание учеников на то, что таблицу сложения надо знать на память, наизусть.

Прежде чем задать детям составление таблицы сложения в порядке, считаем нелишним познакомить учеников с терминами „сложить“¹,

¹ Термин „сложить“ вследствие его простоты ученики могли сами ввести раньше.

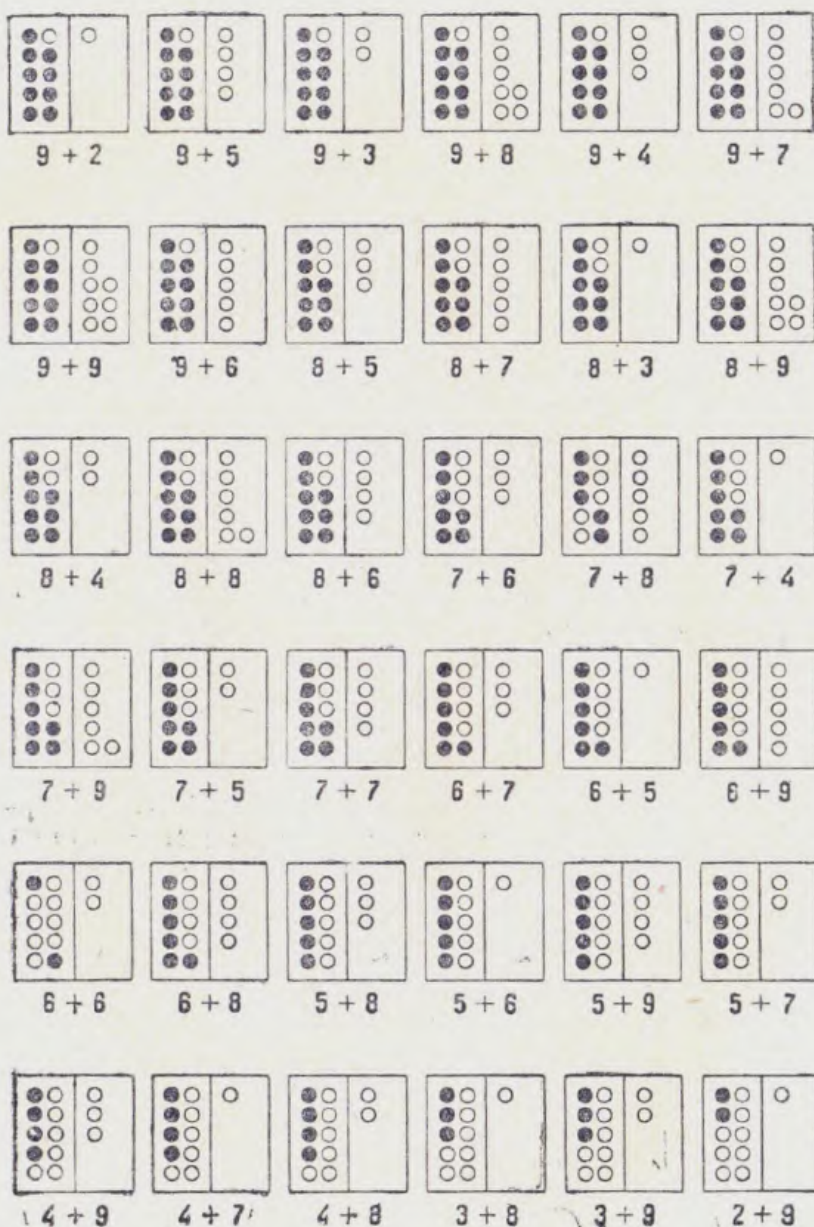


Рис. 15.

„сложение“, „однозначное число“; этими терминами можно воспользоваться для того, чтобы сообщить детям название „таблица сложения“ и указать ее состав.

На планку доски ставится 5 кубиков налево и 3 кубика направо.

— Сколько кубиков поставил я налево? сколько направо? (Придвигает правые кубики к левым.) Что я сделал, как сказать?

— Вы приложили, прибавили 3 кубика к 5 кубикам.

— К 5 кубикам прибавить 3 — сколько будет? Поди и запиши это ($5 + 3 = 8$).

Кубики ставятся, как раньше стояли. Затем учитель придвигает левые кубики к правым.

— Что теперь я сделал, как сказать?

— Вы прибавили 5 кубиков к 3 кубикам.

— К 3 прибавить 5 — сколько будет? Поди и запиши это ($3 + 5 = 8$).

Кубики расставляются попрежнему. Затем учитель сдвигает и те и другие кубики к середине планки.

— Что теперь я сделал, как сказать? Какие кубики я приложил: правые к левым или левые к правым?

— Вы сложили их вместе.

— Иногда и говорят: сложить 5 и 3, вместо того чтобы сказать: к 5 прибавить 3 или к 3 прибавить 5. Как же можно прочитать то, что написано на доске?

— Сложить 5 и 3 — будет 8. Сложить 3 и 5 — будет 8.

— Когда мы складываем числа, то делаем *действие*, которое называется *сложением*. Как же называется то действие, которое мы делаем, когда складываем числа? Сделайте сложение чисел 9 и 4.

— 9 и 1 — будет 10; 10 и 3 — будет 13.

— Сколько надо цифр, чтобы написать число 8?

— Одну цифру.

— А сколькими цифрами пишется число 17?

— Двумя цифрами.

— Такие числа, которые пишутся одной цифрой или одним знаком, называются *однозначными*. Какие же числа называются однозначными? Переберите все однозначные числа. Слушайте, дети. Вы уже складывали все однозначные числа попарно (одно с другим). Теперь вы еще раз сложите их в том порядке, как показано в книжке. У вас получится тогда *таблица сложения*. В этой таблице сложены все однозначные числа друг с другом. Таблицу эту вы должны знать наизусть, т. е. если вас спросят, сколько 8 да 7, сколько 6 да 6 и т. д., вы должны отвечать сразу, на память.

Небесполезным и довольно интересным для детей занятием может служить и составление таблицы сложения в форме квадрата, как это показано в § 8 гл. II настоящего руководства.

§ 25. Табличное вычитание.

Наиболее удобный прием табличного вычитания за пределом десяти состоит в разложении вычитаемого числа на такие две группы, из которых одна (отнимаемая сначала) равна единицам

уменьшаемого. Так, чтобы от 12 отнять 5, разбиваем 5 на 2 и на 3; $12 - 5 = 12 - 2 - 3 = 10 - 3 = 7$.

— От 10 отнять 3—сколько останется? Делали ли вы сейчас какой-нибудь счет или сказали сразу, на память, что 10 без 3 будет 7?

— От 14 отнять 4—сколько останется? Делали ли вы сейчас какой-нибудь счет или сразу узнали, что останется 10? Да, сразу: вы знаете, что 14 состоит из 10 и 4; если отнять 4, то останется 10. От 12 отнять 5—сколько будет?

Некоторые ученики могут ответить верно, другие — нет.

— Если мы не знаем, сколько будет 12 без 5, то как станем отнимать 5 от 12? Вы уже умеете отнимать сразу от 10. Что еще есть в 12 сверх 10? Сколько надо отнять от 12, чтобы осталось 10? Если вы уже отняли 2, а всего нам надо отнять 5, то сколько нам придется еще отнимать? Откуда надо отнять 3? Как отнимаете вы 3 от 10? (Сразу.) Повторите, как отняли мы 5 от 12? На какие части разбили мы число 5, для того чтобы отнять его от 12? Почему разбили мы 5 на 2 и 3?

— Потому что от 12 надо отнять 2, чтобы осталось 10.

— А почему мы хотим, чтобы осталось 10?

— Потому что тогда остальное отнимем от 10 сразу.

Этот прием вычитания удобно показать и на счетах. Дети кладут на счетах, например, число 14. От 14 надо отнять, например, 6. На нижней проволоке положено только 4 шарика; их сначала и отнимаем. Остается шарик, положенный на второй проволоке и означающий десяток. Заменяем десяток (шарик второй проволоки) десятью единицами (10 шариками нижней проволоки). От 10 отнимаем остальные 2 единицы. По наводящим вопросам учителя дети объясняют, почему они от 14 отняли 6 с двух раз; сначала отняли 4 от 14 и потом 2 от 10.

Уяснению этого приема и усвоению на память табличного вычитания за пределом десяти большую помощь могут оказать фигуры чисел второго десятка.

Приводимая здесь таблица числовых фигур (рис. 16) содержит все случаи табличного вычитания за пределом десяти. Предлагаем учителю тотчас после изложенного выше объяснения приема вычитания рассмотреть с учениками каждую фигуру этой таблицы, подобно тому как это было сделано при изучении табличного сложения.

Приведем пример рассмотрения этих фигур на фигуре, соответствующей вычитанию $12 - 5$.

— Какое число изображает эта фигура? Сколько тут всех белых кружков? От 12 кружков отнимем эти 5 белых кружков и узнаем, сколько останется черных кружков? Чтобы узнать это, надо ли обращать внимание на те белые кружки, которые находятся в правой клетке? Какие же белые кружки надо отнимать и откуда надо их отнимать?

— Надо от 10 кружков отнять 3 белых кружка, которые в левой клетке.

— Значит, чтобы отнять 5 кружков от 12, мы откидываем (отнимаем) сначала те 2 кружка, которые здесь есть сверх 10, потом от 10 отнимаем остальные 3 кружка.

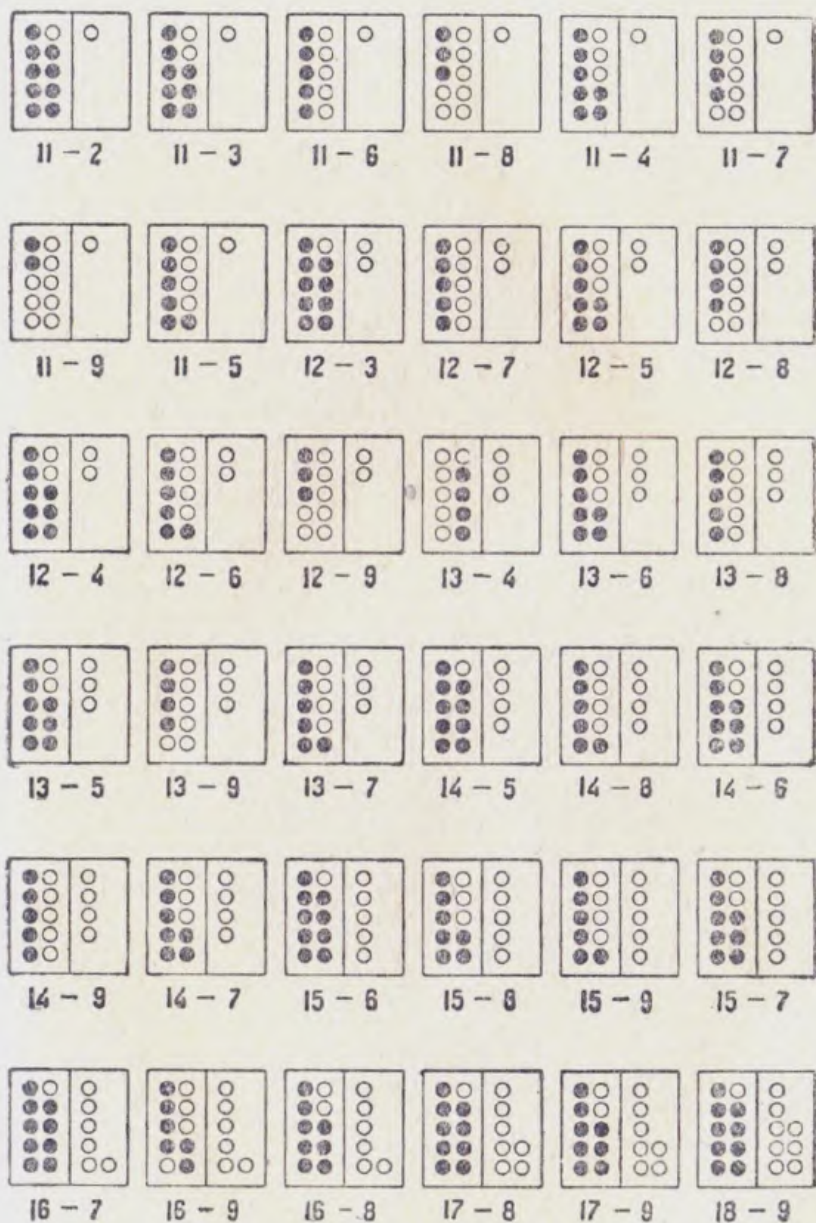


Рис. 16.

По мере рассмотрения фигур вопросы учителя становятся менее подробными. Возьмем для примера вычитание $13 - 8$.

— Какое число изображает эта фигура? Сколько требуется отнять от 13? Как это сделать?

Для дальнейших упражнений в табличном вычитании за пределом десяти нужно решать задачи и примеры. Во время решения задач полезно обращаться иногда к числовым фигурам. То же самое можно предоставить делать ученикам при решении примеров во время самостоятельных занятий.

Полезно давать упражнения в так называемом разложении и дополнении чисел (см. § 16 гл. III). Упражнения эти, связывая вычитание со сложением, дают возможность найти результат табличного вычитания при помощи таблицы сложения. Пусть, например, надо от 14 отнять 6. Искомый остаток дает нам разложение $14 = 6 + ?$, которое мы решаем, припомнив по таблице сложения, что 14 состоит из 6 и еще из 8. Пусть надо узнать, на сколько 15 больше 8. Искомую разность даст нам дополнение $8 + ? = 15$, которое мы находим, припомнив по таблице сложения, что к 8 надо прибавить 7, чтобы получить 15.

В заключение упражнений в табличном вычитании учитель дает детям в виде самостоятельной работы составление таблицы вычитания. Предварительно учитель знакомит детей с терминами „вычесть“, „вычитание“, после чего можно сообщить и название „таблица вычитания“. При этом обращается внимание учеников на то, что таблицу вычитания, как и таблицу сложения, надо знать на память, наизусть.

Если раньше учениками была написана таблица сложения в форме квадрата, то теперь учитель покажет детям, что эта же таблица может служить и таблицей вычитания (см. § 8 гл. II).

§ 26. Умножение.

Сложение и вычитание в пределе двадцати позволяют выдвинуть далее и таблицы остальных двух действий, некоторые результаты которых уже знакомы детям после изучения первого десятка.

Напомнив ученикам значение выражения „взять или повторить несколько раз“ и знака $\times$, а вместе с тем и способ выполнения этого действия путем сложения, следует указать детям на удобство пользоваться уже знакомыми результатами действий при получении результатов новых: так, умея брать сразу, на память 2, 3, 4 и 5 двоек (предел первого десятка), мы наберем 7 двоек, взяв сначала 5 двоек, потом 2 двойки (или 4 или 3 двойки).

Учитель пишет $3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

— Читайте.

— К 3 прибавить 3, еще прибавить 3, еще прибавить 3 и еще прибавить 3.

— Прибавляйте.

— К 3 прибавить 3 — будет 6; к 6 прибавить 3 — будет 9; к 9 прибавить 3 — будет 12; к 12 прибавить 3 — будет 15.

Результат записывается: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

— Как короче можно прочитать то, что написано?

— 3 повторить 5 раз — будет 15.

— Как короче можно записать это? Ступай и запиши.

Ученик пишет $3 \times 5 = 15$.

— Для того чтобы 3 повторить 5 раз, мы сейчас набирали по одной тройке. Нельзя ли сделать это скорее?

— Можно набирать по 2 тройки, по 3 тройки.

— Самое большее — сколько троек мы уже умеем взять сразу, на память? (Самое большее — сколько троек вам уже раньше приходилось брать сразу?)

— 3 тройки.

Учитель соединяет 3 тройки, например обводя их кривой линией или подчеркивая: $3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

— 3 тройки — это сколько (единиц)? Сколько троек нам осталось еще взять? 2 тройки — это сколько? Что теперь надо сделать?

— К 9 прибавить 6 — будет 15.

— Как же набрали мы 5 троек?

— Сначала взяли (сразу) 3 тройки, потом 2 тройки.

— Да, сначала мы повторили тройку 3 раза, потом 2 раза. Как удобно 2 повторить 7 раз?

— Сначала 2 повторить 5 раз — будет 10; потом 2 повторить 2 раза — будет 4; к 10 прибавить 4 — получится 14.

§ 27. Деление.

Здесь, как и раньше, мы считаем преждевременным объединять оба вида деления и предлагаем различать их, употребляя такие выражения, как „12 разделить на 3 равные части“ и „12 разделить на тройки“. То и другое деление может быть выполнено 1) путем разложения делимого на группы с целью воспользоваться уже знакомыми результатами деления: чтобы разделить 14 пополам, разделим пополам сначала 10, потом 4; чтобы разделить 18 на тройки, разделим на тройки 9, потом еще 9; 2) при помощи таблицы умножения: для деления 14 пополам припоминаем, какое число надо повторить 2 раза, чтобы получить 14; для деления 18 на тройки припоминаем, сколько раз надо повторить тройку, чтобы получить 18.

А. Деление на равные части. — Ученик сшил 2 одинаковые тетради из 14 листов бумаги. Как узнать, сколько листов пошло на каждую тетрадь?

— Надо 14 разделить на 2 равные части, пополам.

— Самое большее — сколько вы умеете разделить пополам сразу на память? (Самое большее — сколько вам уже приходилось делить пополам?)

— Самое большее — 10.

— Как же разделите вы 14 пополам?

— 10 разделить пополам — будет 5; 4 разделить пополам — будет 2; 5 да 2 — будет 7.

— Сколько же будет, если 14 разделить на 2 равные части? Запишите это ($14:2=7$). Сколько листов бумаги пошло на каждую тетрадь?

За 4 карандаша заплачено 20 копеек. Как узнать, сколько стоит один карандаш? Я скажу вам, что карандаш стоит 3 копейки. Верно ли это? Почему нет?

— Потому что за карандаши тогда было бы заплачено 12 копеек.

— А как узнать, что тогда за карандаши было бы заплачено 12 копеек?

— 3 повторить 4 раза — будет 12.

— Может быть, карандаш стоит 4 копейки? Почему нет?

— 4 повторить 4 раза — будет только 16.

А если мы скажем, что карандаш стоит 5 копеек, будет ли это так? Почему так? Вот видите: чтобы разделить 20 на 4 равные части, нужно припомнить, какое число надо повторить 4 раза, чтобы получилось 20.

Упражнения в делении на равные части нужно начать примерами и заданиями, предназначенными для повторения этого действия в пределах 10. Во всех примерах переход к делению нужно делать от умножения: вначале нужно ставить умножение, например 8×2 , затем отыскивать множимое $? \times 2 = 16$ и, наконец, деление $16:2$.

Заканчивая деление на равные части, считаем здесь уместным дать детям понятие о простейших долях единицы, каковы

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}.$$

Еще при изучении деления в пределах первого десятка дети ознакомились с выражениями „половина“, „третья часть“, „четвертая часть“ и т. д. и знают, как найти половину, третью и т. д. части какогонибудь числа, например половину 18, пятую часть 20 и т. д.

Здесь можно привести примеры того, как иногда приходится делить на части одну единицу (разделить одно яблоко поровну между двумя сестрами, раздать один лист бумаги поровну четверем ученикам и т. п.), и показать письменное обозначение долей.

Учитель проводит на классной доске прямую линию длиной в метр. Эта линия и будет изображать 1 метр. Начертив под нею еще такую же линию, учитель делит ее полам.

— На сколько равных частей разделил я метр? Как назовете вы каждую часть?

— Половина метра, полметра.

— Смотрите, как обозначается половина: пишется цифра 1, внизу проводится лежачая черточка, а под черточкой пишется цифра 2. Наверху

* Первоначальное знакомство с долями программа советской школы относит к началу второго класса, давая его в связи с изучением табличного и внетабличного деления в пределах 100. Введение дробных чисел в центр второго десятка нужно признать преждевременным. Методические приемы, рекомендуемые Аржентниковым могут найти свое применение и при проработке дробей во втором классе.

пишется цифра 1, потому что мы обозначаем только 1 часть (метр) — 1 половину; а внизу ставится цифра 2, для того чтобы показать, что весь метр мы разделили на 2 равные части.

Подобным же образом можно показать письменное обозначение и прочих долей.

Мы ограничиваемся здесь ознакомлением детей лишь с *одной* долей единицы, не вводя в употребление *нескольких* долей, каковы, например, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$ и т. д.

Упражнения с долями, служащие в то же время и упражнениями в делении на равные части, состоят в отыскании части (только одной части) данного числа с употреблением письменного обозначения долей.

Б. Деление по содержанию. — Мальчик разложил 15 орехов на кучки, по 3 ореха в каждой. Как узнать, сколько вышло таких кучек?

— Надо 15 разделить на тройки.

— Самое большее — какое число вы умеете разделить на тройки сразу?

— Самое большее — 9.

— Если вы сначала разделите на тройки 9, то потом что еще надо будет разделить?

— Потом надо будет разделить 6.

— А как узнать, что потом надо будет разделить 6?

— От 15 отнять 9 — останется 6.

— Так как же разделить 15 на тройки?

— 9 разделить на тройки — будет 3 тройки; 6 разделить на тройки — выйдет 2 тройки; 3 да 2 — всего 5 троек.

— 15 разделить на тройки — сколько будет (троек)? Запишите это (15:3-ки=5). На сколько же кучек разложил мальчик орехи?

— Крестьянин пошел из деревни в село, до которого 18 км; каждый час проходил он по 3 км. Как узнать, во сколько часов дошел он до села?

— Надо 18 разделить на тройки.

— Я скажу вам, что крестьянин дошел в 4 часа. Верно ли это? Почему нет?

— Потому что в 4 часа он пройдет только 12 км.

— А как это узнать?

— 3 повторить 4 раза — будет 12.

— Может быть, он дошел в 5 часов? Почему нет? Не в 6 ли часов дошел он до села? Почему так? Вот видите: чтобы разделить 18 на тройки, нужно припомнить: сколько раз надо повторить тройку, чтобы получить 18.

Упражнения в делении по содержанию должны быть расположены так, чтобы сначала шли примеры для повторения действия в пределах первого десятка; потом задачи и примеры на деление чисел второго десятка на двойки, тройки и четверки; задачи и примеры на остальные случаи деления по содержанию в пределах 20. В численных примерах переход к делению совершается от умножения: за умножением (6×3) идет отыскание множителя ($6 \times ? = 18$), а затем деление по содержанию (18:6-ки).

В. Оба вида деления. Когда деление на равные части и деление по содержанию пройдены порознь, следует сопоставить оба вида деления, подобно тому как это было сделано при изучении деления в пределах первого десятка (см. § 19 гл. III). Для этого должны служить соответственно подобранные задачи.

В конце упражнений в делении целесообразно давать задачи и примеры на деление с остатком. Такое деление довольно часто встречается в практических вопросах-задачах; кроме того, оно будет необходимо при дальнейшем изучении этого действия. Мы полагаем, что предшествующих упражнений в делении вполне достаточно, для того чтобы ученики сразу узнали наибольшее число, которое можно разделить без остатка. Так, при решении задач дети сразу определяют, что например из 20 перьев можно поровну раздать 6 ученикам самое большее 18 перьев; что из 17 м можно сшить только 5 платьев по 3 м. В случае же затруднения можно заставить учеников выполнить деление одним из вышеизложенных приемов.

§ 28. Увеличение и уменьшение в несколько раз. Кратное сравнение¹.

До сих пор мы применяли умножение к таким вопросам, в которых требовалось найти сумму равных слагаемых или повторить число несколько раз; а деление — к таким, в которых надо было отыскать часть числа (разделить на равные части) и разложить число на части определенной величины (узнать, сколько раз одно число содержится в другом). Теперь мы переходим к ознакомлению детей с употреблением умножения и деления, для того чтобы увеличить, уменьшить число в несколько раз и определить, во сколько раз одно число больше или меньше другого (кратное сравнение чисел). На этих последних случаях применения умножения и деления (равно как и на соответственных случаях употребления сложения и вычитания) следует остановиться особо и разъяснить детям относящиеся сюда выражения, что должно иметь место не раньше, чем дети освоятся с умножением и делением в их прямом значении.

На две планки доски ставится по два кубика на каждую (или кладется по два шарика на двух проволоках классных счетов).

— Сколько кубиков поставил я на верхнюю планку? на нижнюю? На которую поставлено кубиков больше?

Учитель снимает кубики с планок, потом ставит на одну из них два кубика, а на другую — три пары кубиков, оставляя промежутки между парами.

¹ Увеличение и уменьшение в несколько раз и кратное сравнение, как трудные для детей математические понятия, отнесены программой советской школы на второй год обучения и даются в связи с табличным умножением в пределах 100. Методика ознакомления с этими понятиями, данная Аржениковым, может быть полностью использована учителем. *Ред.*

— Сколько кубиков стоит на верхней планке? (2). На нижней? (6) Столько ли кубиков на нижней планке, сколько и на верхней?

— Нет, внизу кубиков больше.

— Видите, дети. Внизу кубиков столько же, да еще столько, да еще столько — *3 раза по столько*. Поэтому мы скажем: внизу кубиков в *3 раза больше*. На нижней планке кубиков столько же, сколько на верхней, да еще столько, да еще столько; *3 раза по столько*. Скажите это по-другому.

— На нижней планке кубиков в *3 раза больше*, чем на верхней.

— Сколько крестиков написал я? (2). А внизу (во втором ряду) я хочу написать крестиков в *4 раза больше*. Что это значит?

— Столько, еще столько, еще столько, да еще столько: *4 раза по столько*.

Учитель ставит 4 пары крестиков.

— Сколько шариков положил я? (3). А теперь кто-нибудь из вас положит на другой проволоке в *2 раза больше шариков*. Что это значит?

— Столько же, да еще столько: *2 раза по столько*.

— Слушайте, дети. Вместо того чтобы сказать „в два раза“, говорят также „вдвое“. На второй проволоке положено у нас шариков в *два раза больше*. Скажите по-другому.

— Вдвое больше.

— На верхней планке у нас стоит 2 кубика, а на нижней *3 раза по 2 кубика*. Как сказать это по-другому?

— На нижней планке кубиков в *3 раза больше*.

— А еще как можно сказать?

— Втрое больше.

— В одном ряду у нас написано 2 крестика, а в другом *4 раза по 2 крестика*. Скажите это иначе.

— В другом ряду крестиков в *4 раза больше*.

— А еще как можно сказать?

— Вчетверо больше.

— В 5 раз больше — как сказать иначе?

— Впятеро больше.

— Учитель дал ученику белой бумаги 2 листа, а серой в *4 раза больше*. Что это значит: в *4 раза больше*?

— Серой бумаги он дал ему столько же, да еще столько, да еще столько, да еще столько: *4 раза по столько*.

— Сколько же серой бумаги дал учитель ученику? Как это узнать?

— 2 повторить 4 раза — будет 8.

— Кастрюля весит 2 кг, а самовар втрое тяжелее. Что это значит?

— Самовар весит столько, да еще столько, да еще столько: *3 раза по столько*.

— Сколько же весит самовар? Как это узнать?

— 2 повторите 5 раз. Сколько будет? Что больше: 10 или 2? Значит, когда мы вместо 2 получили 10 (из 2 сделали 10), то мы *увеличили* число 2. Что же сделали мы с числом 2?

— Мы *увеличили* число 2.

— Сколько раз по 2 взяли мы? Во сколько же раз *увеличили* мы число 2? Как же *увеличить* 2 в 5 раз; *впятеро*?

— Надо 2 повторить 5 раз.

— Увеличьте 4 в 2 раза. Сколько будет? Как вы это сделали? Увеличьте 5 вдвое, 3 втрое, 2 вдвое и т. д.

На одной проволоке классных счетов кладется 3 шарика, на другой — 2 раза по 3 шарика.

— Сколько шариков положено на верхней проволоке? сколько на нижней? На которой положено шариков больше? Во сколько раз больше? А на какой проволоке положено шариков меньше? На нижней проволоке положено шариков в 2 раза больше, чем на верхней; значит, на верхней в 2 раза меньше, чем на нижней. Во сколько же раз наверху шариков меньше?

— В 2 раза меньше, вдвое меньше.

— На сколько равных частей разделены те шарики, что положены на нижней проволоке?

— На две равные части, пополам.

— По сколько шариков в каждой части? Вы видите, дети: на верхней проволоке только половина тех шариков, что положены на нижней проволоке, и там шариков в 2 раза меньше.

— Сколько кубиков поставил я на планку? (10). А на другую планку я хочу поставить кубиков в 2 раза меньше. Что это значит: в 2 раза меньше?

— Значит, половину 10 кубиков.

— 10 кубиков разделить пополам — сколько будет в каждой части? (Раздвигает кубики.) Сколько же кубиков надо поставить на другую планку?

— Сколько крестиков написал я? (6). А во втором ряду я хочу написать крестиков втрое меньше. Что это значит: втрое меньше? Какую часть 6 крестиков должен написать я во втором ряду?

— Третью часть.

— А что надо сделать, чтобы найти третью часть 6?

— Надо 6 разделить на 3 равные части — будет 2.

Учитель делит 6 крестиков на 3 равные части, например ставя черточки между этими частями.

— Сколько же крестиков надо написать во втором ряду?

Мальчик подобрал под одной яблоней 10 яблок, а под другой — в 5 раз меньше. Что это значит: в 5 раз меньше? (Пятую часть.) Как узнать, сколько яблок подобрал он под другой яблоней?

— 10 разделить на 5 равных частей — будет 2; 2 яблока.

— Брату 9 лет, сестра втрое моложе брата. Сколько лет сестре? Как это узнать?

— 9 разделить на 3 равные части — будет 3.

— 8 разделить на две равные части — сколько будет? Что меньше: 4 или 8? Значит, когда мы вместо 8 получили 4 (из 8 сделали 4), то мы уменьшили число 8. Что же сделали мы с числом 8? Мы получили половину 8. Это во сколько раз меньше 8? Во сколько же раз уменьшили мы число 8? Как же уменьшить 8 в 2 раза?

— Надо 8 разделить на 2 равные части, пополам.

— Уменьшить 8 вчетверо. Сколько будет? Как вы это сделали? Уменьшите 4 в 2 раза, 7 в 7 раз и т. д.

На одну планку доски ставятся 2 кубика, на другую — 6 кубиков парами.

— Сколько кубиков на верхней планке? Сколько на нижней? Где кубиков больше? Во сколько раз внизу кубиков больше? Да, вверх одна пара кубиков, а внизу 3 пары; значит, столько, да еще столько, да еще столько — 3 раза по столько, больше в 3 раза, втрое. Во сколько же раз 6 кубиков больше 2 кубиков?

— 6 кубиков больше 2 кубиков в три раза, втрое.

— 2 кубика во сколько раз меньше 6 кубиков?

— 2 кубика меньше 6 кубиков в три раза, втрое.

На одну планку доски ставятся 2 кубика, на другую — 10 кубиков сплошным рядом.

— Сколько кубиков на верхней планке? Сколько на нижней? Где больше кубиков? Во сколько раз внизу больше кубиков?

Если дети не ответят на последний вопрос, их можно навести на желаемый вопрос следующим образом:

— Вот, вы сказали мне, во сколько раз 6 кубиков больше 2 кубиков. Почему же теперь затрудняетесь сказать, во сколько раз 10 кубиков больше 2 кубиков?

— Там 6 кубиков были расставлены парами.

— Значит, что же нам надо сделать, чтобы узнать, во сколько раз 10 кубиков больше 2 кубиков?

— Надо 10 кубиков расставить парами.

— Да, надо 10 кубиков разделить на пары, на двойки, и сосчитать, сколько выйдет пар. (Расставляет кубики парами.) 10 кубиков разделить на пары — сколько будет пар? Сколько раз 2 кубика содержатся в 10 кубиках? Во сколько раз 10 кубиков больше 2 кубиков? Во сколько раз 2 кубика меньше 10 кубиков? Как мы узнали это?

— 10 кубиков разделили на пары — вышло 5 пар¹.

— Что больше: 8 или 2? Что надо сделать, чтобы узнать, во сколько раз 8 больше 2?

— Надо 8 разделить на пары, на двойки, — будет 4 двойки.

— Во сколько же раз 8 больше 2? Во сколько раз 2 меньше 8?

— Во сколько раз 9 больше 3? Как это узнать? Во сколько раз 5 меньше 10? Как это узнать? И т. д.

Девочка нашла в лесу 15 боровиков и 5 белых грибов. Во сколько раз больше нашла она боровиков, чем белых грибов?

Стакан малины стоит 14 копеек, а стакан смородины — 7 копеек. Во сколько раз смородина дешевле малины?

Для упражнений в применении умножения и деления к указанным вопросам должно служить решение задач. Сначала должны решаться такие задачи, в которых требуется увеличить число в несколько раз. Затем такие задачи, в которых требуется уменьшить в несколько раз, и, наконец, задачи, где нужно узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого. Каждая из этих групп задач может быть решена после того, как изложенным выше образом объяснен соответст-

¹ Если же ученики сразу ответят на вопрос, во сколько раз 10 кубиков больше 2 кубиков, то учитель спросит: почему вы говорите, что 10 кубиков в 5 раз больше 2 кубиков? Как это узнать, что для этого надо сделать?

венный случай применения действия. В заключение нужно прорешать задачи, которые содержат и увеличение, и уменьшение в несколько раз, и кратное сравнение чисел.

Теперь, когда ученики уже знакомы с увеличением и уменьшением на несколько единиц и разностным сравнением чисел, прошли увеличение и уменьшение в несколько раз и кратное сравнение, весьма полезно сопоставить выражения „больше, меньше на сколько-нибудь“ и „больше, меньше во сколько-нибудь раз“ с той целью, чтобы дети отчетливо различали эти выражения и через то еще лучше уяснили себе смысл каждого из этих выражений в отдельности.

На одну планку доски ставится 2 кубика, а на другую 6.

— Сколько кубиков на верхней планке? Сколько на нижней? Где больше? Сколько лишних на нижней планке?

— Лишних 4 кубика.

— Как сказать это по-другому?

— Больше на 4 кубика, больше 4 кубиками.

— А как это узнать? (Как найти этот лишек?)

— От 6 отнять 2 — останется 4.

— На сколько же 6 кубиков больше 2 кубиков? На сколько 2 кубика меньше 6 кубиков? Скажите еще раз: как это узнать?

6 кубиков расставляются парами.

— Что сделал я сейчас с кубиками?

— Расставили попарно, разделили на пары, на двойки.

— Сколько пар кубиков вышло из 6 кубиков? Сколько пар кубиков на верхней планке? сколько пар на нижней? На нижней планке кубиков столько же, сколько на верхней, да еще столько, да еще столько: 3 раза по столько. Как сказать это иначе?

— Больше в 3 раза, больше втрое.

— Во сколько же раз 6 кубиков больше 2 кубиков? Во сколько раз 2 кубика меньше 6 кубиков? А как это узнать? (Что сделали мы с 6 кубиками?)

Сколько шариков положил я на верхней проволоке? (2). Сколько на другой? (2). На которой больше? Сколько шариков положил я еще на второй проволоке? (4). Где теперь шариков больше? Сколько лишних на второй проволоке? Как сказать иначе?

— Больше на 4 шарика, больше 4 шариками.

— Что же надо сделать, чтобы стало на 4 больше?

— Надо прибавить 4.

— 2 увеличить на 4 — сколько будет?

Все шарики со второй проволоки скидываются; на ней кладется 4 пары шариков.

— На которой проволоке шариков положено больше? Сколько пар шариков на первой проволоке? сколько пар на второй? На второй проволоке положено шариков столько же, сколько на первой, да еще столько, да еще столько, да еще столько: 4 раза по столько. Как сказать это иначе?

— Больше в 4 раза, больше вчетверо.

- Как же сделать, чтобы стало в 4 раза больше?
- Надо взять 4 раза по столько же, надо повторить 4 раза.
- 2 увеличить в 4 раза — сколько будет?

— Сколько кубиков поставлено на верхней планке? (9). На нижней? (9). Где больше? Сколько кубиков снял я с верхней планки? (3). Где теперь меньше кубиков? Скольких кубиков нехватает на верхней планке? Как сказать иначе?

- Вверху меньше на 3 кубика, меньше 3 кубиками.
- Что же надо сделать, чтобы стало на 3 меньше?
- Надо отнять 3.
- 9 уменьшить на 3 — сколько будет?

На верхней планке снова ставится 9 кубиков, которые разделяются на 3 равные части; то же делается и с 9 кубиками, стоящими на второй планке.

— На сколько равных частей разделил я 9 кубиков? (Две части — две тройки — снимаются с верхней планки.) Раньше на обеих планках было кубиков поровну, а теперь на какой планке кубиков меньше? Сколько троек наверху? Сколько троек внизу? Во сколько раз наверху меньше кубиков? Что надо сделать, чтобы стало в 3 раза меньше?

- Надо разделить на 3 равные части (и взять только одну часть).
- 9 уменьшить в 3 раза — сколько будет?

После или во время этих объяснений учитель решает с учениками задачи, в которых сопоставляются понятия „больше, меньше на столько-то“ и „больше, меньше во столько-то раз“, „на сколько больше или меньше“ и „во сколько раз больше или меньше“.

В задачах и численных примерах полезно давать попарно, при одних и тех же числовых данных, случаи сложения и умножения (например $3 + 4$ и 3×4), вычитания и деления (например $18 - 6$ и $18 : 6$).

§ 29. Четыре действия.

Упражнения на все действия в пределах 20 должны состоять из беглого счета, задач и численных примеров.

В пределе первых двух десятков большинство вычислений принадлежит к табличным, и результаты их ученики должны знать на память. Другие вычисления, выходящие из пределов таблиц, как, например, $15 + 3$, $7 + 13$, $19 - 4$, $20 - 6$, $18 - 12$, $20 - 11$, выполняются по правилам, в основе которых лежит разложение чисел на десятичные группы; прибавление 3 к 15 сводится к прибавлению 3 к 5; вычитание 4 из 19, 6 из 20, 12 из 18, 11 из 20 приводится к вычитанию 4 из 9, 6 из 10, 2 из 8, 1 из 10. Такие вычисления, выходящие из пределов таблиц, конечно, необязательно производить на память; однако вследствие простоты подобных вычислений результаты их запоминаются чрезвычайно легко, и после достаточного количества упражнений мы можем ожидать, что все вычисления в пределах 20 дети будут выполнять на память.

Беглый счет служит для проверки того, как усвоены как табличные, так и внетабличные результаты действий в пределах

первых двух десятков; вместе с тем, приучая к сосредоточенности внимания, он развивает навык в быстром вычислении.

Так как теперь ученики уже знакомы со всеми случаями применения каждого из четырех действий, то учитель и пользуется этим при ведении беглого счета; например знак $+$ он читает иногда словом „прибавьте“, а иногда словами „увеличьте на столько-то“; то же самое относится и к остальным действиям.

Мы уже говорили, что задачи, которые могут иметь место в пределах первого десятка, должны быть почти исключительно задачами простыми, т. е. решаемыми одним только действием: цели, преследуемые решением сложных задач, могут быть достигаемы лишь после того, как дети вполне освоятся с применением действий к отдельным простым задачам и приобретут достаточный навык в вычислениях.

Как подготовку к сложным задачам можно рассматривать те задачи на сложение и вычитание, а потом и на все четыре действия, которые служили для беглого счета в пределах 10. Эти задачи, представляя ряд связанных между собой простых задач, образуют в целом задачу сложную; но постановка вопросов отдельных задач делалась там учителем, а не учениками.

Теперь в упражнениях на все действия в пределах 20 считаем уместным ввести и сложные задачи.

Приведем пример решения сложных задач на этой ступени обучения.

— Крестьянину надо было пройти из своей деревни в другую 20 км; первый час он прошел 5 км, а потом по 3 км в час. Во сколько времени прошел он всю дорогу?

Во время чтения задачи учитель записывает числовые данные на классной доске. Записывать эти числа следует не в строку, а так, чтобы однозначные данные были в одном столбце. В нашем примере запись может быть такая:

$$20 \text{ км} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ час } 5 \text{ км.} \\ ? \quad 3 \text{ км.} \end{array} \right.$$

Подобные записи значительно помогают усвоению содержания задачи.

Для того чтобы убедиться, понята ли учениками задача, учитель заставляет детей повторить ее. Сначала это повторение может быть сделано дробно, по вопросам учителя (учитель выспрашивает содержание задачи).

— Сколько километров надо было пройти крестьянину из своей деревни в другую? Сколько километров прошел он в первый час? По сколько километров в час проходил он потом? Что спрашивается в задаче?

Затем надо требовать от учеников, чтобы они связно повторили всю задачу целиком (два-три ученика).

Приступая к решению задачи, учитель, на первых порах, сам выбирает данные, предоставляя ученикам постановку вопросов.

— Сколько всего километров надо было пройти крестьянину? Сколько километров он уже прошел в первый час? Что можно из этого узнать? Как это узнать? Запишите это.

Ученики пишут в своих тетрадях $20 - 5 = 15$, а потом один из них делает эту запись на классной доске (для проверки). Иногда при решении задач достаточно ограничиться только записями на классной доске, что ускоряет дело. Так или иначе, но сделанное вычисление полезно записать: это ведет к тому, что в сознании детей ярче запечатлеваются те действия, которыми решается задача.

— Сколько же километров осталось идти крестьянину? А по сколько километров в час шел он эту оставшуюся дорогу? Что можно из этого узнать? Как это узнать? Запишите это.

Под первой строкой является вторая: $15 : 3 \text{ км} = 5$.

Если бы дети затруднились решить этот второй вопрос, можно было бы прибегнуть к наглядным пособиям: крестьянину надо пройти 15 км; поставим на планку 15 кубиков; в час он проходил по 3 км; будем отделять по 3 кубика. Во сколько же часов пройдены эти 15 км? Что сделали мы с кубиками? — Разделили их на тройки. Объяснение это удобно провести и на чертеже, изобразив дорогу прямой линией, на которой уложено 15 равных частей.

— Во сколько же часов прошел крестьянин оставшуюся дорогу? А сколько часов шел он до этого? Что теперь можно узнать? Как это узнать? Запишите.

Под второй строкой является третья: $1 + 3 = 4$.

— Что же мы сейчас узнали? А что спрашивалось в задаче? Решили мы задачу?

— Решили.

— Сразу ли мы узнали, во сколько часов дошел крестьянин от своей деревни до другой? Что узнавали мы сначала? Затем что узнавали? Что узнали потом?

Подобное повторение хода решения может послужить подготовкой к такому решению дальнейших задач, при котором учитель уже не будет сам выбирать данных, а этот выбор данных и постановку вопросов предоставит ученикам, ограничивая свое участие в решении задачи вопросами: Что надо сначала узнать? как это узнать? Что потом станете узнавать? как это узнать? И т. д.

ГЛАВА V.

КРУГЛЫЕ ДЕСЯТКИ ДО СТА.

§ 30. Нумерация круглых десятков.

В предыдущем отделе детям уже дано понятие о десятке как о счетной единице. Но понятие это не могло быть уяснено с достаточной полнотой, так как там не имел места счет круглыми десятками до ста. Теперь нужно пополнить, развить это понятие и приучить детей смотреть на десяток как на счетную единицу.

А. Устная нумерация. Весьма хорошим пособием является здесь так называемая солома, т. е. прутики или тонкие палочки, а затем кубики и бруски арифметического ящика.

Учитель кладет на стол сотню палочек.

— У меня на столе лежит много палочек. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько их? Поди и сосчитай.

Ученик считает, откладывая по палочке, и говорит: одна, две, три... девять, десять. Тут учитель остановит его.

— Нельзя ли пересчитать все палочки, умея считать только до 10?

— Можно: насчитать 10 палочек, потом опять 10, еще 10...

— Так и давайте считать. А как только насчитаем 10 палочек, свяжем их в пучок.

Несколько учеников перебирают все палочки, считая до десяти и связывая в пучок каждые 10 палочек.

— Сколько палочек в каждом пучке?

— 10 палочек.

— 10 — как можно назвать по-другому? (Крестьянка продала 10 яиц; 10 яиц — как сказать иначе?)

— Десяток.

— Значит, каждый пучок есть десяток (палочек). Что же теперь надо сделать, чтобы узнать, сколько на столе палочек?

— Надо сосчитать пучки, десятки.

— Поди и сосчитай.

Ученик считает: 1 десяток, 2 десятка... 9 десятков, 10 десятков.

— Так ли считали мы десятки, как прежде считали палочки, или как-нибудь по-другому?

— Так же.

— Слушайте, дети. То, что считают (чему ведут счет), называется *единицей*. Мы считали сначала палочки. Что же было у нас единицей?

— Палочки.

— Что считали мы потом?

— Пучки, десятки.

— Что тогда было у нас единицей?

— Десяток.

— Слушайте, дети. Когда считают какие-нибудь вещи по одной (палочки, кубики, шарики), то одна такая вещь есть *простая* единица. А когда считают десятками, то десяток будет *составная*, или *сложная* единица. Почему десяток называется единицей? Почему его можно назвать составной единицей?

Какое число показываю я вам на палочках? (Держит в руке 6 палочек).

— 6.

— Чего это 6?

— 6 простых единиц.

— Теперь какое число показываю я вам? (Держит в руке 5 пучков.)

— 5 десятков.

— Вот этот предмет вам хорошо знаком. Как называется он?

— Кубик.

— А вот эту вещь будем называть бруском. (Укладывает брусок кубиками). Сколько кубиков можно уложить на бруске? На сколько кубиков можно распилить брусок? Если кубик будет у нас простая единица, то как назовете вы брусок?

— Десятком.

Учитель ставит на планку доски 7 кубиков и спрашивает:

— Какое число обозначил я?

— Число 7.

— Чего 7?

— 7 простых единиц.

На планку ставится 4 бруска.

— Какое число обозначил я?

— 4 десятка.

— Ступай и обозначь 3 десятка. Обозначь 5 простых единиц. Если я скажу вам: обозначьте 8 единиц, то что поставите вы на планку?

— 8 кубиков.

— Верно. А ведь я не сказал вам, что это простые единицы. Слушайте, дети. Если вам скажут „8 единиц“, „5 единиц“, но не скажут, какие это единицы, то их надо считать за простые. Поди и обозначь 4 единицы. А если я вам скажу: обозначьте число 6, а больше ничего не прибавлю, что тогда поставите вы на планку?

— 6 кубиков.

— Верно. Ступай и обозначь число 2. Обозначь 3 десятка. Обозначь 9.

После выяснения понятия о десятке как о счетной единице группам десятков дают названия: двадцать, тридцать, сорок... девяносто, сто. Надо заметить, что в большинстве случаев названия эти ученикам знакомы, и учителю придется только выпросить их, кто знает, как по-другому называют 3 десятка, 4 десятка и т. д. Если ученики достаточно подвинулись в чтении и письме, то учитель может написать на классной доске названия десятков, а дети — в виде самостоятельной работы — спишут эти названия в свои тетради.

Б. Письменная нумерация. При ознакомлении с письменной нумерацией пополняется и уясняется уже имеющееся у детей понятие о местном значении цифр (единицы пишутся на первом месте справа, десятки — на втором) и о значении нуля.

Учитель пишет на классной доске цифру 4 и спрашивает:

— Какое число обозначил я? Чего 4: десятка или единицы? (Пишет 8 десятков). Теперь какое число обозначил я? Для того, чтобы обозначить 8 десятков, я написал слово „десятков“ после цифры 8. Но можно обойтись и без этого: не писать слово „десятков“. Будем писать числа в двух клеточках (чертит

--	--

) и сделаем такой уговор: если цифра написана в правой клеточке, то она будет означать единицы, а если в левой, то — десятки. (Пишет 7 в левой клетке

--	--

). Какое число написал я?

— 7 десятков, 70.

— Почему цифра 7 означает 7 десятков?

— По уговору: она написана в левой клеточке.

Учитель стирает цифру 7 и ставит цифру 9 в правой клетке

--	--

 9

— Теперь какое число написано? Почему цифра 9 означает 9 единиц?

— По уговору: она написана в правой клетке.

Следуют упражнения.

— Поди и напиши число 5. Почему поставил он цифру 5 в правой клеточке? Ступай и напиши 3 десятка. Почему поставил он цифру 3 в левой клеточке?

Затем учитель скажет:

— Место в правой клеточке будем называть первым местом, а место в левой клеточке назовем вторым местом. На каком месте пишем мы

единицы? на каком десятке? (Пишет $\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline \end{array}$). Какое число написал я? Почему цифра 5 означает десятки?

— Потому что она стоит на втором месте.

— Если я сотру обе клеточки (стирает их), тогда какое число будет написано?

— Число 5.

— Чего 5?

— 5 единиц.

— Верно. Без клеточек не видно, что цифра 5 стоит на втором месте, и мы должны считать, что она означает единицы. (Чертит снова клетки $\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline \end{array}$). Теперь я сотру только левую клеточку, а правую оставлю ($5 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$). Как прочтете вы написанное число?

— 5 десятков, 50.

— Почему цифра 5 означает десятки?

— Потому что она стоит на втором месте.

— Откуда видно, что цифра 5 стоит на втором месте?

— На первом месте ничего не написано, оно пустое.

— Да, хотя на первом месте и ничего не написано, но место все-таки оставлено; значит, цифра 5 будет уже на втором месте. (Пишет $2 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$). Какое число написал я? Поди и напиши 30. Напиши 90.

Ученики пишут $3 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$, $9 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$.

— Чертить клетку долго, неудобно; вместо него пишут кружок.

Учитель заменяет в написанных примерах пустую клетку кружком и заставляет учеников снова прочитать написанные числа. Затем пишет 70, 40, 80 и т. д., а дети читают. После этого учитель диктует круглые десятки. Ученики пишут их.

— Слушайте, дети. Кружок, которым мы заменили пустую клетку, есть та же цифра; как она называется? Если мы напишем какую-нибудь цифру, например 6, и справа поставим нуль (пишет 60), что тогда будет означать цифра 6? Почему она будет означать 6 десятков?

— Потому что будет стоять на втором месте.

— Верно. Нуль, который мы написали справа, показывает, что первое место пустое, а потому цифра 6 будет на втором месте.

В заключение надо показать детям, как пишется число 100, но при этом можно не входить в разъяснения по поводу третьей счетной единицы и третьего места.

Нумерация десятков уясняется на таких монетах, как копейка, гривенник, рубль. Решая примеры, ученики ведут прямой и обратный счет десятками, умножают десяток на однозначное число (например 10×7) и определяют содержание десятка в заданной группе десятков (например $10 \times ? = 90$); такие упражнения, несомненно, примыкают к нумерации.

§ 31. Действия над круглыми десятками.

Упражняясь в вычислениях с круглыми десятками, дети должны привыкнуть смотреть на десяток как на единицу, что весьма важно в смысле подготовки к усвоению понятий о раз-

личных счетных единицах и о десятичном составе чисел, — понятий, необходимых при дальнейшем изучении нумерации и действий. Вычисления с круглыми десятками требуют только тех знаний, какие приобретены изучением действий в пределах 10, а следовательно, между прочим, служат повторением пройденного. Так, например, чтобы прибавить 20 к 40, рассуждаем: 40 — это 4 десятка, 20 — это 2 десятка; к 4 прибавить 2 — будет 6; к 4 десяткам прибавить 2 десятка — будет шесть десятков, или к 40 прибавить 20 — будет 60; $40 + 20 = 60$. В случае каких-либо затруднений со стороны учеников можно пользоваться наглядными пособиями: брусками арифметического ящика или пучками по 10 палочек.

Считаем нужным сделать некоторые пояснения относительно деления.

Все действия над круглыми десятками мы производим, расширяя на десятки знакомые нам таблицы действий, заключенные в пределах 10, причем не вносим в вычисления никаких новых приемов.

Так как обобщения обоих видов деления до сих пор сделано не было, то таблица деления в случае деления на части может быть распространена на круглые десятки только при однозначном делителе: 8 единиц разделить на 4 равные части — будет в каждой части по 2 единицы; 8 десятков разделить на 4 равные части — будет в каждой части по 2 десятка; 80 разделить на 4 равные части — будет в каждой части по 20; $80:4=20$. Делением круглых десятков на однозначное число и ограничиваются упражнения в делении круглых десятков на равные части.

Если же производится деление по содержанию, то таблица деления может быть распространена на круглые десятки лишь в том случае, когда и делителем являются круглые десятки: если 8 единиц разложить на группы по 4 единицы в каждой, то таких групп выйдет 2 (8 копеек разложить на кучки по 4 копейки в каждой — выйдет 2 кучки); 4 единицы содержатся в 8 единицах 2 раза; если 8 десятков разложить на группы по 4 десятка в каждой, то таких групп выйдет тоже 2 (8 гривенников разложить на кучки по 4 гривенника в каждой — выйдет 2 кучки); 4 десятка содержатся в 8 десятках 2 раза; 40 содержится в 80 2 раза; $80:40=2$. Делением десятков на десятки и ограничиваются упражнения в делении круглых десятков по содержанию.

Заметим еще, что раньше, когда делителем служило число первого десятка, мы употребляли в случае деления по содержанию такие выражения, как „разделить на тройки, на пятки, на семерки“. Когда же делителем является число, большее 10, то подобные выражения возможны только в виде исключения, если делитель имеет какое-нибудь особенное название — разделить на двугривенные и т. д. Вообще же от этих выражений придется отказаться, заменив их словами „содержится столько-то раз“.

ГЛАВА VI.
ПЕРВАЯ СОТНЯ

§ 32. Нумерация

Когда ученики в достаточной мере освоились с десятком как счетной единицей, можно пройти нумерацию чисел, состоящих из десятков и единиц вместе, так как дети уже подготовлены к пониманию десятичного состава чисел: они знают, что есть числа, которые состоят только из единиц; есть числа, которые состоят только из десятков; они легко поймут, что всякое другое число (в пределах сотни) состоит из десятков и единиц вместе.

А. Устная нумерация. Здесь, как и раньше — при объяснении нумерации круглых десятков, весьма хорошим пособием является так называемая солома, т. е. прутики, или тонкие палочки, а затем кубики и бруски арифметического ящика.

— У меня на столе много палочек. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько их? Вспомните, как уже раньше считали мы палочки? (Как узнать, сколько тут палочек, умея считать только до 10?)

Несколько учеников, вызванных к столу, набирают десятки палочек и связывают их в пучки.

— Все ли палочки связаны в пучки? Сосчитайте, сколько палочек осталось несвязанными? (6). Вы сосчитали сейчас те палочки, которые остались несвязанными. Что теперь надо пересчитать?

— Теперь надо пересчитать пучки.

— Сколько палочек в пучке? Как же можно назвать пучок?

— Десятком.

— Сосчитайте, сколько вышло у нас десятков? (8). Скажите же, сколько на столе палочек?

— 8 десятков и 6 палочек, 80 (и) 6 палочек.

— Когда считают предметы, то как называется каждый отдельный предмет? Вспомните.

— Единицей.

— Что считали мы сначала? Что было у нас единицей?

— Палочка.

— Что считали мы потом? Что тогда было единицей?

— Пучок, десяток.

— Я уже говорил вам, что когда считают предмет по одному, то каждый предмет есть простая единица. А десяток будет единица составная, или сложная, потому что он состоит из простых единиц. Какие же счетные единицы вы знаете?

— Простую единицу и десяток.

Следуют упражнения, ведущие к усвоению учениками десятичного состава чисел. Упражнения эти двух родов: 1) составление числа по данным его десяткам и единицам и 2) разложение данного числа на его десятки и единицы.

Напомнив детям об условии считать кубик за простую единицу, а брусок — за десяток, учитель обозначает различные числа с помощью брусков и кубиков, а дети называют эти числа, и обратно — учитель называет числа, а ученики обозначают их брусками и кубиками.

— Сколько брусков и сколько кубиков поставил я на планку? Что означают 6 брусков? Что означают 5 кубиков? Как назовете вы число, которое состоит из 6 десятков и 5 единиц? (Шестьдесят и пять, короче — шестьдесят пять). Какое же число обозначено брусками и кубиками?

Сколько десятков и сколько единиц в числе 47? Как обозначить его брусками и кубиками? Ступай и обозначь.

Считаем полезным провести непрерывный счет до 100 и от 100.

— Я поставил на планку доски 2 бруска. Какое число они обозначают? Ставлю еще один кубик. Какое число теперь обозначено?

— 21.

— Давайте считать дальше по порядку. Считай ты.

— 22, 23, ... 29, 30, 31, 32.

— А ты продолжай.

Так идет прямой счет до 100. После этого ученики ведут обратный счет от ста: 100, 99, 98...

Единственное затруднение, которое приходится наблюдать при непрерывном счете, — это переход через круглые десятки, особенно когда ведется обратный счет. Иногда можно услышать от детей: тридцать восемь, тридцать девять, тридцать десять. Считая назад: сорок три, сорок два, сорок один, сорок, ученик иногда остановится на круглых десятках и далее не идет. В таких случаях весьма удобно прибегнуть к наглядным пособиям.

Мы насчитали 39. Обозначим это число брусками и кубиками. Прибавим сюда еще 1 кубик. Сколько стало у нас отдельных кубиков? Чем можно их заменить? Заменим. Чем же обозначено теперь полученное число? Какое число обозначают 4 бруска?

Считая назад, мы дошли до 42. Обозначим это число пучками и палочками. Отнимем отсюда одну палочку. Какое число останется? Отнимем еще палочку. Какое число получится?

Теперь у нас осталось только 4 пучка. Как же отнять отсюда еще одну палочку? Да надо один пучек развязать и из него взять палочку. (Надо один десяток раздробить в единицы, разменять на единицы и взять отсюда одну единицу). Сколько пучков осталось теперь и сколько сверх того отдельных палочек? Какое же это будет число?

Б. Письменная нумерация. Проходя письменную нумерацию круглых десятков, ученики уже получили понятие о местном значении цифр: единицы пишутся на первом месте, десятки — на втором. Напомнив детям о местах единиц и десятков, легко познакомить учеников с письменным обозначением чисел, состоящих из десятков и единиц вместе.

— Давайте писать числа в клеточках, как делали это раньше. (Пишет

	5
--	---

). Какое число написал я? Почему цифра 5 означает простые единицы?

— Потому что она написана в правой клеточке.

— Как уговорились мы называть место в правой клеточке?

— Первым местом.

— На каком же месте пишутся единицы?

Учитель пишет затем

5	
---	--

 и спрашивает:

— Какое число написал я? Почему цифра 5 означает десятки?

— Потому что она написана в левой клеточке.

— Как уговорились мы называть место в левой клеточке? На каком же месте пишутся десятки?

Теперь я поставлю цифру 5 и на первом и на втором месте (пишет $\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array}$). Что означает цифра 5, написанная на втором месте? Что означает цифра 5, поставленная на первом месте? Из чего же состоит написанное число? Прочитайте его.

— Пятьдесят пять.

— Теперь я сотру клеточки. (Стирает). На каком месте стоит теперь вот эта цифра 5?

— На втором месте.

— Откуда это видно?

— На первом месте стоит другая цифра 5.

— Как же прочитать это число?

— Пятьдесят пять.

— Вы видите, что числа можно писать и без клеточек. Прочитайте, какое число написал я? (Пишет 49). Почему вы так прочитали его?

— Цифра 4 означает 4 десятка (стоит на втором месте), цифра 9 означает 9 простых единиц (написана на первом месте): 4 десятка и 9 единиц — 49.

Упражнения в нумерации чисел первой сотни включают в себя прибавление однозначного числа к круглым десяткам и обратно ($40 + 7$, $3 + 50$) и вычитание из двузначного числа его единиц и его десятков ($84 - 4$, $67 - 60$). Такие сложения и вычитания тесно примыкают к нумерации.

Следующие упражнения заключаются в том, что ученики пишут все числа первой сотни: сначала — четные, в восходящем порядке от 2 до 100, потом — нечетные, в нисходящем порядке от 99 до 1. Упражнение в письме чисел здесь соединено с отысканием чисел, идущих вперед и назад через одно число.

§ 33. Сложение и вычитание.

Сложение и вычитание в пределах 20 уже положили начало приемам выполнения этих действий, основанным на пользовании десятичным составом чисел: ученики уже знают, что для прибавления 3 к 15 надо разбить 15 на десяток и 5 единиц и прибавить 3 единицы к 5 единицам; что для вычитания 4 из 17 надо разбить 17 на десяток и 7 единиц; для того чтобы прибавить 12 к 6, надо разложить 12 на десяток и 2 единицы, прибавить сначала десяток, потом единицы; для того чтобы от 19 отнять 14, надо разложить каждое из этих чисел на десяток и единицы, от десятка отнять десяток, от единиц — единицы. В пределах сотни эти приемы получают дальнейшее развитие, завершаясь сложением двузначного числа с двузначным и вычитанием двузначного числа из двузначного.

Все случаи сложения и вычитания в пределах сотни могут быть разделены на две группы: а) сложение и вычитание без перехода через десяток, требующие знания таблиц этих действий только в пределах 10, и б) сложение и вычитание с переходом

через десяток, к которым применяются таблицы в полном объеме. К первой группе принадлежат такие случаи сложения, в которых сумма единиц слагаемых меньше или равна 10, и такие соответствующие им случаи вычитания, в которых уменьшаемое содержит единиц больше, чем вычитаемое, или не содержит их вовсе, т. е. состоит из одних лишь десятков. Вторую группу образуют такие случаи сложения, в которых сумма единиц слагаемых превышает 10, и такие случаи вычитания, в которых уменьшаемое содержит единиц меньше, чем вычитаемое.

А. Сложение и вычитание без перехода через десяток. Сюда относятся следующие случаи сложения и вычитания:

1. Сложение круглых десятков с единицами: $40+8$, $8+40$. Вычитание из двузначного числа его единиц или его десятков: $67-7$, $67-60$. Такие сложение и вычитание требуют только знания нумерации: число, которое состоит из 4 десятков и 8 единиц, имеет название сорок восемь и письменное обозначение 48; 67 — это 6 десятков и 7 единиц; если отнять 7 единиц, останутся 6 десятков; если отнять 6 десятков, останутся 7 единиц. Подобные сложения и вычитания включены нами в число упражнений в нумерации.

2. Прибавление к числу двузначному числа однозначного, которое вместе с единицами первого слагаемого составляет меньше 10: $65+3$. Вычитание из числа двузначного числа однозначного, которое меньше единиц уменьшаемого: $57-4$.

Эти случаи сложения и вычитания могут быть объяснены детям так, как это сделано раньше, в пределах двух десятков (§ 22 гл. IV).

3. Прибавление круглых десятков к двузначному числу: $36+40$. Вычитание круглых десятков из двузначного числа: $95-30$.

Эти сложение и вычитание сходны с предыдущими: когда к двузначному числу надо прибавить или от двузначного числа надо отнять единицы, мы прибавляем их к его единицам или отнимаем от его единиц; когда же требуется к двузначному числу прибавить или от двузначного числа отнять десятки, мы прибавляем их к его десяткам или отнимаем от его десятков.

4. Прибавление двузначного числа к однозначному, когда сумма единиц меньше десяти: $3+52$. Вычитание двузначных чисел, имеющих поровну десятков: $48-43$. Этот случай сложения и вычитания отличается от случая 2-го перестановкой: в сложении — слагаемых, а в вычитании — вычитаемого и остатка.

Подобные сложения и вычитания уже имели место в пределах двух десятков: $5+12$, $19-12$. Дети знают: для того, чтобы прибавить или отнять 12, надо прибавить или отнять сначала 10, потом 2. Таким же образом выполняют они действия и в рассматриваемом случае.

5. Прибавление двузначного числа к круглым десяткам: $20+65$. Вычитание двузначных чисел, имеющих поровну единиц: $94-54$. Этот случай сложения и вычитания отличается от случая 3-го перестановкой: в сложении — слагаемых, а в вычитании — вычитаемого и остатка.

Дети выполняют такие сложения и вычитания, зная (случай 4-й), что для сложения или вычитания двузначного числа надо прибавить или вычесть сначала его десятки, а потом единицы.

6. Сложение двузначных чисел, единицы которых составляют вместе меньше 10: $52+36$. Вычитание двузначных чисел, когда в уменьшаемом единиц больше, чем в вычитаемом: $75-42$.

Этот случай сложения и вычитания достаточно подготовлен предшествующими: двузначное число мы прибавляем или отнимаем не сразу, а с двух раз: разбиваем это число на десятки и единицы, сначала придаем или отнимаем десятки, потом единицы; десятки мы придаем к десяткам или отнимаем от десятков, а единицы придаем к единицам или отнимаем от единиц.

7. Прибавление к числу двузначному числа однозначного, которое дополняет его до круглых десятков: $57+3$. Вычитание однозначного числа из круглых десятков: $70-6$.

Подобные случаи уже имели место в пределах 20: $16+4$, $20-7$.

8. Прибавление двузначного числа к однозначному, когда единицы слагаемых дают в сумме 10: $6+34$. Вычитание двузначных чисел из круглых десятков при однозначном остатке: $80-76$. Этот случай отличается от предыдущего перестановкой: в сложении — слагаемых, а в вычитании — вычитаемого и остатка.

Приемы выполнения действий детям известны: $6+34=6+30+4=36+4=30+10=40$ или $6+34=6+4+30=10+30=40$; $80-76=80-70-6=10-6=4$.

9. Сложение двузначных чисел, когда сумма единиц равна 10: $48+32$. Вычитание двузначного числа из круглых десятков: $70-46$.

Дети уже знают прием сложения двузначных чисел (случай 6-й): к десяткам прибавить десятки, к единицам — единицы. Что касается вычитания, то оно может быть выполнено так. Сначала от 70 отнимаем 40 — останется 30; потом от 30 отнимаем 6 — останется 24. Чтобы от 30 отнять 6, надо один из трех десятков раздробить в единицы. Если это раздробление одного десятка сделать с самого начала, то прием вычитания в рассматриваемом случае будет такой: разбиваем 70 на 6 десятков и 10 единиц, отнимаем 4 десятка от 6 десятков и 6 единиц от 10 единиц.

Б. Сложение и вычитание с переходом через десяток. Сюда принадлежат такие случаи сложения и вычитания:

10. Прибавление к числу двузначному числа однозначного, которое вместе с единицами первого слагаемого составляет больше 10: $48+6$. Вычитание из числа двузначного числа однозначного, которое больше единиц уменьшаемого: $73-8$.

В таких случаях часто поступают следующим образом. Дополняют первое слагаемое 48 до круглых десятков, прибавляя к нему 2, а потом к 50 добавляют остальные 4 единицы. Отнимают от уменьшаемого 73 его единицы, чтобы сделать уменьшаемое круглыми десятками, а потом от 70 отнимают остальные 5 единиц. Или так: отнимают 8 от 70 и к остатку добавляют 3.

Пользование такими приемами предполагает умение быстро дополнять двузначное число до круглых десятков и вычитать

из круглых десятков однозначное число, — уменьше, основанное на знании таблиц сложения и вычитания только в пределах первого десятка.

Но можно пользоваться знанием этих таблиц и во всем их объеме. Разбиваем 48 на десятки и единицы, придаем 6 к 8 и приходим к сложению: $40+14=40+10+4=50+4=54$. Разбиваем 73 на группы 60 и 13 и отнимаем 8 от 13.

11. Прибавление двузначного числа к однозначному, когда сумма единиц больше 10: $7+35$. Вычитание двузначного числа из двузначного, когда в уменьшаемом единиц меньше, чем в вычитаемом, и когда в остатке получается однозначное число: $82-78$. Этот случай сложения и вычитания отличается от предыдущего перестановкой: в сложении — слагаемых, а в вычитании — вычитаемого и остатка.

Приемы выполнения действий сходны с предыдущими.

К 7 придаем 33, чтобы получить круглые десятки; потом к 40 прибавляем 2. Или: к 7 придаем 30 — имеем 37; к 37 прибавляем 3, а потом к 40 придаем 2. От 82 отнимаем 2; из 80 вычитаем 76. Или: из 80 вычитаем 78 и к остатку придаем 2.

Желая применить таблицы сложения и вычитания во всем их объеме, поступаем так. К 7 придаем 5 и к 12 прибавляем 30. Разлагаем 82 на 70 и 12 и отнимаем 70 от 70, 8 от 12.

12. Сложение двузначного числа с двузначным, когда сумма единиц слагаемых больше 10: $47+28$. Вычитание двузначного числа из двузначного, когда единиц в уменьшаемом меньше, чем в вычитаемом: $92-35$.

Здесь, как и раньше, возможны два приема вычисления: а) дополнение до круглых десятков и вычитание из круглых десятков и б) разложение обоих слагаемых на десятичные группы, т. е. на их десятки и единицы, сложение десятков с десятками и единиц с единицами; а в случае вычитания — разложение уменьшаемого на две недесятичные группы, которые образуются из его десятичных групп путем раздробления одного десятка в единицы.

Приводим ход вычислений, следуя тому и другому приему: а) $47+28$; $47+3=50$, $50+25=75$; $92-35$; $92-30=62$, $62-2=60$, $60-3=57$; или: $92-32=60$, $60-3=57$; б) $47+28$; $40+20=60$, $7+8=15$, $60+15=75$; $92-35$; $80-30=50$, $12-5=7$, $50+7=57$.

Применяя этот последний прием вычитания, следует обратить внимание учеников на то, что число, которое отнимают, всегда разбивается на свои десятки и единицы; число, от которого отнимают, иногда разбивается также на свои десятки и единицы, а иногда разлагается по-другому. Для этого учитель может дать детям ряд примеров вроде следующего:

От 75 отнимите 43. Как разобьете вы число 43? — На 4 десятка и 3 единицы. Как разобьете вы число 75? — На 7 десятков и 5 единиц. От 75 отнимите 48. Как разобьете вы число 48? — На 4 десятка и 8 единиц. А как разобьете вы число 75; так ли, как прежде, т. е. на 7 десятков и 5 единиц, или по-другому? — Теперь мы разобьем 75 по-другому: на 6 десятков и 15 единиц. Почему здесь надо разбить 75 по-другому? — Потому что 8 единиц нельзя отнять от 5 единиц.

§ 34. Умножение и деление:

Прежде чем приступить к изучению таблиц умножения и деления во всем объеме их, считаем удобным, повторив уже знакомую детям часть этих таблиц, пройти с учениками внетабличные умножение и деление, требующие знания таблиц этих действий только в пределах 20¹. В пользу такого порядка изучения умножения и деления говорят следующие соображения:

1) По ознакомлении с приемами сложения и вычитания в области сотни ученики тотчас переходят к изучению приемов выполнения и остальных двух действий в этом пределе; ознакомление с этими приемами было бы значительно отдалено, если бы им предшествовали таблицы умножения и деления во всем их объеме. 2) К составлению таблицы умножения могут быть применены более разнообразные и удобные приемы вычисления, нежели непосредственное сложение. Так, например, умножение 8×6 , если соединить восьмерки по две, может быть выполнено посредством умножения 16×3 . Умножение на 5, например 7×5 , может быть заменено делением $70 : 2$. 3) После окончательного изучения таблиц умножения и деления показанные детям внетабличные приемы выполнения этих действий снова повторяются, что ведет к более прочному усвоению этих приемов.

А. Повторение умножения и деления в пределах 20. Это повторение мы располагаем в такой последовательности: сначала счет пятками, сводящийся к счету десятками, если брать пятки попарно; затем идет счет двойками и четверками; далее — счет тройками и шестерками; наконец — счет прочими однозначными группами, которые в пределах 20 могут быть повторены не более 2 раз. Сопоставление таких групп, из которых одна вдвое больше другой (двоек и четверок, троек и шестерок), может служить к лучшему уяснению и усвоению счета такими группами. 6 двоек — это 12; 3 четверки — тоже 12: если разложить каждую четверку на двойки, то из 3 четверок выйдет 6 двоек; обратно, если 6 двоек соединить попарно, то каждые 2 двойки дадут четверку, а из 6 двоек выйдет 3 четверки.

Счет равными группами состоит из следующих упражнений:

а) Сложение равных слагаемых, например $5+5+5+5$, которое записывается потом в виде умножения 5×4 ; это упражнение напоминает, как добыть результат умножения: набирать сложением пятерки по одной или, лучше, парами. б) Умножение, например 5×3 , стоящее уже отдельно от сложения; это упражнение имеет целью проверить, знают ли дети на память искомый результат. в) Отыскание множителя $5 \times ? = 20$: это — нахождение при помощи таблицы умножения содержания пятка в 20. г) Деление по содержанию $20 : 5$ — как вывод из предыдущего упражнения.

¹ Программы советской школы, а также и авторы изданных НКП методик указывают другой порядок изучения умножения и деления в пределах 100, а именно: сначала изучаются табличные умножение и деление, а потом случаи внетабличных умножения и деления. Последний порядок обеспечивает более строгую систему в работе, а потому его нужно предпочесть тому, который указан автором данной методики. *Ред.*

д) Отыскание целого по одной его части: $5 = \frac{1}{3}$ от ?, т. е. 5 составляет третью часть какого числа. Это упражнение, относящееся собственно к умножению, содействует запоминанию деления на равные части: 15 разделить на 3 равные части — будет 5.

При повторении табличного умножения в пределах 20, например при проверке указанных упражнений, если они выполнены во время самостоятельных занятий, можно сообщить детям термин „умножить“ и требовать от детей, чтобы они употребляли это слово наряду с выражением „взять, повторить столько-то раз“. Когда, например, ученик скажет: 6 повторить 3 раза — будет 18, учитель спросит: а как сказать это по-другому? — 6 умножить на 3 — будет 18.

Б. Умножение и деление круглых десятков и на круглые десятки. После повторения табличного умножения и деления в пределах 20 следует повторить умножение и деление круглых десятков в пределах сотни, а именно: умножение круглых десятков на однозначные числа; деление круглых десятков на те же числа в смысле разделения на равные части; деление круглых десятков на круглые десятки в смысле отыскания содержания (см. § 31 гл. V).

Далее надо познакомить детей с умножением чисел первого десятка на 10 и с делением круглых десятков на 10 равных частей.

Умножение на 10, например умножение 3×10 , может быть объяснено так: если одну единицу повторить 10 раз, то получится 10 единиц, или 1 десяток; а если 3 единицы повторить 10 раз, то получится 3 десятка, или 30. Вообще, сколько было единиц, столько станет десятков.

При делении на 10 равных частей, например при делении $70:10$, можно рассуждать следующим образом: если 10 единиц, или 1 десяток, разделить на 10 равных частей, то на каждую часть придется по одной единице, а если 7 десятков разделить на 10 равных частей, то на каждую часть придется по 7 единиц. Вообще, сколько было десятков, столько станет единиц.

Уяснив детям умножение и деление на 10, надо показать ученикам прием умножения на круглые десятки и приемы деления круглых десятков на однозначное число в смысле отыскания содержания и круглых десятков на круглые десятки в смысле разделения на равные части.

Умножение однозначного числа на круглые десятки сводится к умножению однозначного числа на однозначное и на 10.

— Девочка накопила 30 двухкопеечных монет. Сколько денег (сколько копеек) накопила она? Как это узнать?

— Надо 2 повторить 30 раз. Надо 2 умножить на 30.

— Запиши это.

Ученик пишет 2×30 .

— Как станете вы вычислять? Как наберете вы 30 двоек? Как пересчитали бы вы те деньги, что накопила девочка? 2 копейки да 2 ко-

пейки — 4 копейки; 4 копейки да 2 копейки — 6 копеек... Так считать долго: по одной двойке набирать долго. Как скорее набрать 30 двоек? Самое большее — сколько двоек вы можете взять на память?

— 10 двоек.

— Давайте набирать двойки по 10 (считать двухкопеечники по 10 штук). Сколько раз можем мы брать по 10 двоек (если все двухкопеечники сложить в кучки по 10 монет в каждой, то сколько будет таких кучек)? Вычислите.

— 10 двоек — 20; еще 10 двоек — 20; еще 10 двоек — 20; к 20 прибавить 20 — будет 40; к 40 прибавить 20 — будет 60.

— Вы к 20 прибавляли 20 и потом к 40 еще 20. Нельзя ли сразу узнать, сколько будет.

— Можно: 20 повторить 3 раза — будет 60.

— Как же можем мы 2 повторить 30 раз?

— 2 повторить 10 раз — будет 20; потом 20 повторить 3 раза — будет 60.

Результат записывается: $2 \times 30 = 60$.

— Скажите еще раз, как можно 2 умножить на 30.

— 2 помножить на 10 — будет 20; потом 20 умножить на 3 — будет 60.

Затем учитель разъясняет детям, что можно сделать умножение 2×30 в ином порядке: сначала 2 умножить на 3, потом полученное число 6 умножить на 10. С этой целью учитель пишет на доске 30 двоек в 3 столбцах по 10 двоек в каждом столбце (или же на 10 проволоках классных счетов кладет по 3 пары шариков на каждой, оставляя промежутки между парами).

— Сколько всех здесь двоек, сосчитайте. Как узнать, сколько единиц будет во всех этих двойках?

— Надо 2 повторить 30 раз. Надо 2 умножить на 30.

— Давайте вычислять по столбцам. Сколько двоек в каждом столбце? Как узнать, сколько единиц в каждом столбце?

— Надо 2 повторить 10 раз — будет 20.

— Как узнать, сколько единиц во всех столбцах?

— 20 повторить 3 раза — будет 60.

— Мы сейчас умножили 2 на 30 попрежнему, т. е. как?

— Сначала 2 умножили на 10, потом 20 умножили на 3.

Учитель может записать $2 \times 30 = 2 \times 10 \times 3 = 60$.

— Теперь давайте вычислять по строкам. Сколько двоек в каждой строке? А как узнать, сколько единиц в каждой строке?

— Надо 2 повторить 3 раза — будет 6.

— В каждой строке по 6 единиц. А сколько таких строк? Как же узнать, сколько единиц во всех строках?

— 6 повторить 10 раз — будет 60.

— Как мы сейчас умножили 2 на 30?

— Сначала умножили 2 на 3, потом 6 на 10.

Учитель может под прежней записью написать: $2 \times 30 = 2 \times 3 \times 10$.

— Умножьте 2 на 40 так, как умножали сначала. Умножьте теперь так, как умножали потом. Умножьте по второму способу 3 на 20, 2 на 50.

Деление круглых десятков на однозначное число в смысле отыскания содержания может быть объяснено так:

— Умножьте 2 на 40. Сколько будет? Сколько раз надо повторить двойку, чтобы получить 80? Сколько раз двойка содержится в 80? 80 разделить на двойку — сколько будет? Как повторить двойку 40 раз?

— 2 повторить 4 раза — будет 8; 8 повторить 10 раз — будет 80.

— Да, если взять 4 двойки, то будет 8; но нам надо взять не 4 двойки, а 40 двоек, т. е. в 10 раз больше, и получится не 8, а в 10 раз больше, т. е. 80.

8 разделить на двойки — сколько будет двоек? Но нам надо разделить на двойки не 8, а 80, т. е. число, в 10 раз большее, и получится двоек не 4, а в 10 раз больше, т. е. 40. Как же разделить 80 на двойки?

— 8 разделить на двойки — будет 4; 4 умножить на 10 — будет 40.

При делении круглых десятков на круглые десятки в смысле деления на равные части можно рассуждать следующим образом. Разделим какое-нибудь число пополам; потом каждую половину разделим на 10 равных частей. На сколько равных частей разделится тогда все число? Или в обратном порядке: разделим сначала на 10 равных частей; потом каждую десятую часть разделим пополам. Наглядно это можно показать на делении прямой линии. Как же разделить, например, 60 на 20 равных частей? 60 разделить пополам — будет 30; 30 разделить на 10 равных частей — будет 3. Или 60 разделить на 10 равных частей — будет 6; 6 разделить пополам — будет 3.

В. Умножение и деление, требующие знания таблиц этих действий только в пределах 20¹. После повторения тех случаев умножения и деления круглых десятков, которые были известны детям еще раньше, и после ознакомления учеников с такими случаями умножения и деления круглых десятков, которых до тех пор они не знали, следует пройти остальные случаи внетабличного умножения и деления в пределах сотни, требующие знания таблиц этих действий в пределах 20. Это будет умножение двузначного числа на однозначное и обратно: 32×3 , 4×24 ; деление двузначного числа на однозначное — $72 : 3$ — в смысле деления на равные части и в смысле отыскания содержания; деление двузначного числа на двузначное — $92 : 23$ — в смысле отыскания содержания и в смысле деления на равные части.

Все эти случаи умножения и деления мы располагаем в такой последовательности.

В начале ставим умножение двузначного числа на однозначное. Подготовкой к нему может служить самостоятельное решение примеров на сложение одинаковых чисел, например: $24 + 24 + 24 + 24$, которое потом записывается как умножение 24×4 .

После таких подготовительных упражнений учитель выводит с учениками прием умножения двузначного числа на однозначное из приема сложения двузначных чисел.

Учитель пишет $32 + 32 + 32$.

— Читайте, складывайте.

— К 32 прибавить 32 — будет: 30 да $30 = 60$; 2 да $2 = 4$; 60 да $4 = 64$. К 64 прибавить 32 — будет: 60 да $30 = 90$; 4 да $2 = 6$; 90 да $6 = 96$.

¹ См. подстрочное примечание на стр. 142.

— Как можно иначе это сделать?

— Сначала сложить все десятки, потом единицы: $30 \text{ да } 30 = 60$; $60 \text{ да } 30 = 90$; $2 \text{ да } 2 = 4$; $4 \text{ да } 2 = 6$; $90 \text{ да } 6 = 96$.

— Для того чтобы узнать, сколько будет всех десятков, вы к 3 десяткам прибавили 3 десятка и еще прибавили 3 десятка. Нельзя ли узнать это сразу?

— Можно: 3 десятка повторить 3 раза — будет 9 десятков, или 90.

— А как узнать сразу, сколько будет всех единиц?

— 2 повторить 3 раза — будет 6.

— К 32 прибавить 32 и еще прибавить 32 — как сказать это короче?

— 32 повторить 3 раза.

— Как записать это короче? Запиши.

Ученик пишет 32×3 .

— 32 повторить 3 раза — сколько будет? Запиши.

Ученик пишет результат: $32 \times 3 = 96$.

— Вы уже знаете: вместо „повторить“ говорят „умножить“. Как же прочитаете вы то, что написано?

— 32 умножить на 3 — будет 96.

— Как умножили мы 32 на 3: сразу или нет?

— Не сразу: сначала умножили 30 на 3, потом 2 на 3.

— Да, чтобы умножить 32 на 3, надо 32 разбить на десятки и единицы; сначала умножить десятки, потом единицы. Как же умножить 32 на 3? Умножьте 23 на 4.

За умножением двузначного числа на однозначное идет деление двузначного числа на однозначное в смысле разделения на равные части и деление двузначного числа на двузначное в смысле отыскания содержания.

При делении двузначного числа на однозначное делимое разбивается на такие две группы, из которых одна дает десятки частного, другая — его единицы. Для этого иногда надо разбить делимое на его десятки и единицы ($86:2$), иногда — по-другому, раздробивши в единицы один или несколько десятков ($52:2$, $70:5$). Следует начать с первого из этих случаев как более простого; затем рассмотреть деление круглых десятков, дающее в частном десятки вместе с единицами ($50:2$), и потом уже перейти к общему случаю деления, требующему раздробления десятков в единицы.

— Садовник сорвал 80 яблок и разложил их поровну в 2 корзины. По сколько яблок положил он в каждую корзину? Что надо сделать, чтобы узнать это? Как разделили вы 80 на 2 равные части?

— Сразу, на память: 80 — это 8 десятков, 8 разделить пополам — будет 4; 8 десятков разделить пополам — будет 4 десятка, или 40.

— После этого подобрал он под яблоней еще 6 яблок и их разложил поровну в те же 2 корзины. По сколько яблок пришлось еще в каждую корзину? Как это узнать? Сколько всех яблок набрал садовник? По сколько яблок положил он в каждую корзину? Садовник набрал 86 яблок и разложил их поровну в 2 корзины. Что надо сделать, чтобы узнать, по сколько яблок положил он в каждую корзину?

— Надо 86 разделить на 2 равные части.

— Как разделили мы 86 на 2 равные части?

— Сначала разделили 80, потом 6.

— Да, чтобы разделить 86 на 2 равные части, мы разбили 86 на десятки и единицы; сначала разделили десятки, потом единицы. Повторите.

Хозяйка купила 2 кг картофеля за 50 копеек. Почем платила она за 1 кг?

Ученики могут дать верный ответ, разделив 50 на 2, например так: 1 десяток разделить пополам — будет 5; а если разделить 5 десятков, то получится в 5 раз больше 5, т. е. 25; $50:2=25$.

Затем из рассмотрения десятичного состава полученного числа выводится иной прием деления.

— Из скольких десятков и единиц состоит число 25? Какое число надо разделить на 2 равные части, чтобы получить 2 десятка? Какое число надо разделить на 2 равные части, чтобы получить 5 единиц? На какие же группы удобно разбить число 50, для того чтобы разделить его на 2 равные части?

— На 40 и 10.

— Да, так делить всего удобнее, потому что, разделив 40, мы получим все десятки того числа, которое отыскиваем, а разделив 10, найдем все единицы этого числа.

Выведенный прием применяется к остальным случаям деления круглых десятков: $30:2$, $70:2$, $90:2$; $60:5$, $70:5$; $60:4$, $100:4$ (сюда не входят деления $30:5$, $40:5$; $30:6$; $40:8$ как табличные деления, выходящие из предела 20, и деления $80:5$, $90:5$; $90:6$ как сводящиеся к делениям $30:5$, $40:5$ и $30:6$).

— На двух грузовиках привезено 52 ц сена; на обоих поровну. По сколько центнеров сена было на каждом грузовике? Как это узнать? Как станете вы делить 52 на 2 равные части?

Знакомые уже с делением двузначного числа на однозначное в таких случаях, как $48:2$, $96:3$ и т. п., ученики и здесь могут сказать:

— Мы разделим сначала 50, потом 2.

— Как станете вы делить 50 на 2 равные части?

— Мы разобьем 50 на 40 и 10.

— Стало быть, на какие же группы разобьется тогда все число 52?

— На 40, 10 и 2.

— Делите.

— 40 разделить на 2 равные части — будет 20; 10 разделить пополам — будет 5; 2 разделить на 2 равные части — будет 1; 20 да 5 да 1 — всего 26.

— Из скольких десятков и единиц состоит полученное число 26? Мы разбили 52 на 40, 10 и 2 (эти группы могут быть записаны). Которая из этих групп дала нам 2 десятка? А от деления каких групп получилось 6 единиц? Сколько единиц дала вторая группа? третья? С одного ли раза получили мы все 6 единиц? Не догадаетесь ли вы, что надо сделать, чтобы получить все 6 единиц с одного раза?

— Надо 12 разделить на 2 равные части.

— Да, надо из второй и третьей групп сделать одну группу. Какая же будет эта группа? Стало быть, на какие две группы удобно разбить число 52, для того чтобы разделить его на 2 равные части?

— На 40 и 12.

— Делите.

— 40 разделить на 2 равные части — будет 20; 12 разделить пополам — будет 6; 20 и 6 — будет 26.

— Делятся ли все 5 десятков на 2 равные части?

— Делятся.

— Но получатся ли при этом одни только десятки?

— Нет, получатся и единицы.

— Зачем мы разбили 52 не на 50 и 2, а на 40 и 12?

— Затем, чтобы получить все единицы с одного раза.

— Разделим 72 на 3 равные части. Делятся ли все 7 десятков на 3 равные части? Самое большее — из 7 десятков сколько десятков можно разделить на 3 равные части?

— 6 десятков.

— Поэтому, когда станете 72 разбивать на группы, то какая будет первая группа?

— 6 десятков.

— А вторая?

— 12 единиц.

— Делите.

— 60 разделить на 3 равные части — будет 20; 12 разделить на 3 равные части — будет 4; 20 и 4 — будет 24.

Рядом с делением двузначного числа на однозначное в смысле деления на равные части мы ставим деление двузначного числа на двузначное в смысле отыскания содержания. Оба эти деления являются действиями, обратными рассмотренному случаю умножения двузначного числа на однозначное. В самом деле, такое умножение, например $24 \times 3 = 72$, имеет два себе обратных действия: 1) отыскание множимого: $? \times 3 = 72$; это будет деление 72 на 3 равные части; 2) отыскание множителя: $24 \times ? = 72$; а это — вопрос о том, сколько раз 24 содержится в 72, т. е. деление 72 на 24 по содержанию.

Деление двузначного числа на двузначное сначала может быть выполнено посредством вычитания, сложения или умножения; потом следует показать детям, как угадывается частное и как оно проверяется.

— Пачка спичек стоит 21 копейку. Хозяйка купила спичек на 84 копейки. Сколько пачек купила хозяйка? Что надо сделать, чтобы узнать это? Почему надо 84 разделить на 21?

— На 84 копейки дадут столько пачек, сколько раз 21 содержится в 84; а чтобы узнать это, надо 84 разделить на 21.

— Будем узнавать, сколько пачек спичек купила хозяйка. Если она купит одну пачку, сколько денег останется у нее от 84 копеек? Как это узнать? ($84 - 21 = 63$). Купит еще пачку, тогда сколько денег у нее останется? ($63 - 21 = 42$). Купит третью пачку, сколько останется? ($42 - 21 = 21$). Купит еще пачку, останется ли что-нибудь от 84 копеек? ($21 - 21 = 0$). Сколько же пачек спичек купила хозяйка? Как узнали мы, сколько раз 21 содержится в 84?

— Отнимали по 21.

— Да, мы отнимали по 21 до тех пор, пока ничего не осталось, и сосчитали, сколько раз можно отнимать.

Решим нашу задачу по-другому. Если хозяйка купит одну пачку, то она издержит 21 копейку. А если купит еще пачку, то сколько издержит денег? Как это узнать? ($21 + 21 = 42$). Купит еще пачку — сколько заплатит? ($42 + 21 = 63$). Купит еще четвертую пачку — сколько отдаст за все? ($63 + 21 = 84$). Как мы сейчас узнали, сколько раз 21 содержится в 84? Да мы набирали по 21 ($21 + 21 + 21 + 21 = 84$), пока не получили 84, и считали, сколько раз брали. Вместо того чтобы прибавлять по 21, какое действие можно сделать? Да можно умножить 21 на 2, на 3, пока не получится 84. Узнайте умножением, сколько раз 14 содержится в 70.

— 14 повторить 2 раза — будет 28, 14 повторить 3 раза — будет 42, 14 умножить на 4 — будет 56, 14 умножить на 5 — будет 70.

— Сколько же раз 14 содержится в 70? Сколько получится, если 70 разделить на 14?

Но узнавать, сколько раз одно число содержится в другом, так, как мы узнавали, — долго. Я покажу вам, как можно угадать это скорее. Узнаем, сколько раз 21 содержится в 84. Сколько десятков в числе 84? Сколько десятков в числе 21? Вместо чисел 84 и 21 будем делить 80 на 20. Сколько раз 2 десятка содержатся в 8 десятках? А теперь посмотрим, не будет ли и 21 содержаться в 84 тоже 4 раза. Как это проверить?

— 21 повторить 4 раза — будет 84.

— Угадали ли мы, сколько раз 21 содержится в 84?

— Угадали.

— Узнаем, сколько раз 12 содержится в 72. Как будем угадывать это?

— 1 десяток в 7 десятках содержится 7 раз. Надо проверить (посмотреть), не будет ли и 12 содержаться в 72 также 7 раз. Как проверить это?

— 12 умножить на 7 — будет 84.

— Стало быть, содержится ли 12 в 72 семь раз?

— Нет, меньше 7 раз.

— Попробуем теперь, не будет ли 12 содержаться в 72 шесть раз. Как это проверить?

— 12 умножить на 6 — получится 72.

— Сколько же раз 12 содержится в 72? Угадали ли мы это сразу? Хотя мы и не угадали этого сразу, все-таки узнавать так скорее, чем мы узнавали раньше.

Теперь мы рассмотрим умножение однозначного числа на двузначное (например 3×25) и обратное ему действие: деление двузначного числа на однозначное в смысле отыскания содержания ($3 \times ? = 75$) и деление двузначного числа на однозначное в смысле разделения на равные части ($? \times 25 = 75$).

Умножение однозначного числа на двузначное уже достаточно подготовлено рассмотренными ранее случаями умножения: умея множить однозначное число на круглые десятки и на однозначное число, ученики легко поймут, что для умножения на двузначное число, например для умножения 3 на 23, следует разбить двузначное число на десятки и единицы, сначала умножить на десятки (взять 20 троек), потом на единицы (взять 3 тройки).

— Собрано 20 мешков картофеля по 3 меры в мешке. Сколько мер картофеля собрано? Как это узнать?

— 3 повторить 20 раз, 3 умножить на 20 — будет 60.

— Потом набрали еще 3 мешка также по 3 меры в мешке. Сколько мер картофеля собрали еще? Как это узнать?

3 повторить 3 раза, 3 умножить на 3 — будет 9. Сколько всех мер картофеля собрано? Как это узнать?

— К 60 прибавить 9 — будет 69.

— Сколько всех мешков картофеля собрано?

— 23 мешка.

— По сколько мер в мешке?

— По 3 меры.

— Собрано 23 мешка картофеля по 3 меры в мешке. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько мер картофеля собрано?

— Надо 3 повторить 23 раза, надо 3 умножить на 23.

— Мы уже узнали, сколько получится. Сколько? Запиши.

Ученик пишет $3 \times 23 = 69$.

— Как набрали мы 23 тройки?

— Сначала взяли 20 троек, потом 3 тройки.

— Как же умножить 3 на 23?

— Сначала 3 умножить на 20, потом 3 умножить на 3.

— Да, чтобы умножить на 23, надо разбить 23 на десятки и единицы, сначала умножить на десятки, потом на единицы. Почему так следует умножать на 23? Почему так следует набирать 23 тройки?

— Потому что мы умеем умножать на 20, и это просто, скоро; умеем умножать и на 3.

Примечание. При письменном умножении удобнее большее число множить на меньшее, нежели обратно; удобнее, например, 32164 умножить на 6, нежели 6 умножить на 32164. При устном выполнении действия это безразлично, если для нас одинаково легко умножить, например, 40 на 2 и 2 на 40. Поэтому, проходя умножение однозначного числа на двузначное, мы не считаем нужным указывать детям на пользование перестановкой данных чисел, хотя бы ученики и знали, что от такой перестановки результат не изменяется. Мы полагаем даже, что здесь эта перестановка нежелательна, потому что она сократила бы количество упражнений в умножении на двузначное число, необходимых для последующего умножения на число многозначное. Кроме того, при решении задач, особенно во время самостоятельных занятий, такая перестановка могла бы повести к некоторой сбивчивости в выборе множимого и множителя.

Деление двузначного числа на однозначное в смысле отыскания содержания, выполняется так же, как и соответствующее деление на части, только вместо слов „разделить на две, на три равные части“ здесь употребляется выражение „разделить на двойки, на тройки“. Делимое попрежнему разбивается на две группы, из которых одна дает по делению десятки частного, другая — единицы его. Для этого делимое иногда надо разложить

на десятичные группы, а иногда — по-другому, раздробивши в единицы один или несколько десятков.

Примеры. 1) $96:3\text{-ки}: 90:3\text{-ки}=30, 6:3\text{-ки}=2, 30+2=32$.
2) $70:2\text{-ки}: 60:2\text{-ки}=30, 10:2\text{-ки}=5, 30+5=35$. 3) $92:4\text{-ки}: 80:4\text{-ки}=20, 12:4\text{-ки}=3, 20+3=23$.

Деление двузначного числа на двузначное в смысле разделения на равные части производится так же, как и деление двузначного числа на двузначное в смысле отыскания содержания, причем выражение „содержится столько-то раз“ заменяется выражением „разделить на столько-то равных частей“. Частное попрежнему угадывается делением десятков делимого на десятки делителя и проверяется умножением: только в данном случае не делитель умножается на испытуемое частное, а наоборот.

Примеры. 1) 72 разделить на 24 равные части. 60 разделить на 20 равных частей — будет 3. Посмотрим, не получится ли в каждой части по 3 и тогда, когда 72 разделим на 24 равные части. Положим, что в каждой части будет по 3; так как всех частей 24, то, чтобы узнать, какое число разделено, надо 3 умножить на 24 — получится 72; значит, в каждой части будет по 3. 2) 96 разделить на 12 равных частей. 90 разделить на 10 равных частей — в каждой части будет по 9. Проверяем: $9 \times 10 = 90$; $9 \times 2 = 18$; 90 и 18 составят больше 96: на каждую часть не придется по 9 единиц. Пробуем 8. Проверяем $8 \times 12 = 96$; на каждую часть придется по 8.

§ 35. Простейшие дроби. Сложение и вычитание.

Пройдя сложение и вычитание в пределах сотни, а затем умножение и деление в указанных выше случаях, считаем здесь уместным продолжить начатое в отделе двух десятков (стр. 122) ознакомление с простейшими дробями и показать сложение и вычитание дробей, выраженных в одинаковых долях единицы (дробей с одинаковыми знаменателями).

Дети уже знакомы с *одной* долей единицы (яблока, листа бумаги, метра и т. д.). Они умеют писать простейшие доли:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и пр. Знают, как найти одну часть данного числа, например определить, сколько сантиметров содержит $\frac{1}{4}$ м, сколько штук в $\frac{1}{3}$ дюжины. Встречались дети и с обратным упражнением — отысканием целого по одной его части: $4 = \frac{1}{5}$ от?

Теперь мы показываем детям употребление *нескольких* долей единицы и знакомим со сложением и вычитанием дробей, выраженных в одинаковых долях. Сложению и вычитанию дробей должны предшествовать сравнение долей между собой и выражение одних долей в других долях, а затем выделение целого из долей единицы.

Мы ведем изучение простейших дробей, соединяя их в три группы: а) половины, четверти и восьмые; б) половины, трети и шестые; в) половины, пятые и десятые.

Наглядным пособием могут служить дробные счеты (см. § 9 гл. II) разделяемые на равные части прямые линии; затем такие предметы, как лист бумаги, бумажная полоска, нитка, которые удобно делить на части.

Для того, чтобы иметь возможность назвать единицей, например, валик дробных счетов (длину его) и показать, что единицу иногда приходится делить на части, надо сказать несколько слов об измерении.

— Если бы у нас на столе было много кубиков, и мы захотели бы узнать, сколько их, то что надо сделать для этого?

* — Надо сосчитать.

— Вспомните: то, что считают (чему ведут счет), называется единицей. Стало быть, при счете кубиков чем был бы каждый кубик?

— Каждый кубик был бы единицей.

— Что надо сделать, чтобы узнать длину нашей комнаты?

— Надо ее смерить (измерить).

— Чем можно измерить длину комнаты?

— Метром.

— Вот метр. Ступай и измерь длину комнаты.

Производится измерение. Метр должен уложиться в измеряемой длине несколько раз с остатком. Если длина комнаты содержит целое число метров (об этом надо справиться заранее), то можно дать другой пример — измерить расстояние от стены до стула. (Далеко ли от стены поставил я стул?)

— Какова же длина нашей комнаты?

— 8 метров с лишним.

— Слушайте, дети. Мы *мерили* длину комнаты метром; поэтому метр называется *мерой*. Почему же метр называется мерой? (Потому что им меряют.) Но когда мы измеряли, мы *считали*, сколько раз уложился метр, мы *считали* метры; а то, чему ведут счет, как называется? Как же еще можно назвать метр?

— Метр можно назвать единицей.

— Метр уложился в длине комнаты 8 раз с лишним, с остатком. Чем измерить нам этот остаток?

— Сантиметром.

— Сколько сантиметров в метре? Если бы на нашем метре не было понаделано сантиметров, то как могли бы мы их наметить, что для этого должны были бы сделать?

— Разделить метр на 100 равных частей.

— Значит, сантиметр есть какая часть метра? Такая часть уложилась в остатке 3 раза. Чему равен остаток?

— Он равен трем сотым метра.

— Как называли мы метр?

— Мерой или единицей.

— Вот видите: иногда приходится единицу делить на части.

— Какими еще единицами можно измерить длину, например длину дороги, длину пола, длину стола?

— Метрами, дециметрами, сантиметрами,

— Что же надо сделать с единицей, чтобы получить половину ее? Сколько половин в единице? На сколько равных частей разделена та единица, что на третьей проволоке? Как назовете вы каждую такую часть? (Четвертая часть, четверть.) Что надо сделать с единицей, чтобы получить четверть ее? Сколько четвертей в единице? На сколько равных частей разделена единица на следующей проволоке? Как назовете вы каждую такую часть? Что надо сделать с единицей чтобы получить восьмую часть ее? Сколько восьмых в единице?

Что показываю я вам? (Кладет половину.) А теперь? (Четверть.) Теперь? (Две четверти.) Теперь? (Три четверти.) Слушайте дети. Такие числа, как половина, четверть, восьмая, три четверти, называются дробными, числами или *дробями*; они называются так потому, что для получения их единица делится, или дробится, на равные части. Придумайте сами какую-нибудь дробь.

Затем сообщив ученикам, что прибор, на котором мы обозначали дроби, называется дробными счетами, учитель заставляет детей класть на счетах различные дроби: половину, три четверти, восьмую, две восьмых, три восьмых и т. д.

Выяснить понятие о числителе и знаменателе (терминов этих можно здесь и не давать) удобно следующим образом. Учитель кладет на дробных счетах (обозначает при помощи черты, разделенной на части) такую дробь, которую ученикам трудно прочесть с места, например $\frac{11}{20}$, так как деления тут мелкие и их довольно много. Дробь эту и невозможно будет прочесть, если учитель закроет остальные 9 долей.

— Почему не можете вы прочесть этой дроби?

— Трудно разобрать, разглядеть, сколько частей положено.

— Ступай к счетам и попробуй назвать эту дробь.

Ученик считает, сколько положено долей, и насчитывает их 11.

— Можно ли теперь назвать положенную дробь? Почему нет?

— Мы не знаем, какие части на этой проволоке.

— Как же узнать это?

— Надо сосчитать, сколько на этой проволоке всех частей.

Учитель сдвигает вместе все части, отделив например бумажкой прежде положенные 11 частей от остальных 9, и когда ученик сосчитает, сколько всех долей на проволоке, снова кладет 11 долей.

— Назовите теперь эту дробь.

— Одиннадцать двадцатых.

— Что же надо знать, чтобы прочесть положенную дробь?

— Надо знать, на сколько частей разделен весь валек (единица) и сколько положено (взято) таких частей.

Учитель кладет дробь $\frac{3}{4}$.

— Сколько частей (долей) положил я? (3 доли.) Запишем это. (Пишет 3.) Проведем внизу лежачую черточку. Сколько всех долей на этой проволоке? (4). Напишем 4 под черточкой ($\frac{3}{4}$). Назовите положенную дробь. Вот смотрите, как она пишется.

Несколько упражнений в чтении дробей, в числе которых должны быть уже знакомые детям доли $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, а также дроби, равные единице: $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$.

— Теперь я положу на счетах дробь, а вы сами напишите ее в своих тетрадах. (Кладет $\frac{5}{8}$.) Что сначала сосчитаете вы? (Сколько положено частей.) Сколько положено частей? Что же вы напишете? Напишите и проведите внизу черточку. Что сосчитаете теперь? (Сколько всех частей на проволоке, на сколько частей разделена единица.) На сколько частей разделена единица? Что же вы напишете теперь? Где это напишете? Напишите. Назовите ту дробь, которую я положил на счетах, а вы написали.

Показав детям происхождение дробей от деления единицы на равные части и письменное обозначение нескольких долей, даем ученикам для упражнения отыскание нескольких частей данного числа наряду со знакомым уже детям отысканием одной части.

Затем делается сравнение величины долей и выражение одних долей в других долях.

— На сколько равных частей разделен вот этот валик-единица? Как называется каждая такая часть? Что надо сделать с единицей, чтобы получить половину? Сколько половин в единице? Во сколько раз единица больше половины? Во сколько раз половина меньше единицы? А на сколько равных частей разделен вот этот валик? Как называется каждая такая часть? Что надо сделать с единицей, чтобы получить четверть? Сколько четвертей в единице? Во сколько раз единица больше одной четверти? Во сколько раз одна четверть меньше единицы? Прочтите дробь, которую я положу. (Кладет половину.) Кто положит половину (валика) на той проволоке, где валик разделен на 4 равные части? Сколько четвертей в половине? Что надо сделать с половиной, чтобы получить четверть? Что больше: половина или четверть? Во сколько раз половина больше четверти? Во сколько раз четверть меньше половины?

Подобным же образом может быть сделано сравнение $\frac{1}{4}$ с $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$ с $\frac{1}{8}$.

Сравнение долей ведет к выражению одних долей в других долях.

— Сколько четвертей в $\frac{1}{2}$? Запишите это так: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Сколько восьмых в $\frac{1}{2}$? Запишите. Сколько восьмых в $\frac{1}{4}$? Сколько восьмых в $\frac{3}{4}$? Запишите, сколько половин составляют $\frac{2}{4}$? Запишите $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. В какие более крупные доли можно превратить $\frac{2}{8}$?

Сравнение долей производится здесь главным образом для того, чтобы дети могли превращать более мелкие доли в доли более крупные (сокращать дроби), с чем они встретятся при сложении дробей. В рассматриваемой группе дробей (половины, четверти и восьмые) имеют место четыре случая сокращения: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Как сказано выше, мы рассматриваем здесь сложение и вычитание только таких дробей, которые выражены в одних и тех

же долей единицы, т. е. дробей с одинаковыми знаменателями.

Придавая изучению дробей элементарный характер, мы не сообщаем детям относящихся сюда терминов, как-то: числитель, знаменатель, дробь правильная и неправильная, сокращение дробей, обращение целого с дробью в неправильную дробь, исключение целого из неправильной дроби. Не даем поэтому и правил действий в их обычной формулировке.

Располагаем мы сложение и вычитание дробей в следующем порядке: а) Сложение и вычитание без перехода через единицу. Сюда относятся такие случаи сложения, когда сумма дробей меньше и равна единице, и такие случаи вычитания, когда дробь уменьшаемого больше дроби вычитаемого или когда уменьшаемым служит целое число. В этой рубрике мы делаем подразделение: сначала рассматриваем такие сложения и вычитания, в которых кроме одной единицы данными и искомыми служат только дроби. Затем, познакомив детей с числами, называемыми целыми с дробью, проходим такие случаи, где наряду с дробями и с целыми числами появляются и целые с дробью. б) Сложение и вычитание с переходом через единицу. Сюда принадлежат такие случаи сложения, когда сумма дробей слагаемых больше единицы, и такие случаи вычитания, когда дробь уменьшаемого меньше дроби вычитаемого. В необходимости действий над числами дети первоначально убеждаются на конкретных примерах и задачах. Поэтому, приступая к действиям над дробями, лучше начинать не с отвлеченных примеров, а с задач, которые и поведут к требованию выполнить над дробями то или другое арифметическое действие.

А. Сложение и вычитание дробей без перехода через единицу. — Хозяйка купила два куса мыла: один кусок весил $\frac{3}{8}$ кг, а другой $\frac{1}{8}$ кг. Сколько весу было в обоих кусках вместе? Как это узнать?

— Надо к $\frac{3}{8}$ прибавить $\frac{1}{8}$. Надо сложить $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{8}$.

— Запишите это.

Является запись $\frac{3}{8} + \frac{1}{8}$.

— Положите $\frac{3}{8}$ на дробных счетах. (Или: отметьте $\frac{3}{8}$ на чертеже.)

Прибавьте сюда $\frac{1}{8}$. Сколько получилось?

— Получилось $\frac{4}{8}$.

— Запишите $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$. Чем можно заменить $\frac{4}{8}$? (Во что можно превратить $\frac{4}{8}$?) Запишите $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Сколько же весу в обоих кусках мыла?

Следующую задачу нужно дать такую, чтобы сумма дробей была равна $\frac{4}{4} : \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$. Сделав сложение на дробных счетах и получив $\frac{4}{4}$, дети заменяют эту дробь целой единицей.

Подобным же образом решаются и задачи на вычитание.

До сих пор дети имели дело с дробями, которые меньше единицы или равны единице. Теперь надо показать ученикам дроби, которые больше единицы, и целые с дробью. Это удобно сделать при помощи чертежа.

Учитель проводит на доске прямую линию.

— Вот эту черту будем считать за единицу.

Делит ее, например, на 8 равных частей. Это деление может быть сделано на-глаз или лучше при помощи нитки: взять нитку, длина которой равна длине проведенной прямой линии, сложить эту нитку пополам, еще раз пополам и еще раз пополам, полученную восьмую откладывать на прямой линии.

— Прочитайте отмеченную дробь. (Отмечаем, например, $\frac{5}{8}$.) Напишите ее. Что меньше: $\frac{5}{8}$ или единица? Почему $\frac{5}{8}$ меньше единицы?

Затем учитель снова чертит прямую линию прежней длины (эта длина может быть отложена при помощи имеющейся нитки), продолжает ее и на продолжении откладывает еще единицу.

— Какое число обозначено на доске?

— 2 единицы.

— Теперь я каждую из этих единиц разделяю на 4 равные части. (Выполняет это деление; поперечная черточка, отделяющая одну единицу от другой, должна быть больше, заметнее тех черточек, которые стоят между четвертями одной и той же единицы.)

— Прочтите дробь, которую я отмечу. (Отмечает $\frac{7}{4}$.) Напишите ее. Что больше: $\frac{7}{4}$ или единица? Почему $\frac{7}{4}$ больше единицы? (Делит пополам каждую четверть.) На сколько частей разделена теперь каждая единица? Прочитайте дробь, которую я теперь отмечу. (Отмечает $\frac{11}{8}$.)

Напишите ее. Что больше: $\frac{11}{8}$ или единица? Почему? Придумайте сами такую дробь, которая была бы больше единицы. Придумайте дробь, которая меньше единицы. (Отмечает $\frac{8}{8}$.) Какую дробь показываю я вам теперь? Напишите ее. Что больше: $\frac{8}{8}$ или единица? Придумайте такую дробь, которая была бы равна единице.

Чтобы показать детям целое с дробью, учитель проводит на доске прямую линию, откладывает на ней (ниткой) единицу, продолжает ее и на продолжении берет другую единицу; эту вторую единицу делит, например, на 4 равные части; отмечает число, состоящее из первой еди-

ницы и из $\frac{3}{4}$ второй единицы, и предлагает детям прочесть отмеченное число. Если ученики, которые уже читали подобные числа, скажут, что отмечена дробь $\frac{7}{4}$, то учитель обратит их внимание на то, что первая единица не разделена на части, но оставлена целой; тогда дети прочитают отмеченное число как целое с дробью: одна и три четверти.

— Чтобы получить это число, — скажет учитель, — надо к 1 прибавить $\frac{3}{4}$, а потому его можно было бы написать так: $1 + \frac{3}{4}$; но знак „прибавить“ здесь обыкновенно пропускается, и пишут короче: $1\frac{3}{4}$.

Следуют упражнения: учитель пишет числа $2\frac{5}{8}$, $6\frac{1}{4}$, $15\frac{7}{8}$ и т. п., ученики читают их; обратно, учитель говорит подобные числа, дети пишут их. Здесь учитель скажет ученикам, что $1\frac{1}{2}$ называется „полтора“; может сказать, что если при целом числе находится только одна доля, как, например, в числах $5\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{4}$, то такие числа, т. е. 5 и одна половина, 10 и одна четверть, иногда читают так: 5 с половиной, 10 с четвертью.

После этого мы приводим такие случаи сложения и вычитания, когда данными являются и дроби и целые с дробью, а уменьшаемым иногда служит целое число. Здесь учитель объяснит детям, что для прибавления дроби к целому с дробью (или наоборот) надо сложить только дроби, не изменяя целого числа; так же надо поступать и при вычитании дроби из целого с дробью. Для того чтобы к целому с дробью прибавить или от целого с дробью отнять также целое с дробью, надо отдельно сложить или вычесть целые числа и дроби. Для вычитания дроби из целого числа надо одну единицу уменьшаемого раздробить в те доли, в которых выражена отнимаемая дробь.

Б. Сложение и вычитание дробей с переходом через единицу. Прежде чем проходить такие случаи сложения и вычитания, надо показать детям образование целого из долей единицы (исключение целого из неправильной дроби). А для лучшего уяснения этого преобразования следует впереди него поставить выражение целого и целого с дробью в долях единицы (обращение целого и целого с дробью в неправильную дробь).

— На сколько равных частей разделен вот этот валик-единица? (Указывает валик дробных счетов, разделенный пополам.) Как называется каждая такая часть? Сколько половин в единице? Запишите это вот так: $1 = \frac{2}{2}$. Во сколько раз единица больше половины? Во сколько раз половина меньше единицы? А сколько половин в 2 единицах? Как вы это сообразили?

— В 1 единице 2 половины, а в 2 единицах — вдвое больше.

— Запишите это.

Ученики пишут $2 = \frac{4}{2}$.

— Сколько половин в 5, 7, 25 единицах и т. д.? Сколько половин в $5\frac{1}{2}$? Как вы сообразили это?

— В 5 единицах 10 половин; 10 половин и еще 1 половина — 11 половин $\left(5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}\right)$.

— Сколько половин в $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$ и т. д.? Из скольких половин выходит 1 единица? (Сколько половин составляют 1 единицу?) Сколько единиц выйдет из $\frac{4}{2}$? Как вы сообразили это?

— Из 2 половин выходит 1 единица, а из 4 половин 2 единицы, потому что 4 вдвое больше 2.

Или так:

— Половин 4, а единиц будет в 2 раза меньше.

— Запишите это так: $\frac{4}{2} = 2$. Сколько единиц составляют $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{20}{2}$ и т. д.? Сколько единиц заключается в $\frac{7}{2}$? Что будет тут, кроме 3 целых единиц? Чему же равны $\frac{7}{2}$? Запишите это $\left(\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}\right)$. Как сообразили вы, что $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$?

— Половин 7, а единиц будет в 2 раза меньше; 7 разделить на 2 равные части — получится 3 и в остатке 1.

— Сколько единиц и сколько половин в $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, $\frac{47}{2}$ и т. д.?

Подобным же образом могут быть проведены соответствующие упражнения для четвертых и восьмых долей.

Повторяем, все приведенные преобразования выполняются учениками не по правилам, а, как иногда выражаются, по свободному соображению; иными словами, дети, не зная готовой формулы и, следовательно, не пользуясь ею, в каждом данном случае должны найти результат путем рассуждения или соображения; так, например, обращая $6\frac{3}{4}$ в четвертые доли, ученик не скажет: для этого надо целое (6) умножить на знаменатель (4), прибавить числитель (3) и подписать тот же знаменатель; ученик должен рассуждать: в одной единице 4 четверти, в 6 единицах в 6 раз больше, т. е. $\frac{24}{4}$; $\frac{24}{4}$ да $\frac{3}{4}$ всего $\frac{27}{4}$.

Обращение целого с дробью в неправильную дробь может быть названо обращением, или раздроблением в известные доли: $6\frac{3}{4}$ обратить, раздробить в четверти. Исключение целого из неправильной дроби ученики могут называть обращением, или превращением долей в целые

единицы: $\frac{21}{8}$ обратить, превратить в целые единицы, — будет 2 целых единицы и сверх того $\frac{5}{8}$.

После объяснения ученикам указанного преобразования может быть пройдено сложение и вычитание дробей с переходом через единицу. Приводим относящийся сюда процесс вычисления:

$$4\frac{5}{8} + 6\frac{7}{8} = 10\frac{12}{8} = 11\frac{4}{8} = 11\frac{1}{2};$$
$$10\frac{1}{4} - 3\frac{3}{4} = 9\frac{5}{4} - 3\frac{3}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{1}{2}.$$

Мы изложили ход занятий по ознакомлению детей в наменном здесь объеме с дробями первой группы: половинами, четвертями и восьмыми. Подобным же образом проходятся и остальные две группы: половины, трети и шестые; половины, пятые и десятые. Но после изучения первой группы прочие две группы уже не требуют такой подробной проработки.

§ 36. Подготовительные упражнения к таблицам умножения и деления.

Таблицы четырех действий имеют в арифметике весьма большое значение, представляя собой те элементы вычисления, которые должны быть усвоены наизусть. На первом месте стоят таблицы прямых действий — сложения и умножения, так как таблицы обратных действий — вычитания и деления — могут быть сведены к таблицам сложения и умножения. Из таблиц прямых действий особенное внимание должно быть обращено на изучение таблицы умножения, усвоение которой значительно труднее, нежели усвоение таблицы сложения.

Для того чтобы таблица умножения была изучена вполне удовлетворительно, необходимо весьма большое количество упражнений в добывании результатов табличного умножения, причем приемы вычисления должны быть по возможности разнообразны. Составление таблицы умножения путем только сложения было бы работой очень однообразной, утомительной, неспособной в должной мере возбуждать интерес и поддерживать внимание учащихся, а потому и мало целесообразной. В дальнейшем изложении мы укажем, какие приемы могут быть применены к составлению таблицы умножений.

Подготовительными упражнениями к таблицам умножения и деления мы называем здесь счет равными однозначными группами, выходящий за пределы 20.

Счет равными группами проводим мы в такой последовательности. Сначала идет счет пятками, сводящийся к счету десятками, если пятки брать попарно; за ним следует счет четверками

(счет двойками весь пройден в пределе 20) и восьмерками; потом — тройками, шестерками и девятками; наконец — счет семерками. Сопоставление таких групп, из которых одна вдвое или втрое больше другой, может содействовать лучшему усвоению результатов путем сравнения их: сравнивая, например, $8 \times 6 = 48$ и $4 \times 6 = 24$, дети скажут, что один результат вдвое больше другого, и объяснят причину этого.

Проходя с учениками счет равными группами, учитель показывает детям по возможности различные приемы добывания результатов. Пример: 6×8 . Приемы вычисления могут быть такие:

1) Непосредственное вычисление суммы $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$: к 6 прибавить 6 — будет 12; к 12 прибавить 6 — будет 18 и т. д.

2) Вместо того чтобы брать шестерки по одной, будем набирать их группами, такими, какие можем вычислить сразу (2 шестерки — 12, 3 шестерки — 18; это результаты, заключенные в пределах 20); тогда мы придем к вычислению суммы $12 + 12 + 12 + 12$ или $18 + 18 + 12$, из которых первую находим, умно-

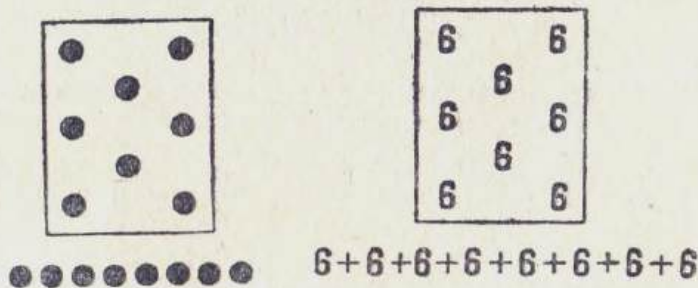


Рис. 17.

жая 12 на 4, а вторую находим, умножая 18 на 2 и прибавляя 12 к 36. Набирая шестерки группами, мы скорее достигаем цели, нежели набирая их по одной. Кроме того, этот прием можно сделать в известной мере наглядным, если расположить шестерки не в ряд, а в виде числовой фигуры, как показано на рис. 17.

Как мы говорили выше (§ 9 гл. II), составленная из значков числовая фигура нагляднее изображает число, нежели значки, расположенные непрерывным рядом (рис. 17). И это не потому, что мы сразу схватывали все значки фигуры, а потому, что мы сразу воспринимаем те небольшие группы (два, три), из которых состоит числовая фигура. Подобно этому расположение шестерок в виде фигуры нагляднее показывает их число, нежели составленный из шестерок ряд (рис. 17). Вместе с тем такая фигура группировкой шестерок указывает и способ вычисления суммы: 3 шестерки налево — 18, три шестерки направо — 18, две шестерки в центре — 12¹.

¹ Если бы мы хотели, чтобы дети вычислили эту сумму, соединяя шестерки парами, то должны были бы сделать иное построение фигуры, расположив шестерки четырьмя рядами по две шестерки в каждом ряду.

3) Искомый результат довольно наглядно может быть найден на счетах. Заметим, что, вычисляя произведение 6×8 , мы ищем число, выраженное по десятичной системе счисления; иначе сказать, мы желаем узнать, сколько десятков и сколько единиц выйдет из 8 шестерок. На 8 проволоках счетов отложим по 6 шариков; это и будет 8 шестерок. Кладем на верхней проволоке еще 4 шарика, так чтобы на этой проволоке были отложены все 10 шариков; а взамен этого сбрасываем 4 шарика с нижней проволоки. Кладем еще 4 шарика на второй сверху проволоке и сбрасываем 4 шарика: 2 шарика с нижней и 2 на второй снизу. Продолжая поступать таким образом, мы придем к тому, что на четырех верхних проволоках будет по 10 шариков; а на следующих двух — на одной 6, на другой 2. Сбрасывая эти 2 шарика и кладя вместо них 2 шарика на той проволоке, где их было 6, имеем: на четырех проволоках по 10 шариков и на одной 8, а всего 48.

Этот прием удобно применяется к счету такими группами, которые больше 5: к счету шестерками, семерками, восьмерками и девятками¹.

Приемом этим можно пользоваться и помимо счетов — на цифрах. Пусть надо найти произведение 7×6 .

$$\begin{array}{r} 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \\ + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

Пишем это произведение в виде суммы. Идя слева направо, прибавляем к семеркам по 3, а идя справа налево, отнимаем по 3. Имеем 4 десятка и 2 единицы, или 42.

4) Чтобы вычислить произведение 6×8 , представим себе, что каждая шестерка разложена на тройки. Троек будет 16, следовательно, вместо 8 шестерок можно взять 16 троек, т. е. умножить 3 на 16.

Заметим, что не всякий случай табличного умножения допускает применение всех изложенных приемов. Так, последний прием неприменим к счету семерками. Иногда он не может быть употреблен и в тех случаях, когда ведется счет такими группами, которые разлагаются на меньшие группы. Это случится тогда, когда умножение меньших групп потребует знания таблицы умножения за пределом 20; между тем мы опираемся здесь на знакомую уже детям таблицу умножения в пределе 2 десятков. Например, если при вычислении произведения 9×6 мы заменим каждую девятку 3 тройками, то придем к умножению 3×18 , для выполнения которого требуется знание таблицы за пределом 20².

¹ В нашем примере (6×8) единицы произведения получились на 2 проволоках (6 и 2). Заметим, что при счете группами, большими 5 (и равными 5, это встретится только три раза: 6×8 , 7×4 и 7×7 (не считая 6×3). Во всех же остальных случаях единицы произведения окажутся на одной проволоке.

² Нужды нет, что счет тройками уже проведен: он предшествовал счету девятками. Но он пр. Яден сравнительно недавно; а мы должны опираться здесь на такие знания, которые стали уже прочным достоянием памяти.

По той же причине прием второй не всегда приводит к умножению двузначного числа на однозначное. Например при вычислении произведения 8×8 , соединяя восьмерки парами, приходим к сумме $16 + 16 + 16 + 16$. Но находить эту сумму умножением (16×4) мы не станем, а вычисляем ее непосредственным сложением или же находим умножением сумму трех слагаемых (16×3) и прибавляем к ней четвертое слагаемое.

Изложим примерный ход урока по ознакомлению со счетом равными группами. Берем умножение 8×6 .

— Слушайте задачу. Мальчик начал читать книжку в понедельник и прочитал в этот день 8 страниц; во вторник прочитал еще 8 страниц. Сколько страниц прочитал он в эти два дня? Как это узнать?

— К 8 прибавить 8 — будет 16.

Учитель пишет на классной доске $8 + 8$.

— В среду прочитал он еще 8 страниц. Сколько страниц теперь прочитано? Как это узнать? (Приписывает еще слагаемое.) В четверг прочитал он еще 8 страниц. Сколько страниц теперь прочитано? Как это узнать? В пятницу прочитал он еще 8 страниц. Сколько страниц теперь прочитано? Как это узнать? В субботу прочитал он еще 8 страниц, и вся книжка была прочитана. Сколько страниц в этой книжке?

По мере того как ученики дают ответы, учитель приписывает по одному слагаемому, и в конце является запись $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$.

— Прочитайте то, что написано.

— К 8 прибавить 8, еще прибавить 8, еще прибавить 8, еще прибавить 8 и еще прибавить 8 — получится 48.

— Как можно прочитать это короче?

— 8 повторить 6 раз — будет 48.

— Как можно записать это короче? Ступай и запиши.

Ученик пишет $8 \times 6 = 48$.

— А как короче сказать самую задачу?

— Мальчик прочитал книжку в 6 дней; каждый день читал он по 8 страниц. Спрашивается, сколько страниц в этой книжке? Что же надо сделать, чтобы решить эту задачу?

— Надо 8 повторить 6 раз — будет 48.

— Для того чтобы 8 повторить 6 раз, мы прибавляли по 8, набирали по 1 восьмерке. Как можно иначе набрать 6 восьмерок?

— По 2.

— Набирайте по 2.

Учитель соединяет написанные восьмерки попарно, например подчеркивая их: $\underline{8+8}$, $\underline{8+8}$, $\underline{8+8}$; ученики вычисляют: 2 восьмерки — 16, еще 2 восьмерки — 16; 16 да 16 — будет 32, да еще 16 — будет 48. Для того чтобы облегчить ученикам вычисление, над каждой парой восьмерок может быть написано число 16.

— Вы к 16 прибавляли 16 и еще 16. Как можно вычислить это скорее?

— 16 повторить 3 раза; 16 умножить на 3.

— А как умножить 16 на 3?

— 10 умножить на 3 — будет 30; 6 умножить на 3 — будет 18; 30 да 18 — будет 48.

— Как же скорее набрать 6 восьмерок: по 1 или по 2?

— По 2 скорее.

Затем учитель повторяет этот прием, располагая 6 восьмерок в виде числовой фигуры.

— Сколько восьмерок в верхнем ряду? в среднем? в нижнем? Сколько здесь всех восьмерок? 2 восьмерки — это сколько? Значит, в каждом ряду будет 16. А сколько всех рядов? Как же узнать, чему равны 6 восьмерок?

Далее показывается детям на счетах и на цифрах третий прием умножения, состоящий в том, что восьмерки дополняются до десятков путем прибавления двоек; э.и двойки отнимаются от последней восьмерки.

Наконец счет восьмерками сводится к счету четверками. Написав в ряд 6 восьмерок, учитель спрашивает:

Если каждую восьмерку разложить на четверки, то сколько четверок выйдет из каждой восьмерки? А сколько четверок выйдет из 6 восьмерок. Что же теперь должны мы сделать?

— 4 повторить 12 раз; 4 умножить на 12.

— Умножьте.

— 4 умножить на 10 — будет 40; 4 умножить на 2 — будет 8. 40 да 8 — будет 48.

Упражнения в счете равными группами должны сопровождаться решениями задач.

При решении задач учитель показывает детям различные приемы относящихся сюда вычислений.

Каждая задача на умножение сопровождается соответствующей ей обратной задачей на деление по содержанию, которая решается на основании произведенного перед этим счета равными группами.

Возьмем для примера счет четверками.

Предлагая детям задачу: „Кузнец подковал в один день 8 лошадей, каждую на все ноги. Сколько вышло у него подков?“, учитель первоначально делает из нее задачу на сложение, записывая решение в виде суммы $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$; потом от сложения дети переходят к умножению, записывая эту сумму в виде произведения 4×8 . Показываются различные приемы вычисления написанной суммы.

Затем идет задача на деление по содержанию, в которой нужно число разделить на 4.

Численные примеры должны состоять из следующих упражнений: а) Вычисление сумм равных слагаемых с переходом от знака сложения к знаку умножения; при этом указывается (подчеркиванием), какими группами набирать слагаемые. Пример: $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Сосчитав число четверок, дети продолжая приведенную строку, приписав после знака равенства 4×9 . Набирая четверки подчеркнутыми группами, дети вычисляют эту сумму, складывая $12 + 12 + 12$ или умножая 12 на 3. Результат 36 записывается в ту же строку после нового знака равенства. б) Умножения, стоящие уже отдельно от сложения, например 4×7 . Эти упражнения имеют контрольный характер, проверяя, насколько запомнили дети результаты счета равными группами. Если какой-либо результат позабыт, дети находят его

попрежнему. в) Отыскание множителя $4 \times ? = 24$ выполняется на основании усвоенного счета четверками. г) Деление по содержанию: сколько раз 4 содержится в 32? Эти упражнения являются непосредственным выводом из предшествующих. д) Нахождение числа по данной одной части его: $4 = \frac{1}{7}$ от ?, т. е. 4 составляет седьмую часть какого числа? Эти упражнения, относящиеся собственно к умножению (надо 4 повторить 7 раз), содействуют запоминанию результатов деления на равные части: седьмая часть 28 равна 4 или: 28 разделить на 7 равных частей — будет 4.

§ 37. Таблица умножения.

Собственно говоря, изучение счета равными группами является вместе с тем и изучением таблицы умножения. Однако принимая в соображение, с одной стороны, то значение, какое имеет в арифметике твердое знание таблицы умножения, а с другой стороны — то обстоятельство, что надлежащее усвоение этой таблицы дается детям нелегко, мы не считаем возможным ограничиться приведенными упражнениями в счете равными группами, а предлагаем еще раз пройти все случаи табличного умножения в иной последовательности, завершая это изучение составлением таблицы умножения в порядке.

Раньше, при счете равными группами, последовательность упражнений определялась величиной групп: счет пятками, четверками и восьмерками; тройками, шестерками, девятками и семерками.

Теперь мы проведем табличное умножение, располагая его в зависимости от величины множителя.

Изучение однообразного ряда примеров, из которых состоит таблица умножения, может быть значительно облегчено, если мы выделим некоторые из этих примеров и по ним, как по вехам, будем отыскивать результаты всех прочих табличных умножений.

Таковыми вехами можно сделать: 1) умножение на 2, требующее простого сложения двух чисел; это умножение уже вполне усвоено учениками: оно заключается в пределах двух десятков и, кроме того, находится в таблице сложения; 2) умножение на 10, выполняемое заменой единиц десятками: сколько было единиц, столько станет десятков; 3) умножение на 5, которое производится умножением на 10 и делением пополам; например для того чтобы умножить 7 на 5, рассуждаем: 10 семерок составляют 70, а 5 семерок составят вдвое меньше.

К этим трем умножениям могут быть сведены в пределах таблицы все умножения, соответствующие остальным множителям. Умножение на 3 может быть сделано прибавлением множимого к удвоенному множимому: $8 \times 3 = 8 \times 2 + 8 = 16 + 8 = 24$. Умножение на 4 можно выполнить удвоением результата умножения на два: $9 \times 4 = (9 \times 2) \times 2 = 18 \times 2 = 36$. Или же умножение на 4 может быть произведено вычитанием множимого из упятеренного множимого: $6 \times 4 = 6 \times 5 - 6 = 30 - 6 = 24$. Умножение на 6 может быть сделано прибавлением множимого к упятерен-

ному множимому: $7 \times 6 = 7 \times 5 + 7 = 35 + 7 = 42$. Умножение на 9 можно выполнить вычитанием множимого из удесятеренного множимого: $6 \times 9 = 6 \times 10 - 6 = 60 - 6 = 54$. Умножения на 7 и на 8 могут быть произведены: первое — прибавлением удвоенного множимого к упятеренному множимому, а второе — вычитанием удвоенного множимого из удесятеренного: $4 \times 7 = 4 \times 5 + 4 \times 2 = 20 + 8 = 28$; $5 \times 8 = 5 \times 10 - 5 \times 2 = 50 - 10 = 40$.

Такая разработка табличного умножения (мы разумеем здесь таблицу умножения за пределом 20) сопровождается решением задач и примеров.

Изложим примерный ход уроков по ознакомлению детей с указанными приемами умножения.

— Хозяйка сварила из малины 2 банки варенья по 6 кг в каждой. Сколько килограммов варенья сварила она из малины? Как это узнать?

— Надо 6 умножить на 2 — будет 12.

— А из клубники она сварила 4 таких же банки. Как узнать, сколько килограммов клубничного варенья она сварила?

— Надо 6 умножить на 4.

— Из малины она сварила 2 банки варенья, а из клубники 4 таких же банки. Во сколько раз больше сварила она клубничного варенья? Из малины она сварила 12 кг варенья, а из клубники вдвое больше. Как отсюда узнать, сколько килограммов клубничного варенья сварила хозяйка?

— Надо 12 умножить на 2 — будет 24.

— Нам надо было 6 умножить на 4. Как же мы это сделали?

— 6 умножили на 2, а потом 12 умножили опять на 2.

— Сколько надо листов бумаги, чтобы сшить 10 тетрадей в 6 листов каждая? Как это узнать?

— Надо 6 умножить на 10 — будет 60.

— А что надо сделать, чтобы узнать, сколько бумаги пойдет на 5 таких же тетрадей?

— Надо 6 умножить на 5.

— Во сколько раз меньше пойдет бумаги на 5 тетрадей, нежели на 10 тетрадей? На 10 тетрадей идет 60 листов бумаги, а на 5 тетрадей — вдвое меньше. Как отсюда узнать, сколько бумаги пойдет на 5 тетрадей?

— 60 разделить пополам — будет 30.

— Нам надо 6 умножить на 5. Как можно это сделать?

— 6 умножить на 10 — будет 60; 60 разделить пополам — будет 30.

— Ученик сшил 5 тетрадей в 6 листов каждая. Сколько листов бумаги пошло на эти тетради? Как это узнать?

— Надо 6 умножить на 5 — будет 30.

— А товарищ его сшил 6 таких же тетрадей. Как узнать, сколько бумаги пошло на тетради у его товарища?

— Надо 6 умножить на 6.

— На сколько листов больше израсходовал на тетради второй ученик? Один ученик израсходовал на тетради 30 листов бумаги, а другой —

на 6 листов больше. Как отсюда узнать, сколько листов бумаги пошло на тетради у другого ученика?

— К 30 прибавить 6 — будет 36.

— Нам надо 6 умножить на 6. Как же можно это сделать?

— 6 умножить на 5 — будет 30; к 30 прибавить 6 — получится 36.

— Садовник обобрал 10 кустов красной смородины; с каждого куста он собрал по 3 кг ягод. Сколько килограммов красной смородины собрал садовник? Как это узнать?

— Надо 3 умножить на 10 — будет 30.

— Потом обобрал он 9 кустов белой смородины и собрал с каждого куста также по 3 кг ягод. Как узнать, сколько килограммов белой смородины собрал садовник?

— Надо 3 умножить на 9.

— Красной смородины обобрано 10 кустов, а белой только 9 кустов. С каждого куста и той и другой смородины собрано по 3 кг. На сколько килограммов белой смородины собрано меньше, чем красной? Красной смородины собрано 30 кг, а белой на 3 кг меньше. Как отсюда узнать, сколько собрано белой смородины?

— От 30 отнять 3 — получится 27.

— Нам надо умножить 3 на 9. Как же можно это сделать?

— 3 умножить на 10 — будет 30; от 30 отнять 3 — получится 27.

— Мальчик накопил 5 трехкопеечных монет. Сколько денег он накопил? Как это узнать?

— Надо 3 умножить на 5 — будет 15.

— А сестра его накопила 7 таких же монет. Как узнать сколько денег накопила сестра?

— Надо 3 умножить на 7.

— На сколько монет больше накопила сестра? А какие это монеты; во сколько копеек каждая? На сколько копеек больше накопила сестра? А как это узнать?

— 3 повторить 2 раза — будет 6.

— Брат накопил 5 монет, а всего 15 копеек; сестра накопила больше на 2 монеты, или на 6 копеек. Как отсюда узнать, сколько денег накопила сестра?

— К 15 прибавить 6 — будет 21.

— Как получили мы 15? Как получили мы 6? Сколько трехкопеечных монет накопила сестра? Как можно 3 умножить на 7?

— 3 умножить на 5 — будет 15; 3 умножить на 2 — будет 6; к 15 прибавить 6 — получится 21.

— Учитель роздал перья 10 ученикам по 6 перьев каждому. Сколько перьев роздал учитель? Как это узнать?

— Надо 6 умножить на 10 — будет 60.

— Другой раз учитель роздал перья в том же классе и дал каждому ученику тоже по 6 перьев; но учеников в этот день было только 8. Как узнать, сколько перьев роздал учитель в этот раз?

— Надо 6 умножить на 8.

— На сколько меньше было учеников во второй раз? На сколько меньше перьев роздано во второй раз? А как это узнать?

— 6 умножить на 2 — будет 12.

— Первый раз учитель rozdл 60 перьев, а второй раз на 12 перьев меньше. Как отсюда узнать, сколько перьев rozdано во второй раз?

— От 60 отнять 12 — будет 48.

— Скольким ученикам rozdаны перья в первый раз? Скольким ученикам rozdаны перья во второй раз? Почему второй раз rozdано перьев меньше? Как же можно 6 умножить на 8?

— 6 умножить на 10 — будет 60; 6 умножить на 2 — будет 12; от 60 отнять 12 — получится 48.

Упражнения должны заканчиваться примерами на три действия: сложение, вычитание и умножение. В эти упражнения можно ввести скобки, ставя внутри скобок табличное умножение и соединяя скобки знаками сложения и вычитания¹.

Упражнение в табличном умножении мы заканчиваем таблицей умножения в порядке; дети составляют ее во время самостоятельных занятий. Задавая эту работу, следует указать детям на состав таблицы и обратить их внимание на то, что таблицу умножения надо знать наизусть.

— Вспомните, какие числа называются однозначными. Переберите все однозначные числа. Слушайте дети: вы уже умножали все однозначные числа одно на другое. Теперь вы еще раз умножите их в том порядке, в каком мы изучали: если помните, сколько получается, то сразу запишите это; а если в каком-нибудь примере (в какой-нибудь строчке) не помните, сколько должно получиться, то вычисляйте так, как вычисляли раньше. У вас составится тогда *таблица умножения*. В этой таблице каждое однозначное число умножено на каждое однозначное число. Таблицу эту надо знать наизусть, т. е. надо помнить, например, что умножить 7 на 6 — будет 42; 8 на 8 — 64 и т. д.

Усвоению таблицы умножения наизусть довольно значительную помощь могут оказать такие выражения, как „дважды семь“, „шесть восемь“ и т. д. Особенность этих выражений, вместе с их краткостью создает известное звуковое впечатление, которое содействует запоминанию. Ввиду этого мы считаем полезным познакомить детей с такими выражениями. Лучше всего это сделать, сопоставляя табличные умножения, различающиеся перестановкой множимого и множителя.

— Мальчик купил 2 пряника, по 5 копеек каждый. Сколько заплатил он за пряники?

— Как это узнать? Почему надо 5 повторить 2 раза? Да 1 пряник стоит 5 копеек, а 2 пряника — 2 раза по 5 копеек. 5 повторить 2 раза — сколько будет? Поди, запиши это.

Ученик пишет $5 \times 2 = 10$.

— Прочитайте то, что написано.

— 5 повторить 2 раза — будет 10.

— А как можно прочитать короче? Короче это можно прочитать так: 2 раза по 5 — будет 10; 2 раза 5 — будет 10. Слушайте, дети: вместо

¹ По принятому в математике знаменному, скобки в таких случаях могли бы быть и опущены. Но мы думаем, что в начальной арифметике скобки лишними не будут, а послужат к уяснению порядка вычислений.

того, чтобы говорить „два раза“, говорят иногда „дважды“. Что же значит „дважды“?

- Дважды — значит два раза.
- А что значит — „дважды пять“?
- Дважды 5 — значит два раза пять.
- Как можно прочитать теперь то, что написано?
- Дважды 5 — будет десять.
- Прочитайте еще короче, не говоря слова „будет“.
- Дважды 5 — десять.

— Другой раз мальчик купил 5 пряников, по 2 копейки каждый. Сколько заплатил он за пряники? Как это узнать? Почему надо 2 повторить 5 раз? 2 повторить 5 раз — сколько будет? Поди, запиши это.

Ученик пишет $2 \times 5 = 10$.

- Прочитайте то, что написано.
- 2 повторить 5 раз — будет 10.
- Кто читает короче?
- 5 раз по 2 — будет 10. 5 раз 2 — 10.
- Слушайте, дети: вместо того, чтобы говорить „пять раз“, говорят иногда „пятью“. Что же значит „пятью“? А что значит „пятью два“? Как можно прочитать теперь то, что написано?

— Пятью 2 — десять.

А как читали мы первую строку? (Указывает на прежнюю запись $5 \times 2 = 10$.)

- Дважды 5 — 10.
- 2 повторить 3 раза — сколько будет? Запиши это.

Ученик пишет $2 \times 3 = 6$.

- Вместо того, чтобы говорить „два раза“, как иногда говорят?
- Дважды.

А вместо „три раза“ как можно сказать?

- Трижды.
- Как же можно прочитать то, что написано?
- Трижды два — шесть.
- А что значит „дважды три“?
- Два раза три, два раза по три.

— Дважды 3 — сколько?

— Дважды 3 — 6.

— Запиши это.

Ученик пишет $3 \times 2 = 6$.

- Кто догадается, что значит „четырежды“?
- Четырежды значит четыре раза.

Учитель пишет: $2 \times 4 = 8$.

— Читайте.

— 2 повторить 4 раза — будет 8.

— Кто скажет это по-другому?

— Четырежды 2 — 8.

Учитель пишет $4 \times 2 = 8$.

— Читайте.

— 4 повторить 2 раза — будет 8.

— Кто читает по-другому?

— Дважды 4 — 8.

— Что значит „шестью? семью“? Как можно сказать вместо „восемь раз“? вместо „девять раз“?

— 7 повторить 6 раз — сколько будет? Запиши это.

Ученик пишет $7 \times 6 = 42$.

— Как прочитать это короче?

— Шестью 7 — 42.

— 6 повторить 7 раз — сколько будет? Запиши это.

Ученик пишет $6 \times 7 = 42$.

— Как прочитать это короче?

— Семью 6 — 42.

Полезно давать задачи, в каждой из которых приведены два случая умножения, различающиеся перестановкой множимого и множителя; они служат для того, чтобы: 1) напомнить детям о свойстве результата умножения не изменяться при перестановке данных; 2) путем сопоставления уяснить, какое из данных в задаче чисел должно быть принято за множимое (какое число надо повторить, умножить), и какое — за множитель (сколько раз надо повторить, на какое число надо умножить¹); 3) поупражнять детей в употреблении таких выражений, как „шестью семь“, „семью шесть“, для чего следует сопоставлять записанные решения каждой задачи, заставляя детей читать в краткой форме; например, записи $6 \times 4 = 24$ и $4 \times 6 = 24$ — дети читают: четырежды шесть — 24 и шестью четыре — 24.

Если бы после всех приведенных нами упражнений оказалось, что дети недостаточно твердо усвоили наизусть таблицу умножения, то можно заставить учеников просто выучить ее. Это заучивание не будет бессознательным зубрением: 1) потому, что таблица составлена самими же учениками и они знают приемы добывания ее результатов; 2) потому что, ознакомившись уже с правилами действий, основанными на пользовании десятичным составом чисел, дети могут понять, что для выполнения действий весьма важно знать наизусть их таблицы.

Кроме того, заучивание наизусть надлежаще разработанного материала может служить и к развитию памяти: ведь заучивают же дети стихотворения, а иногда и прозаические отрывки.

Так как дети уже знакомы с тем свойством умножения, по которому результат не изменяется от перестановки данных, то для заучивания наизусть можно взять не всю таблицу умножения, а только часть, составляющую немного более половины ее, а именно, можно ограничиться только такими умножениями, в которых множимое больше множителя или равно ему, и отбросить все остальные случаи, отличающиеся от указанных только перестановкой данных. Тогда заучиванию подлежат 36 случаев табличного умножения.

Замечено, что всего легче запоминаются такие умножения, в которых множимое и множитель одинаковы; а затем такие,

¹ Знакома учеников с названиями действий, мы откладываем до дальнейшего времени сообщение терминов, относящихся к числам данным и искомым.

в словесное выражение которых входит рифма или хотя некоторое созвучие: пятью пять — двадцать пять, шестью шесть — тридцать шесть (эти два случая входят в первую категорию), шестью восемь — сорок восемь, трижды пять — пятнадцать.

§ 38. Таблица деления.

До сих пор мы различали два вида деления, употребляя для них такие выражения, как „18 разделить на 3 равные части“ и „18 разделить на тройки“. Здесь мы считаем уместным объединить оба случая деления: разъяснить ученикам, что, разделивши, например, 24 на тройки, т. е. узнавши, сколько раз 3 заключается в 24, мы вместе с тем разделили 24 на 3 равные части, т. е. узнали, как велика третья часть 24 (сколько в ней единиц), и обратно; иными словами: разделим ли 24 на тройки, разделим ли 24 на 3 равные части, мы получим одно и то же число¹. Вследствие этого оба выражения „24 разделить на 3 равные части“ и „24 разделить на тройки“ заменяются одним выражением „24 разделить на 3“, которое означает и разделить на 3 равные части и разделить на тройки.

Объединение обоих видов деления, кроме теоретического значения, состоящего в том, что оно сводит все арифметические действия только к *четырем* главным действиям, важно и в практическом отношении, позволяя при отыскивании частного вести рассуждение применительно к тому виду деления, какой в данном случае окажется удобнее. Нужно, однако, заметить, что при решении задач, независимо от самого выполнения действий, следует строго различать, каким из двух видов деления решается задача.

— У меня на столе много кубиков. Я хочу разделить их на 3 равные части, раздать поровну 3 ученикам (вызывает к столу 3 учеников). Кто может сделать это?

Один из желающих сделать этот дележ подходит к столу и начинает раздавать кубики трем своим товарищам: дает кубик одному, кубик другому, кубик третьему; дает опять каждому по кубiku. Здесь учитель останавливает ученика и, обращаясь ко всем, спрашивает:

— Сколько раз давал он каждому по кубiku? Сколько раздач сделал он?

— Две раздачи.

— Сколько кубиков надо взять, чтобы сделать одну раздачу?

— Чтобы сделать одну раздачу, надо взять 3 кубика.

— Начни снова, только прежде чем раздавать, отделий сначала по 3 кубика, пока не выйдут все кубики (подготовь кубики к дележу).

Таким образом все кубики расставляются тройками (в ряд).

— Как расставили мы кубики?

— Мы расставили их тройками.

¹ Быть может, это подметили уже и сами ученики при решении задач на деление.

— Да, мы разделили кубики на тройки. Сосчитайте, сколько вышло троек? (8.) Сколько тут всех кубиков? (24.) 24 разделить на тройки — сколько будет троек? Сколько раз 3 содержится в 24?

— Теперь дели кубики между товарищами.

Ученик берет тройку кубиков и раздает ее по одному кубику, потом так же делит другую и остальные тройки.

— По сколько кубиков получил каждый ученик из каждой тройки? А сколько было всех троек? По сколько же кубиков получил каждый ученик? Что сделали мы сейчас с 24 кубиками?

— Мы разделили их на 3 равные части.

— 24 разделить на 3 равные части, сколько будет в каждой части? Вот видите, дети: если разделить 24 на 3 равные части, то в каждой части будет столько единиц, сколько троек в 24, сколько раз 3 содержится в 24.

— Здесь у меня на планке доски 28 кубиков. Я разделю их на четверки. (Расставляет кубики четверками.) Сосчитайте, сколько вышло четверок? 28 разделить на четверки, сколько будет четверок? Сколько раз 4 содержится в 28? Если бы я теперь хотел все эти кубики разделить на 4 равные части, например, раздать поровну 4 ученикам, то как можно было бы это сделать?

— Из каждой четверки дать каждому по кубику.

— Сколько же всех кубиков достанется каждому? Почему каждому достанется 7 кубиков?

— От каждой четверки достанется по 1 кубику, а от 7 четверок достанется по 7 кубиков.

— Значит, если 28 разделить на 4 равные части, то по сколько будет в каждой части? Что сделал я с кубиками, которые раньше стояли рядом?

— Вы расставили их четверками, разделили на четверки.

— Если мы разделили 28 кубиков на четверки и узнали, что выходит 7 четверок, то что мы еще вместе с этим узнали?

— Мы узнали еще, что если 28 разделить на 4 равные части, то в каждой части будет по 7 (единиц).

— Я скажу вам: 72 разделить на восьмерки — будет 9 восьмерок. А вы скажите мне: 72 разделить на 8 равных частей, сколько единиц будет в каждой части?

— Я скажу вам: 35 разделить на 7 равных частей — в каждой части будет по 5 единиц. А вы скажите мне: 35 разделить на семерки — сколько будет семерок?

— Я скажу вам: в 54 число 9 содержится 6 раз. А вы скажите мне: 54 разделить на 9 равных частей, сколько будет в каждой части?

— Я скажу вам: 48 разделить на 6 равных частей — в каждой части будет по 8 единиц. А вы скажите мне: сколько раз 6 содержится в 48? Учитель пишет $18:3$.

— Читайте.

Одни ученики читают: „18 разделить на 3 равные части“, другие: „18 разделить на тройки“.

— 18 разделить на 3 равные части — сколько будет в каждой части? (Результат записывается.) 18 разделить на тройки — сколько будет троек? Слушайте, дети: вы уже знаете — разделим ли мы 18 на 3 равные части, разделим ли 18 на тройки, все равно получится 6. Поэтому то, что

написано, читают короче так: 18 разделить на три — будет 6. Что же значит: 18 разделить на 3?

— Значит: 18 разделить на 3 равные части.

— А еще что значит: 18 разделить на 3?

— Еще значит: 18 разделить на тройки; узнать, сколько троек; узнать, сколько раз 3 содержится в 18.

Следует несколько упражнений: учитель пишет примеры на деление, ученики читают их, употребляя общее выражение „разделить на четыре, на шесть“; затем учитель спрашивает, что в частности означает „разделить на четыре, на шесть“?

Продолжая и заканчивая таблицу деления, часть которой уже известна ученикам после изучения действий в пределах 20, а остальная часть подготовлена упражнениями, имевшими место при счете равными группами, можно показать детям различные приемы добывания относящихся сюда результатов, отдавая предпочтение выполнению деления при помощи таблицы умножения. Кроме последнего приема, считаем полезным показать отыскание частного путем вычитания и отыскание частного путем разложения делимого на такие группы, какие ученики, на основании прежде пройденного, могут разделить сразу, на память, т. е. на группы, не превышающие 20.

Отыскание частного путем вычитания.

— Столовая имела 45 кг масла; каждый месяц тратила она по 9 кг. Во сколько месяцев вышло у нее все масло? Что надо сделать, чтобы узнать это?

— Надо 45 разделить на девятки. Надо узнать, сколько раз 9 содержится в 45.

— Будем узнавать. Прошел месяц, сколько масла осталось в столовой? Как это узнать? ($45 - 9 = 36$). Продолжайте.

— Прошел другой месяц. Чтобы узнать, сколько осталось масла, надо от 36 отнять 9.

И т. д. до конца ($9 - 9 = 0$).

— Во сколько же месяцев вышло в столовой масло? Сколько раз 9 содержится в 45? А если разделить 45 на 9 равных частей, то сколько получится в каждой части? 45 разделить на 9 — сколько будет?

— Как разделили мы 45 на 9?

— Отнимали по 9, пока ничего не осталось, и сосчитали, сколько раз отнимали.

Отыскание частного по частям.

— Мальчику дали 18 орехов, и он разложил их на 6 одинаковых кучек. По сколько орехов положил он на каждую кучку? Как это узнать? Потом дали ему еще 12 орехов; он и их разложил в те же 6 кучек. По сколько орехов пришлось еще в каждую кучку? Как это узнать? Сколько всех орехов разложил мальчик? По сколько орехов положил он в каждую кучку? Мальчик разложил 30 орехов поровну в 6 кучек. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько орехов пришлось в каждую кучку?

- Надо 30 разделить на 6 равных частей.
- Как разделили мы 30 на 6?
- Сначала разделили 18, потом 12.
- 18 вы уже умеете разделить на 6 сразу. А когда разделите 18, то сколько еще останется делить? Значит, если мы не можем разделить число сразу, то мы будем делить его не сразу, а по частям.

Отыскание частного путем умножения.

Это наиболее удобный и наиболее важный прием, устанавливающий связь между делением и умножением. Он, как и другие два приема, встречался детям и ранее.

— Мальчик читал книжку, в которой 56 страниц; каждый день прочитывал он по 7 страниц. Что надо сделать, чтобы узнать, во сколько дней прочитал он всю книжку?

— Надо 56 разделить на семерки. Надо узнать, сколько раз 7 содержится в 56.

— Давайте угадывать и проверять. Не в 2 ли дня прочитал мальчик всю книжку? Почему нет?

— Потому что в 2 дня он прочитал только 14 страниц.

— А как узнать, сколько страниц прочитал мальчик в 2 дня?

— Надо 7 повторить 2 раза, надо 7 умножить на 2.

— Не в 3 ли дня прочитал он книжку? Не в 4 ли дня? Может быть, в 6 дней? Не в 8 ли дней? Почему так?

— Потому что в 8 дней он прочитает 56 страниц, а в книжке и есть 56 страниц.

— А как узнать, что в 8 дней прочитает он 56 страниц?

— Надо 7 повторить 8 раз, надо 7 умножить на 8.

— Вот видите, дети: мы угадывали и проверяли. Как же мы проверяли, каким действием?

— Умножением.

— Но узнавать так, как мы сейчас узнавали, долго: должно сразу припомнить по таблице умножения: сколько раз надо повторить 7, чтобы получить 56.

— Сколько же раз 7 содержится в 56? А если разделить 56 на 7 равных частей, сколько получится в каждой части? 56 разделить на 7 — сколько будет? Запишите.

Прием отыскания результата при делении на равные части отличается от предыдущего только тем, что здесь подыскивается не множитель, а множимое.

— Хозяйка купила 27 кг картофеля и израсходовала его в 9 дней, каждый день поровну. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько килограммов расходовала хозяйка каждый день.

— Надо 27 разделить на 9 равных частей.

— Если бы она расходовала по 1 кг в день, то сколько килограммов она израсходовала бы в 9 дней? А если б по 2 кг, — тогда сколько? А как это узнать? Не по 3 ли кг расходовала она в день? Как это проверить. Вот видите: чтобы разделить 27 на 9 равных частей, нужно вспомнить по таблице умножения, какое число надо повторить 9 раз, чтобы получить 27.

После достаточного количества упражнений в табличном делении, дети во время самостоятельных занятий составляют таблицу деления в порядке.

Когда ученики ознакомились с приемами табличного деления и усвоили наизусть таблицу деления, следует проделать несколько упражнений на деление с остатком. Если ученики затруднятся назвать сразу наибольшее число, которое можно разделить без остатка, то надо предложить им выполнить деление одним из вышеизложенных приемов, например, путем умножения или посредством разложения делимого на группы.

Пусть надо 54 разделить на 8.

— Припомните по таблице умножения, какое число надо повторить 8 раз, чтобы получить 54.

— Такого числа нет.

— Тогда припомните, какое число надо повторить 8 раз, чтобы получить меньше 54?

Если дети не назовут сразу 6, а укажут например, 4 или 5, можно спросить: нет ли другого числа, побольше, которое, умноженное на 8, давало бы все-таки менее 54, и таким путем довести учеников до искомого числа 6, которое будет наибольшим потому, что следующее за ним число 7, повторенное 8 раз, дает уже больше 54.

Или, например, так:

— Назовите число меньше 54, которое вы умеете разделить на 8.

Ученики могут назвать, например, число 40, и тогда деление с остатком сводится к более простому делению 14 на 8.

Подготовкой к делению с остатком могут служить самостоятельные упражнения в отыскании и выписывании по порядку чисел, которые состоят: из двоек (четных) — от 2 до 20; из троек — от 3 до 30; из четверток — от 4 до 40 и т. д.; наконец, из девяток — от 9 до 90. Если такие ряды дети запомнят или, по крайней мере, будут в состоянии быстро воспроизводить в памяти, то это поможет им выполнить деление в случае, когда оно совершается с остатком. Пусть, например, требуется разделить 45 на 7. Вспоминая ряд чисел, состоящих из семерок, ученики видят, что числа 45 в этом ряду нет; значит, 45 не делится на 7. Далее дети припомнят, какое число этого ряда содержит 4 десятка. Таких чисел два: это — смежные числа ряда 42 и 49. Но так как 45 меньше 49, то наибольшее число, которое можно разделить на 7, будет 42; при этом получится в остатке 3 ($45 - 42 = 3$).

§ 39. Внетабличное умножение и деление.

После изучения таблиц надо пройти внетабличное умножение и деление в пределах сотни. Такое умножение и деление и относящиеся к ним приемы вычисления уже знакомы детям: ученики уже раньше производили эти действия в тех случаях, которые требовали знания таблиц только в пределах 20 (стр. 145).

Те же приемы вычисления дети применяют теперь и к таким случаям умножения и деления, которые требуют знания таблиц этих действий во всем их объеме.

§ 40. Четыре действия.

Упражнения на все действия в пределах сотни, как и в предыдущих отделах, состоят из беглого счета, задач и численных примеров.

Беглый счет в пределах сотни ведется подобно тому, как проводился он и раньше. Заметим только, что в пределах 10 и даже в пределах 20 результаты отдельных действий дети знали наизусть, благодаря чему можно было довольно быстро переходить от одного действия к другому; здесь же придется давать детям некоторое время для выполнения каждого отдельного действия.

Сделаем некоторые указания относительно решения задач.

Еще при решении сложных задач в пределах первых двух десятков следует требовать от учеников связного пересказа содержания задачи и самостоятельной постановки вопросов при разложении сложной задачи на простые. То же самое относится и к решению задач в пределах сотни. Прочитавши задачу и записав во время чтения ее числовые данные на классной доске, учитель заставляет целиком повторить задачу одного или нескольких учеников, пока не убедится, что дети поняли и усвоили содержание задачи. Затем свое участие в решении задачи учитель ограничивает вопросами: что сначала надо узнать? как это узнать? что станете узнавать теперь? и т. д., приходя на помощь в затрудняющих детей случаях.

При решении простых задач, на которые разлагается задача сложная, после того, как ученики назовут действие, нужное для решения вопроса, учитель иногда спрашивает: почему надо сделать именно это действие (почему надо сложить, вычесть и т. д.)? Эти вопросы служат для проверки того, насколько дети усвоили применение каждого из четырех действий, насколько научились они подводить под эти действия различные частные случаи употребления их, встречающиеся на практике. Однако, не следует доходить до педантизма с этим вопросом „почему?“, предлагая его непременно для всякого названного учениками действия: это заняло бы и много времени и сделало бы решение задачи довольно тяжелым. Само собою разумеется, если ученики неверно указали действие (назвали одно действие вместо другого), то при разъяснении ошибки необходимо спросить, почему надо применить то или другое действие. Но если выбор действия сделан учеником верно и притом самостоятельно и сознательно (учитель, знаящий своих учеников, всегда может судить об этом), то вопрос „почему?“ во многих случаях может быть опущен. Он является, по нашему мнению, излишним в тех случаях, когда вопрос или условия задачи явно указывают действие: сколько всего, увеличить, уменьшить на сколько-нибудь и т. д. Пусть, например, дана задача: В первом классе 27 учеников, во втором 15 и в третьем 9; сколько всех учеников в 3 классах? Как это узнать? — Надо сложить 27, 15 и 9. Почему надо сложить? Чтобы узнать, сколько всего. Дети повторяют здесь вопрос самой задачи. Еще пример. Брату 15 лет, сестре на 3 года меньше;

сколько лет сестре? Как это узнать? Почему надо вычесть? Потому что сестре на 3 года меньше. Здесь ученики повторяют то, что сказано в условии задачи. Относительно подобных задач вопрос „почему надо сложить, вычесть?“ уместен тогда, когда ученики только что знакомятся с тем или другим типом простых задач; но не тогда, когда дети уже перешли к решению задач сложных. Однако, простые задачи по форме выражения могут быть очень разнообразны, и если действие не указано явно в самой задаче, то и при решении сложных задач нелишнее иногда спрашивать, почему поставленный вопрос решается тем или другим действием. Пример. Крестьянин поехал из деревни в город, до которого 24 км; каждый час проезжал он по 6 км. Во сколько часов доехал он до города? Как это узнать? Почему надо разделить? Потому что он ехал столько часов, сколько раз 6 содержится в 24. Спрашивая здесь: почему надо разделить? — мы не имеем в виду проверить, знают ли дети, что для определения содержания надо разделить: мы желаем убедиться лишь в том, подводят ли ученики данные задачи под эти случаи применения действия; понимают ли они, что известный путь можно проехать во столько часов, сколько раз путь, проходимый в час, т. е. скорость, содержится во всем пути. Чаще всего вопрос „почему?“ ставится при решении задач на умножение; но здесь он относится не столько к выбору действия (почему надо именно умножить?), сколько к выбору одного числа за множимое, другого — за множитель.

Скажем несколько слов о записях при решении задач.

Все вычисления в пределах сотни следует выполнять устно, хотя бы числа и были написаны; записи каждого выполненного действия удобно располагать по отдельным строкам.

Для того чтобы еще раз напомнить, что узнано каждым выполненным действием, весьма полезно к полученному числовому результату приписывать соответствующее название. Однако было бы неправильно писать, например, $15 + 17 = 32$ кг. С другой стороны, письмо названий при данных числах заняло бы много места и времени. Мы предлагаем не писать наименований ни при данных, ни при результате, соединенном с данными знаком равенства; но, записавши этот результат, еще раз написать его вместе с соответствующим названием. Пусть, например, решается задача: в одной деревне 26 домов, в другой на 12 домов больше; сколько домов в другой деревне? Предлагаемая нами запись решения такая: $26 + 12 = 38$; 38 домов. Эта запись соответствует рассуждению: чтобы узнать, сколько домов в другой деревне, надо к 26 (отвлеченному числу 26) прибавить 12; получится 38 (отвлеченное число). Значит (это слово „значит“ мы заменяем точкой с запятой), в другой деревне 38 домов¹.

При решении численных примеров ученики могут записать все вычисление в нескольких строках, по числу действий. Так,

¹ Наименования при числах данных и в результате имеют место в области составных именованных чисел.

решение примера

$$(57:3) + (13 \times 4) - (96:2) - (95:19) + (35 \times 2) + (60:5)$$

может быть записано следующим образом:

1) $57 : 3 = 19$	7) $23 - 5 = 18$
2) $13 \times 4 = 52$	8) $35 \times 2 = 70$
3) $19 + 52 = 71$	9) $18 + 70 = 88$
4) $96 : 2 = 48$	10) $60 : 5 = 12$
5) $71 - 48 = 23$	11) $88 + 12 = 100$
6) $95 : 19 = 5$	

Или же можно ограничиться только записью над каждой скобкой результата того действия, которое в этой скобке обозначено, и затем уже, не прибегая ни к каким другим промежуточным записям, писать только окончательный результат:

$$\begin{array}{cccccc} 19 & 52 & 48 & 5 & 70 & 12 \\ (57:3) + (13 \times 4) - (96:2) - (95:19) + (35 \times 2) + (60:5) = 100. \end{array}$$

Весьма желательно достигнуть и того, чтобы ученики могли выполнить все вычисления, видя написанными только данные числа и удерживая в памяти все числа, найденные по данным.

Заканчивая проработку сотни, нужно прорешать задачи, служащие для ознакомления учащихся с часами и с простейшими случаями вычисления времени. При этом весьма желательно пользоваться моделью часов: картонным циферблатом с подвижными стрелками.

Проработка сотни заканчивается повторением некоторых вычислений в пределах сотни. Сюда относятся такие результаты вычисления, которые необходимо или желательно знать наизусть. Затем, после повторительных упражнений в отыскании частей данного числа и нахождении целого по одной его части, нужно дать упражнения в нахождении целого по нескольким частям его.

I. Желательно и легко достижимо умение сразу отнимать от сотни всякое двузначное и однозначное число. Умение это довольно ценно при устных вычислениях как в пределах сотни, так и за пределом ее. Возьмем, например, более трудный случай вычитания двузначного числа из трехзначного: $635 - 47$, требующий при обычном приеме раздробления сотни в десятки и десятка в единицы. Отнимем сначала столько, чтобы остались круглые сотни, т. е. 35; затем узнаем, сколько еще осталось отнять, для чего отнимаем 35 от 47 (это вычитание совершается без раздробления); наконец, вычитаем 12 из 600, т. е. собственно из 100; имеем 538. Или так: отнимаем 47 от 600 (собственно от 100); имеем 553; придавая сюда 35, получим 588.

К развитию умения сразу отнимать от сотни могут служить упражнения в дополнении до сотни ($72 + ? = 100$, т. е. сколько надо прибавить к 72, чтобы получить 100?) и в разложении сотни на слагаемые ($100 = 69 + ?$, т. е. 100 состоит из 69 и еще из какого числа?).

II. Ввиду того значения, какое имеет твердое знание таблицы умножения, считаем полезным еще раз повторить эту таблицу, объяснив детям, как написать ее в форме квадрата. О пользовании такой таблицей для нахождения результатов табличного умножения и деления нами сказано было в § 8 гл. II настоящего руководства.

Весьма хорошим упражнением для усвоения таблицы умножения может служить *графическое умножение*, выполняемое на клетчатой бумаге. Уговорившись с учениками принимать сторону клетки за линейную единицу, учитель предлагает детям начертить прямоугольник длиной, например, в 7 единиц и шириной в 6 единиц. (Надо, конечно, условиться, в каком направлении считать длину и ширину. Длина может быть названа здесь шириною, а ширина — вышиной.) Затем ученики считают, сколько клеток содержится в начерченном четырехугольнике. Сначала делается непосредственный счет с указыванием на каждую клетку (такой счет может идти, например, по рядам); затем число клеток определяется умножением: 6 рядов по 7 клеток в ряду — $7 \times 6 = 42$, или: 7 столбцов по 6 клеток в столбце — $6 \times 7 = 42$.

Подобные упражнения, содействуя наглядному усвоению табличного умножения, служат вместе с тем и подготовкой к вычислению площадей.

III. Для быстрых устных расчетов является желательным и усвоение на память разложений некоторых чисел первой сотни на множители. Этому служат упражнения, состоящие в отыскивании множимого и множителя. Разложению подлежат такие числа первой сотни, которые имеют много делителей, как-то: 36, 48, 60, 64, 72, 75, 80, 90, 96, 100.

IV. Далее мы считаем полезным повторить умножение чисел второго десятка на однозначное число, опять с той целью, чтобы дети запомнили эти произведения, заключенные в пределах сотни. Знание таких произведений окажется очень пригодным при делении на двузначное, а впоследствии и на многозначное число. Поясним это. Деление многозначных чисел сводится к такому делению многозначного числа на многозначное, при котором получается в частном не более 9, например, к делению $89\,765 : 17\,953$; а в этом случае отыскивается приблизительное частное путем деления на старший разряд делителя соответственной части делимого; так, в нашем примере мы задаемся 1 десятком тысяч в 8 десятках тысяч и находим приблизительное частное 8. Испытание, выполняемое умножением делителя на 8, показывает, что искомое частное меньше 8; испытывая попрежнему числа 7, 6, 5, находим, что искомое частное равно 5. Таким образом, первоначально найденное приблизительное частное 8 будет далеко от истинного, и нахождение верного частного требует неоднократного испытания. Такой случай особенно часто встречается тогда, когда первая слева цифра делителя есть 1, а следовательно, две первые цифры делителя изображают число второго десятка. Зная на память произведения чисел второго десятка, заключенные хотя бы в пределе ста, мы можем в таких случаях найти верное частное или сразу, или значительно скорее прежнего. Для этого мы за-

даемся не одной, а двумя старшими цифрами делителя в соответственной части делимого. В нашем примере, деля 89 на 17, берем для частного число 5 (так как знаем, что $17 \times 5 = 85$), которое по испытании окажется верным. Возьмем еще пример: $122\,592 : 15\,324$. Делим 122 на 15; зная, что в числах, не превышающих сотню, 15 содержится не более 6 раз ($15 \times 6 = 90$), умножаем в уме 15 на 7, потом на 8; имеем 120 и испытываем число 8. Или так: разлагаем 122 на 90 и 32 и делим на 15 эти числа.

Можно предложить детям составить таблицу умножения чисел второго десятка на однозначные числа, подобно тому, как раньше была составлена, в форме квадрата, таблица умножения однозначных чисел; а затем упражнять детей в пользовании составленной таблицей для отыскания произведений и частных от деления двузначного числа на двузначное.

V. Затем мы приводим, в качестве повторительных упражнений, отыскание частей данного числа, соединенное иногда с умножением на целое число: сколько часов содержат $\frac{2}{3}$ суток? и др.

VI. Наряду с отысканием целого по одной его части мы помещаем упражнения в отыскании целого по нескольким данным частям его¹. Эти упражнения приведены в двух формах: 1) Найти число, $\frac{3}{4}$ которого равны 75. 2) $16 = \frac{2}{3}$ от ?, т. е. 16 составляет $\frac{2}{3}$ какого числа? Рассуждения, приводящие к искомому числу, в обоих случаях почти одинаковы: 1) $\frac{3}{4}$ неизвестного числа равны 75, а $\frac{1}{4}$ будет втрое меньше, или 25; $\frac{1}{4}$ числа равна 25, а все число — вчетверо больше, т. е. 100. 2) 16 составляют $\frac{2}{3}$ неизвестного числа; $\frac{1}{3}$ его будет вдвое меньше, т. е. 8; а 8 составляет $\frac{1}{3}$ от 24.

ГЛАВА VII.

ПЕРВАЯ ТЫСЯЧА.

§ 41. Нумерация.

Нумерация до тысячи, как сказано выше (§ 8 гл. II), лежит в основе нумерации чисел любой величины, которые и читаются и пишутся по классам; а число, представляемое каждым классом в отдельности, заключается в пределах тысячи.

А. Устная нумерация. Ученики уже знают две счетные единицы: простую единицу и десяток. Теперь надо познакомить их

¹ Нахождение целого по данной его части относится к числу труднейших математических операций в начальной школе; поэтому ознакомление с ним учащихся в советской школе производится в 4-м классе. *Ред.*

с сотней как единицей. Наглядными пособиями могут служить здесь опять палочки, которые связываются в пучки по десяти и по сто штук; а затем кубики, бруски и доски арифметического ящика.

— У меня на столе много палочек. Что надо сделать, чтобы узнать, сколько их? Как стали бы мы считать палочки, если б умели считать только до 10?

— Насчитали бы 10 палочек, еще 10 палочек, еще 10 палочек..

— Так и давайте считать. А как наберем 10 палочек, свяжем их в пучок.

Учитель вызывает к столу, например, четырех учеников, из которых каждый набирает по 10 палочек и связывает их в пучок. То же делают следующие четыре ученика и т. д., пока все палочки не будут связаны в пучки. Пусть при этом останется 6 палочек.

— Все ли палочки связаны в пучки? Сколько палочек осталось несвязанными? Что теперь надо сосчитать?

— Теперь надо сосчитать пучки, или десятки.

— Как станете вы считать десятки?

— Так же, как палочки, по одному, пока не наберем 10 пучков; потом опять насчитаем 10 пучков, еще 10 пучков...

Ученики, вызываемые к тому поочередно, по одному, вслух считают десятки: один десяток, два десятка, три десятка,... девять десятков, десять десятков; набравши 10 пучков, связывают их вместе.

— Все ли десятки связаны в большие пучки?

— Нет, осталось три десятка.

— Что теперь надо сосчитать?

— Теперь надо сосчитать большие пучки.

— Сколько десятков в каждом таком пучке? Как называются 10 десятков? Как же назовем мы большой пучок? Сосчитаем, сколько у нас сотен.

Ученик считает вслух: одна сотня, две сотни, три сотни, четыре сотни.

— Видите, дети: сотнями считают так же, как простыми единицами и как десятками: сотня есть также счетная единица. Какие же счетные единицы вы теперь знаете?

— Мы знаем простую единицу, десяток и сотню.

— Считайте сотнями.

— Одна сотня, две сотни, три сотни,... девять сотен, десять сотен.

Затем учитель сообщает или, вернее, выспрашивает у детей названия групп сотен (так как названия эти большинству учеников уже бывают известны).

Одна сотня — иначе сто. Не знает ли кто, как короче называются две сотни, три сотни, четыре сотни и т. д.

Названия: сто, двести, триста,... девятьсот учитель может написать на классной доске.

— А кто знает, как называются десять сотен?

И на этот вопрос может последовать правильный ответ. В противном случае учитель сам сообщит детям название „тысяча“, которое и запишет на классной доске.

— У нас на столе 4 сотни, 3 десятка и 6 палочек. Как сказать короче, сколько здесь палочек?

— Четыреста тридцать шесть.

Следуют упражнения, состоящие в том, что

а) ученики составляют (называют) число по данным десятичным группам его, т. е. зная, сколько в этом числе сотен, десятков и единиц;

б) разлагают данное число на его десятичные группы, т. е. говорят, сколько в этом числе сотен, десятков и единиц.

Те и другие упражнения полезно провести сначала на наглядных пособиях, которыми могут служить кубики, бруски и доски арифметического ящика или палочки, пучки по десяти и связки по сто палочек.

Показывая ученикам брусок арифметического ящика, учитель спросит:

— Вспомните, как называется этот предмет. (Показывает рядом с бруском кубик.) Сколько кубиков заменяет брусок? Если кубик есть простая единица, что такое будет брусок? (Показывает доску арифметического ящика и покрывает ее брусками.) Смотрите, сколько брусков уложилось на доске? Сколько брусков можно напилить из доски? Брусок изображает десяток; что же будет изображать доска?

Упражнения а. Учитель ставит на планку классной доски или на стол 3 доски, 4 бруска и 5 кубиков.

— Назовите то число, которое я обозначил.

— Триста сорок пять.

— Почему вы так прочитали это число?

— Потому что в нем 3 сотни (3 доски), 4 десятка (4 бруска) и 5 единиц (5 кубиков).

Таких упражнений несколько. Примеры должны быть разнообразны: обозначаются числа, в которых налицо все три разряда; числа, в которых нет десятков или единиц.

Упражнения б.

— Обозначьте досками, брусками и кубиками число четыреста двадцать один.

Ученик ставит 4 доски, 2 бруска и 1 кубик.

— Верно ли он обозначил число? Почему надо так обозначить число четыреста двадцать один?

— Потому что в нем 4 сотни, 2 десятка и 1 единица.

Таких упражнений несколько; ученики обозначают такие числа, в которых налицо все три разряда, и такие, в которых нет десятков или единиц. Несколько большее внимание надо уделить числам, содержащим один десяток (двести тринадцать), так как здесь названия десятка и единиц сливаются в одно слово.

Далее следуют те же упражнения без наглядных пособий.

Упражнения а.

— Назовите число, которое состоит из 5 сотен, 3 десятков и 8 единиц.

Упражнения б.

— Четыреста двадцать девять — сколько тут сотен, десятков и единиц?

— Слушайте, дети: сотни, десятки и единицы числа называются его десятичными группами. Повторите. Если я скажу вам: разбейте число

на десятичные группы, то вы должны мне ответить, сколько в этом числе сотен, десятков и единиц. Разбейте на десятичные группы число сто семьдесят восемь. Что будет?

— Будет 1 сотня, 7 десятков и 8 единиц.

Заканчивая устную нумерацию, нелишне заставить учеников провести прямой и обратный счет от одного числа до другого, преимущественно с переходом через круглые сотни.

— Девяносто восемь — считайте дальше.

Ученик считает, пока учитель не остановит его, например, на числе сто двадцать один.

— Считайте назад от тысячи.

Ученик ведет обратный счет, пока учитель не остановит его, например, на числе девятьсот семьдесят четыре.

Б. Письменная нумерация. При изучении письменной нумерации хорошим пособием могут служить счеты. Это пособие не дает наглядного представления о сравнительной величине счетных единиц (сотни, десятка и единицы), как это делают доски, бруски и кубики арифметического ящика или палочки, пучки по десяти и связки по сто палочек: совершенно одинаковые шарики означают каждую из счетных единиц. Но здесь этого и не надо: при ознакомлении с письменной нумерацией назначение наглядного пособия состоит в том, чтобы уяснить местное значение цифр и нуля; это назначение выполняют счеты: как шарики, совершенно одинаковые, означают сотни, десятки и единицы, смотря по тому, на которой проволоке они положены, так одна и та же цифра означает сотни, десятки и единицы в зависимости от того, на каком месте она написана; если в числе нет единиц какого-либо разряда, то проволока, назначенная для этих единиц, остается пустой (т. е. на нее не кладется шариков), а при письменном обозначении на месте этих единиц ставится нуль.

Примечание. Некоторое несоответствие между обозначением чисел на счетах и на письме заключается в том, что на счетах единицы высших разрядов находятся *над* единицами разрядов низших, а при письме — *влево* от них. Это несоответствие может быть устранено при употреблении шведских счетов, если обозначать числа шариками, надеваемыми на вертикальные проволоки, укрепленные на верху счетов. Впрочем, указанное внешнее несоответствие не имеет большого значения, между тем как обозначать числа на горизонтальных проволоках удобнее, нежели на вертикальных, потому что в первом случае приходится только передвигать шарики по проволокам, а во втором — надевать шарики на проволоки и снимать их с проволок.

Кроме того, впоследствии все равно придется показать детям обозначение чисел на горизонтальных проволоках, когда счеты станут орудием вычисления, когда ученики будут производить на них сложение и вычитание в пределе тысячи.

Приступая к письменной нумерации чисел первой тысячи, мы показываем ученикам обозначение этих чисел на счетах и отсюда переходим к обозначению их помощью цифр, проводя соответ-

ствие между обозначением чисел на счетах и обозначением их на письме.

— Положите на счетах число 6. Положите 70. На которой проволоке кладутся единицы? На которой десятки? А на которой проволоке надо класть сотни? Что же означает каждый шарик третьей проволоки? Положите 200, 400, 700, 900.

Выяснив значение шариков третьей проволоки, учитель кладет на счетах различные числа в пределах тысячи, а ученики читают их, и наоборот: учитель диктует такие числа, а ученики кладут их на счетах.

— Прочитайте, какое число положил я.

— Восемьсот сорок три.

— Почему вы так прочитали его?

— На третьей проволоке положено 8 шариков: они означают 8 сотен, восемьсот; 4 шарика на второй проволоке означают 4 десятка, или сорок; 3 шарика на первой проволоке — 3 единицы.

— Теперь какое число положено?

— Четыреста восемь.

— Почему вы так прочитали его? На которых проволоках положены шарики? На которых нет? Что же это означает?

— Это означает, что в числе есть сотни и единицы, а десятков нет.

— Прочитайте, какое число положено теперь?

— Триста восемьдесят.

— Почему вы так прочитали его? На которых проволоках положены шарики? На которой нет? Что это означает?

— Положите число шестьсот семьдесят четыре.

— Как обозначили вы это число? Почему надо так обозначить его?

— Потому что оно состоит из 6 сотен, 7 десятков и 4 единиц.

— Положите девятьсот пять. Почему надо так положить это число? На которых проволоках положили вы шарики? На которых нет? Почему не положили вы шариков на второй проволоке?

Положите пятьсот сорок. Почему надо так положить это число? На которых проволоках положили вы шарики? На которых нет? Почему не положили вы шариков на первой проволоке?

Затем делается переход к письму чисел.

— Положите на счетах 27. Напишите это число. Сколько шариков положено на второй проволоке? Что они означают? Какая цифра написана на втором месте? Что она означает? Сколько шариков положено на первой проволоке? Что они означают? Какая цифра написана на первом месте? Что она означает?

— Положите на счетах число 584. На которой проволоке кладутся сотни? А на каком месте надо писать сотни? Напишите то число, которое положено на счетах.

Еще несколько упражнений в письме чисел, в которых налицо все три разряда: учитель диктует число, ученики кладут его на счетах, а затем пишут в своих тетрадах, после чего один из учеников пишет его на классной доске.

Затем следует письмо чисел, в которых нет десятков, нет единиц, нет ни десятков, ни единиц (круглые сотни), и, наконец, письменное обозначение тысячи.

— Положите на счетах число 803. На всех ли трех проволоках положены шарики? На которой не положено? Как напишете вы это число: что поставите на втором месте?

— На втором месте поставим нуль.

— Напишите же это число.

Ученики пишут 803.

— На второй проволоке не положено шариков. Что это значит?

— Значит, в числе нет десятков.

— А что означает нуль, поставленный на втором месте?

— Он означает, что в числе нет десятков.

Таких примеров несколько.

— Положите число шестьсот тридцать. На всех ли трех проволоках положены шарики? На которой не положено? Как напишете вы это число: что поставите на первом месте? Напишите. Что значит: на первой проволоке не положено шариков, а на первом месте написан нуль?

— Это значит, что в числе нет единиц.

Несколько таких примеров.

— Положите семьсот. На которой проволоке положены шарики?

На второй и первой проволоках шариков не положено: что это значит? Как напишете вы это число: что поставите на втором и первом месте? Напишите. Положите число 100. Напишите его. Объясните, почему так надо писать число сто.

— Положите на счетах девятьсот девяносто девять. Прибавьте сюда единицу. Чем можно заменить 10 шариков первой проволоки? Замените. Сколько шариков положено теперь на второй проволоке? Чем можно их заменить? Замените. Сколько шариков положено теперь на третьей проволоке? Что они означают?

— Они означают 10 сотен.

— Как называются 10 сотен? Чем можно заменить 10 шариков третьей проволоки? Замените. Что же означает шарик четвертой проволоки?

— Шарик четвертой проволоки означает тысячу.

— Кто догадается, как надо написать тысячу цифрами?

Если дети напишут 1000, учитель спросит: почему именно так надо писать это число. В противном случае учитель наведет учеников на письменное обозначение тысячи.

— Сколькими шариками обозначается тысяча на счетах? А мы напишем цифру 1. На которой проволоке положен этот шарик? На каком месте должна быть написана цифра 1? Положены ли шарики на третьей, второй и первой проволоках? Что должно быть поставлено на третьем, втором и первом месте?

Закончив нумерацию до тысячи, считаем здесь уместным проделать с учениками ряд упражнений, состоящих в разложении чисел первого класса на две группы, из которых одна содержит все десятки числа, а другая — его единицы: $684 = 68$ десяткам и 4 единицам, и обратно, в составлении числа по таким группам: 37 десятков и 9 единиц $= 379$. Если же число не содержит единиц, то оно читается как группа десятков: $520 = 52$ десяткам; обратно, числу, представленному в виде группы десятков, дается общепринятое название его: 26 десятков — 260 .

Указанное преобразование чисел следует объяснить при помощи наглядных пособий, которыми могут служить здесь доски, бруски и кубики арифметического ящика.

Учитель ставит 2 доски, 3 бруска, 5 кубиков.

— Прочитайте число, которое я обозначил. Напишите его. Сколькими брусками можно заменить доску? Сколькими брусками заменяются 2 доски? (Делает эту замену.) Прочитайте число, которое теперь обозначено.

— 23 десятка и 5 единиц.

— А как читали мы это же число раньше, когда доски не были заменены брусками?

— Двести тридцать пять.

— Из чего состоит число двести тридцать пять? Да, оно состоит из трех групп: сотен, десятков и единиц. А когда мы заменили доски брусками, мы раздробили сотни в десятки, и число это стало состоять только из двух групп: из десятков и единиц. Из скольких десятков и скольких единиц стало состоять это число?

— Из 23 десятков и 5 единиц.

— Число это записано на доске. Разбейте его так, как сказано, запятой, поставленной сверху.

Ученик ставит запятую: 23'5.

— Прочитайте число, которое влево от запятой.

— 23.

— Что означает это число 23?

— Оно означает 23 десятка.

— Какая цифра направо от запятой? Что означает эта цифра?

Следуют упражнения в указанном разложении уже без наглядных пособий.

— Прочитайте число, которое я написал (678). Разбейте его на десятки и единицы. Сколько будет всех десятков в этом числе? Как вы сообразили это?

— В одной сотне 10 десятков, в 6 сотнях 60 десятков; 60 десятков да еще 7 десятков, всего 67 десятков.

— А сколько единиц в этом числе? Напишите в своих тетрадях 678. Разбейте написанное число запятой.

— Прочитайте число, которое я написал (380). Сколько всех десятков в этом числе? Как вы сообразили это? А сколько единиц в этом числе?

— Единиц в нем нет.

— Напишите в своих тетрадях 380. Отделите запятой его десятки.

Далее идут обратные упражнения: дается число как группа десятков (24 десятка) или как группа десятков и единиц (35 десятков и 7 единиц); ученики должны сказать общепринятое название числа. Разъяснение удобно сделать при помощи наглядных пособий.

Учитель ставит 24 бруска и спрашивает:

— Какое число обозначил я?

— 24 десятка.

— Чем можно заменить 10 брусков? (Заменяет 10 брусков доской.) Сколько брусков осталось теперь? Можно ли еще раз сделать замену брусков доской? (Заменяет.) Сколько брусков осталось? Чем же изображено теперь наше число?

— 2 досками и 4 брусками.

— Прочитайте его.

— 240.

— А как называли вы это число раньше, когда бруски еще не были заменены досками?

— 24 десятка.

Следуют упражнения уже без наглядных пособий.

— 43 десятка — назовите это число по-другому (как называют обыкновенно).

— 430.

— Как вы сообразили это?

— 10 десятков составляют сотню, 40 десятков — 4 сотни; 4 сотни и 3 десятка — 430.

— Назовите число, которое состоит из 35 десятков и 7 единиц.

— 357.

— Как вы сообразили это?

— 35 десятков — 350; да еще 7 — 357.

Изложенные преобразования чисел будут иметь место при выполнении действий в пределах тысячи.

§ 42. Круглые сотни и круглые десятки.

Прежде чем знакомить детей с действиями в пределах тысячи над какими угодно числами, следует пройти в этом пределе действия над круглыми сотнями и круглыми десятками, так как правила действий над всякими числами основаны на пользовании десятичным составом чисел и сводятся, таким образом, к выполнению действий над круглыми сотнями и десятками.

Выполнение действий над круглыми сотнями и десятками требует распространения на сотни и десятки таблиц действий и уже известных детям приемов умножения и деления на десятки.

Приведем примеры.

а) *Сложение и вычитание.*

1) $400 + 200$; 400 — это 4 сотни, 200 — это 2 сотни; к 4 единицам прибавить 2 единицы — будет 6 единиц; к 4 сотням прибавить 2 сотни — будет 6 сотен: $400 + 200 = 600$.

2) $700 - 300$; от 7 отнять 3 — останется 4; от 7 сотен отнять 3 сотни — останется 4 сотни: $700 - 300 = 400$.

При вычитании сотен из тысячи последняя рассматривается как 10 сотен.

3) $90 + 50$; к 9 прибавить 5 — будет 14; к 9 десяткам прибавить 5 десятков — будет 14 десятков, или 140: $90 + 50 = 140$.

4) $120 - 40$; 120 — это 12 десятков; от 12 отнять 4 — останется 8; от 12 десятков отнять 4 десятка — останется 8 десятков: $120 - 40 = 80$.

б) *Умножение и деление.*

5) 200×4 ; 2 повторить 4 раза — будет 8; 2 сотни повторить 4 раза — будет 8 сотен: $200 \times 4 = 800$.

6) $600 : 2$. Здесь удобнее сделать вывод применительно к делению на части: 6 разделить на 2 равные части — будет в каждой

части 3; 6 сотен разделить на 2 равные части — будет в каждой части 3 сотни.

Но мы знаем: разделить ли число на 2 равные части, разделить ли его на двойки, получится столько же. Значит, 600 разделить на двойки — будет 300.

Если бы мы хотели особо вывести прием деления по содержанию, то могли бы рассуждать так: 6 разделить на двойки, выйдет 3 двойки; а 6 сотен разделить на двойки, выйдет двоек не 3, а в 100 раз больше. Но в этом случае деление по содержанию должно быть рассмотрено после умножения на 100.

7) 800:400. Здесь удобнее сделать вывод применительно к делению по содержанию: 4 единицы содержатся в 8 единицах 2 раза; 4 сотни содержатся в 8 сотнях также 2 раза (если 8 копеечных монет разложить в кучки, по 4 монеты в каждой, то выйдет 2 кучки; если 8 серебряных рублей разложить в кучки, по 4 рубля в каждой, то кучек выйдет тоже 2).

Но мы знаем: сколько раз 400 содержится в каком-либо числе, столько же единиц получим в каждой части, если разделим это число на 400 равных частей.

При делении на 100, например, при делении 700:100, говорим: 1 сотня содержится в 7 сотнях 7 раз. Поэтому, если 700 разделить на 100 равных частей, то в каждой части будет по 7.

Рассмотрим здесь же деление сотен на 10, например, деление 600:10. Рассуждаем: 600 — это 6 сотен; в одной сотне 10 десятков, а в 6 сотнях — в 6 раз больше, т. е. 60. Итак, 10 содержится в 60 6 раз. А если 10 содержится в 60 6 раз, то, разделивши 600 на 10 равных частей, получим в каждой части по 60.

Если бы мы хотели особо вывести прием деления на равные части, то могли бы рассуждать так: если мы разделим какое-нибудь число на 4 равные части, а потом каждую четверть разделим на 100 равных частей (или в обратном порядке), то все число разделится на 400 равных частей. Поэтому, чтобы разделить 800 на 400 равных частей, мы разделим 800 на 4 равные части, а потом 200 разделим на 100 равных частей (или в обратном порядке). Как видим, такому выводу должно предшествовать деление на 100 равных частей.

Деление на 100 равных частей можно объяснить детям так. Если 100 единиц, или одну сотню, разделить на 100 равных частей, то на каждую часть придется по одной единице; а если, например, 7 сотен разделить на 100 равных частей, то на каждую часть придется по 7 единиц. Вообще, сколько было сотен, столько станет единиц.

Подобным же образом может быть объяснено деление сотен на 10 равных частей. Сотня — это 10 десятков. Если одну сотню, или 10 десятков, разделить на 10 равных частей, то в каждой части получится по 1 десятку; а если, например, 9 сотен разделить на 10 равных частей, то в каждой части получится по 9 десятков. Сколько было сотен, столько будет десятков.

8) 3×100 . Если одну единицу повторить 100 раз, то получится 100 единиц, или одна сотня; 3 единицы повторить 100 раз,

получится 3 сотни, или 300. Вообще, сколько было единиц, столько станет сотен.

Подобным же образом может быть выведено умножение круглых десятков на 10, например, умножение 40×10 . Если один десяток повторить 10 раз, то получится 10 десятков, или сотня; если 4 десятка повторить 10 раз, то получится 4 сотни. Сколько было десятков, столько будет сотен.

9) 2×300 . Нам надо взять 300 двоек. Если соединить эти 300 двоек в группы, по 3 двойки в каждой, то таких групп выйдет 100. Чтобы вычислить величину каждой группы, надо 2 умножить на 3 — будет 6. А чтобы узнать, много ли составят все группы, надо 6 умножить на 100.

10) 20×40 . Прием умножения ученикам уже известен: чтобы умножить какое-нибудь число на 40, надо умножить его на 4; а то, что получится, умножить на 10; 20 умножить на 4 — будет 80; 80 умножить на 10 — будет 800.

11) $600:20$. Рассуждаем: 600 — это 60 десятков; 60 разделить на 20 — будет 3 (такое деление уже имело место раньше); 60 десятков разделить на 20 — будет 3 десятка, или 30. Или так: чтобы разделить какое-нибудь число на 20, можно разделить его на 2; а то, что получится, разделить на 10 (или в обратном порядке).

Мы рассмотрели такие случаи умножения и деления круглых сотен и десятков, которые сводятся к таблицам этих действий в пределах первого десятка. Приведем остальные случаи, требующие применения таблиц во всем их объеме.

12) 70×6 ; 7 умножить на 6 — будет 42; 7 десятков умножить на 6 — будет 42 десятка, или 420.

13) $240:3$; 240 — это 24 десятка; 24 разделить на 3 — будет 8; 24 десятка разделить на 3 — будет 8 десятков: $240:3=80$.

Если бы мы хотели вывести прием деления, применяясь порознь к обоим видам деления, то могли бы рассуждать так, как показано в примере 6-м. К разобранному случаю относятся и такие деления, как $400:8$. Делимое рассматривается здесь как 40 десятков.

14) 8×40 ; 8 умножить на 4 — будет 32; 32 умножить на 10 — будет 320.

Умножение 32×10 можно объяснить ученикам попрежнему: каждая единица от умножения на 10 обращается в десяток; было 32 единицы, станет 32 десятка, т. е. 320. Или так: 32 состоит из 3 десятков и 2 единиц; $30 \times 10=300$; $2 \times 10=20$; $300+20=320$.

15) $420:60$. Ведем рассуждение применительно к делению по содержанию: 420 — это 42 десятка, 60 — это 6 десятков, 6 содержится в 42 7 раз; 6 десятков в 42 десятках содержатся тоже 7 раз (см. пояснение, приведенное в примере 7-м).

Если бы мы хотели особо вывести прием деления, применяясь к делению на равные части, то могли бы рассуждать так: чтобы разделить 420 на 60 равных частей, делим 420 на 6 равных частей, имеем 70; потом делим 70 на 10 равных частей; получаем 7. Или в обратном порядке: разделим 420 на 10 равных частей, получим 42 (10 единиц, или 1 десяток, разделить на 10 равных частей, в каждой части будет по 1 единице; 42 десятка

разделить на 10 равных частей, в каждой части получится по 42 единицы); 42 разделим на 6 равных частей, имеем 7.

К разобранному случаю относятся и такие деления, как 300:60. Делимое рассматривается здесь как 30 десятков.

§ 43. Сложение и вычитание.

Приемы сложения и вычитания трехзначных чисел достаточно подготовлены изучением сложения и вычитания в пределах сотни и упражнениями в сложении и вычитании круглых сотен и круглых десятков в пределах тысячи.

До сих пор мы сообщили детям только названия действий. Здесь считаем уместным познакомить учеников с названиями чисел данных и искомых: слагаемые, сумма, уменьшаемое, вычитаемое, остаток, или разность. При последующем изучении умножения и деления мы сообщим детям термины, относящиеся и к этим действиям.

Говоря об устных вычислениях (§ 12 гл. II), мы сказали, что, по нашему мнению, является весьма желательным и возможным приучить детей производить устно все действия в пределах тысячи. Числа данные записываются в строку; в ту же строку записывается и результат, но не прежде, чем он сполна найден в уме. Действия следует начинать с высших разрядов.

Для вывода приема сложения надо взять такой пример, в котором единицы одноименных разрядов дают в сумме не более 9, т. е. сложение совершается без превращения единиц и десятков в единицы высших разрядов. Прием вычитания следует вывести на таком примере, в котором число десятков и единиц уменьшаемого превышает число десятков и единиц вычитаемого, т. е. вычитание совершается без раздробления сотни и десятка в единицы низших разрядов. Сделать это надо 1) для того, чтобы внимание детей было всецело обращено на сущность приемов: складывать сотни с сотнями, десятки с десятками и единицы с единицами; вычитать сотни из сотен, десятки из десятков и единицы из единиц; 2) потому что на указанные случаи сложения и вычитания опираются и остальные случаи, в которых сложение совершается с превращением, а вычитание с раздроблением одних единиц в другие. Потом выведенные приемы применяются и к этим последним случаям.

Переход к сложению и вычитанию трехзначных чисел делается от знакомого детям сложения и вычитания чисел двузначных.

Учитель пишет на классной доске пример на сложение двузначных чисел: $56 + 23$.

- Прочитайте. Сколько будет? Как складывали вы эти числа?
- 50 и 20 — будет 70, 6 и 3 — будет 9; всего 79.
- Да, вы разбили 56 и 23 на десятки и единицы. Из скольких десятков и скольких единиц состоит 56? 23? Что сначала складывали вы?
- Десятки с десятками.
- Что складывали потом?

— Единицы с единицами.

Затем учитель пишет на классной доске пример на сложение трехзначных чисел: $254 + 325$.

— Прочитайте. Как станете вы складывать эти числа?

Подготовленные сложением двузначных чисел, ученики дадут правильный ответ:

— Сначала сложим сотни, потом десятки, затем единицы.

— Сколько сотен, десятков и единиц в числе 254? в числе 325? Когда мы говорим, сколько сотен, десятков и единиц в каком-нибудь числе, то мы разбиваем это число на десятичные группы: на сотни, десятки и единицы. Скажите же, что прежде всего надо сделать, чтобы сложить эти числа?

— Прежде всего надо разбить их на десятичные группы: на сотни, десятки и единицы.

— Повторите, как будете складывать.

— Сначала сложим сотни с сотнями, потом десятки с десятками, затем единицы с единицами.

— Складывайте.

— 200 и 300—500; 50 и 20—70; 500 и 70—570; 4 и 5—9; 570 и 9—579.

Результат записывается после знака равенства: $254 + 325 = 579$.

Примечание. Нам кажется удобным соединять десятичные группы получаемой суммы именно в том порядке, какой мы привели: сложив сотни и затем десятки, мы тотчас же соединяем их в одно число (570) и потом уже складываем единицы. Иной порядок: $200 + 300 = 500$, $50 + 20 = 70$, $4 + 5 = 9$, $500 + 70 + 9 = 579$ — представляется менее удобным, так как, приступая к сложению единиц в первом случае, мы держим в памяти только одно число (570); во втором же случае мы держим в памяти два числа (500 и 70). Преимущество первого порядка перед вторым еще заметнее тогда, когда от сложения десятков получается сотня.

При выводе приема сложения можно познакомить учеников с названиями данных и результата.

— Прочитайте числа, которые мы сейчас сложили. Как называется то действие, которое мы делаем, когда складываем числа?

— Сложение.

— Слушайте, дети: те числа, которые складываются, — это „слагаемые числа“, или просто *слагаемые*. (Учитель записывает этот термин на классной доске.) Повторите. Сколько у нас здесь слагаемых? Какое первое слагаемое? Второе? Прочитайте то число, которое получилось от сложения. Слушайте: число, которое получается от сложения, — это *сумма*. (Записывает этот термин.) Повторите. Значит, 579 есть сумма чисел 254 и 325. Найдите сумму чисел 614 и 243. Как это обозначить? $614 + 243$. — Как станете находить сумму этих чисел?

— Мы разобьем эти числа на сотни, десятки и единицы; сложим сначала сотни потом десятки и затем единицы.

Учитель пишет на классной доске пример на вычитание двузначных чисел: $76 - 24$.

— Прочитайте. Сколько будет? Как вычитали?

— От 70 отняли 20 — осталось 50; от 6 отняли 4 — осталось 2; 50 и 2 — всего 52.

— Да, вы разбили 76 и 24 на десятки и единицы. Из скольких десятков и скольких единиц состоит 76? 24? Что сначала вычитали?

— Десятки из десятков.

— Что вычитали потом?

— Единицы из единиц

Затем учитель пишет пример на вычитание трехзначных чисел: $896 - 532$.

— Прочитайте. Как станете вычитать?

Подготовленные вычитанием двузначных чисел ученики ответят:

— Сначала вычтем сотни из сотен, потом десятки из десятков и единицы из единиц.

— Сколько сотен, десятков и единиц в числе 896? в числе 532?

— Когда мы говорим, сколько сотен, десятков и единиц в каком-нибудь числе, то что мы делаем с этим числом, как это сказать?

— Мы разбиваем его на десятичные группы: на сотни, десятки и единицы.

— Скажите же, что прежде всего надо сделать, чтобы вычесть 532 из 896?

— Прежде всего надо разбить эти числа на десятичные группы: на сотни, десятки и единицы.

— Повторите, как станете вычитать.

Сначала вычтем сотни из сотен, потом десятки из десятков и единицы из единиц.

— Вычитайте.

— От 800 отнять 500 — останется 300; от 90 отнять 30 — останется 60; 300 да 60 — будет 360; от 6 отнять 2 — останется 4; 360 да 4 — будет 364.

Результат записывается после знака равенства: $896 - 532 = 364$.

Дети соединяют десятичные группы искомого числа по мере их получения: вычтя сотни из сотен и десятки из десятков, тотчас же складывают разность сотен с разностью десятков (300 и 60 будет 360) и потом уже вычитают единицы из единиц.

Здесь можно познакомить учеников с названиями чисел данных и результата.

— Как называется то действие, которое мы делаем, когда вычитаем одно число из другого?

— Вычитание.

— Прочитайте то число, которое мы вычитали. Слушайте, дети: то число, которое вычитается, — это „вычитаемое число“, или просто *вычитаемое*. (Учитель записывает этот термин на классной доске.) Повторите. Уменьшите 15 на 3. Сколько будет? Что надо сделать, чтобы 15 уменьшить на 3? Что же делается с числом, когда мы вычитаем из него другое число?

— Оно уменьшается.

— Поэтому то число, из которого вычитают, — это „уменьшаемое число“, или просто *уменьшаемое*. (Записывает этот термин.) Повторите. Прочитайте уменьшаемое в нашем примере. ($896 - 532 = 364$.) У мальчика

было 15 копеек; из них 7 копеек он истратил. Сколько денег осталось у мальчика? Что надо сделать, чтобы узнать это? Что же мы узнали, когда из 15 вычли 7?

— Мы узнали, сколько денег осталось у мальчика.

— Да, когда мы вычитаем, мы узнаем, сколько остается; поэтому то число, которое получается от вычитания, называется *остатком*. (Записывает термин.) Повторите. Прочитайте остаток в нашем примере. (Указывает сделанный пример вычитания трехзначных чисел.) Отцу 45 лет, сыну — 12 лет. На сколько лет отец старше сына? Что надо сделать, чтобы узнать это? Что же мы узнали, когда из 45 вычли 12?

— Мы узнали, на сколько лет отец старше сына.

— Да, иначе сказать, мы узнали разницу между их годами, или разность между их годами. Поэтому то число, которое получается от вычитания, называется *разностью*. (Записывает термин.) Повторите. Как же назовете вы в нашем примере число 364?

Выведенный прием сложения применяется затем к таким случаям, когда сумма единиц или десятков или тех и других составляет ровно 10; а прием вычитания — к соответствующим случаям вычитания, когда в уменьшаемом нет единиц или десятков или и тех и других.

Наконец, рассматриваются такие случаи сложения, когда сумма единиц, десятков или тех и других превышает 10, и такие случаи вычитания, когда единиц, десятков или тех и других в уменьшаемом меньше, чем в вычитаемом. Здесь должны быть и такие примеры, когда сумма единиц одного разряда превышает 10, а сумма единиц другого разряда равна 10; когда единиц одного разряда в уменьшаемом меньше, чем в вычитаемом, а единиц другого разряда в уменьшаемом нет вовсе.

Изложим процесс сложения, относящийся к последним двум группам упражнений: 1) $372 + 236$; $300 + 200 = 500$, $70 + 30 = 100$, $500 + 100 = 600$, $2 + 6 = 8$, $600 + 8 = 608$; все это выполняется, конечно, в уме; записываются лишь данные числа и окончательный результат, когда он найден сполна: $372 + 236 = 608$. 2) $542 + 158$; $500 + 100 = 600$, $40 + 50 = 90$, $600 + 90 = 690$, $2 + 8 = 10$, $690 + 10 = 700$; ученики, умеющие быстро дополнять двузначное число до сотни, взглядевшись в данные слагаемые, могут сразу сложить 42 и 58 и затем прибавить 100 к 600. 3) $358 + 478$; $300 + 400 = 700$, $80 + 70 = 150$, $700 + 150 = 850$, $5 + 8 = 13$, $850 + 13 = 863$. 4) $325 + 279$; $300 + 200 = 500$, $20 + 70 = 90$, $500 + 90 = 590$, $5 + 9 = 14$, $590 + 14 = 604$.

Несколько подробнее надо остановиться на вычитании, когда оно совершается с раздроблением сотни или десятка.

Учитель пишет пример на вычитание двузначных чисел: $83 - 57$. Прочитайте. Как станете вычитать?

— Мы разобьем 83 на 70 и 13: от 70 отнять 50 — останется 20; от 13 отнять 7 — останется 6; 20 и 6 — будет 26.

— Что вычитали вы сначала? Что вычитали потом? Как же разбили вы вычитаемое 57?

— Мы разбили его на 5 десятков и 7 единиц.

— А как разбили вы уменьшаемое?

— Мы разбили его на 70 и 13.

— Почему не разложили вы уменьшаемое на 8 десятков и 3 единицы?

— Потому что 7 из 3 вычесть нельзя.

Затем учитель пишет пример на вычитание трехзначных чисел:
628—345.

— Прочитайте. Что сначала будете вычитать? (3 сотни.) Что будете вычитать потом? (4 десятка.) Затем? (5 единиц.) Как же разобьете вы вычитаемое 345?—На 3 сотни, 4 десятка и 5 единиц.—Сколько сотен, десятков и единиц в уменьшаемом? Посмотрите, где больше десятков: в уменьшаемом или вычитаемом? Можно ли 4 десятка отнять из 2 десятков? Что же надо сделать?—Надо одну сотню раздробить в десятки.—Сколько же сотен будет тогда в уменьшаемом?—5 сотен.—А сколько десятков?—12 десятков.—Скажите, на какие группы надо разложить уменьшаемое?

— На 5 сотен, 12 десятков и 8 единиц.—А на какие группы разбили вы вычитаемое?—На 3 сотни, 4 десятка и 5 единиц.—Теперь вычитайте.—От 500 отнять 300—останется 200; от 120 (12 десятков) отнять 40 (4 десятка)—останется 80; 200 и 80—будет 280; от 8 отнять 5—останется 3; 280 и 3—будет 283.

Результат записывается после знака равенства: $628-345=283$.

Подобным же образом выполняется вычитание и в том случае, когда в уменьшаемом нет десятков или единиц. Так, чтобы сделать вычитание $950-534$, ученики разбивают уменьшаемое на 9 сотен, 4 десятка и 10 единиц. Если бы дети затруднились сделать такое разложение, на него можно было бы навести, напомнив ученикам прием вычитания двузначного числа из круглых десятков: чтобы сделать вычитание $70-48$, разлагаем 70 на 60 и 10.

Примеры: 1) $921-248$; уменьшаемое разбивается на группы 8 сотен, 11 десятков и 11 единиц. 2) $705-268$; уменьшаемое разлагается на 600, 90 и 15. 3) $1000-427$; уменьшаемое разлагается на 900, 90 и 10.

Таким образом при устном вычитании должно сначала назвать те группы, на которые надо разбить уменьшаемое (вычитаемое всегда разлагается на десятичные группы), а потом уже вычитать.

Тем ученикам, которые затруднялись бы держать в памяти группы уменьшаемого, можно позволить, на первых порах, записывать их над уменьшаемым.

Заметим, что случаи вычитания, требующие раздробления сотни и десятка, являются наиболее трудными для устного выполнения. Если ученики умеют сразу отнимать двузначное число от сотни, то они с удобством могут воспользоваться этим в таких случаях вычитания (см. конец § 40 главы VI: повторительные упражнения под цифрой 1). Пример: $852-387$; отнимаем 300 от 800; от 500 отделяем одну сотню и сразу отнимаем от нее 87; имеем 413; придав сюда 52, получим 465.

Именованные числа проходят через весь курс арифметики, начиная с первого года обучения: попутно с решением задач дети

знакомятся с различными мерами и единичными отношениями, встречаются с составными и именованными числами; упражняются в умножении и делении, делают раздробление и превращение именованных чисел. Здесь, в пределах тысячи, мы знакомим детей со сложением и вычитанием составных именованных чисел. Для этого служат задачи и численные примеры.

§ 44. Сложение и вычитание на счетах.

Выкладки на счетах, как мы уже говорили раньше (§ 7 главы II), содействуют усвоению понятия о различных счетных единицах и десятичном составе чисел, иллюстрируют сущность приемов вычисления, состоящих в том, что действие над данными числами сводится к действиям над их десятичными группами. Поэтому мы признаем весьма полезным познакомить учеников с выкладками на счетах. Умение считать на счетах довольно важно в практическом отношении для окончивших начальную школу. Поэтому мы думаем, что следует не только показать детям, как производятся на счетах вычисления, но и развить в учениках навык возможно быстро считать на счетах, хотя бы ограничиваясь только сложением и вычитанием. Полагаем уместным познакомить детей с выполнением этих действий на счетах вслед за тем, как будут освоены приемы устного сложения и вычитания в пределах первой тысячи, и потом время от времени упражнять учеников в выкладках на счетах в течение остального курса.

Проходя письменную нумерацию в пределах тысячи, мы показали детям обозначение чисел на счетах. Но там мы имели в виду классные швейские счеты, обычно имеющиеся в школах (§ 9 гл. II). Приступая к сложению и вычитанию на счетах, надо познакомить детей с устройством русских торговых счетов. Такие счеты — ручной прибор — должны находиться у каждого ученика. Учитель ведет свои объяснения, пользуясь классными счетами такого же устройства. Если в школе имеются только швейские классные счеты, то их надо приспособить к торговым счетам.

— По сколько шариков нитки на каждой проволоке?

— По 10, а на двух проволоках — по 4.

— Эти проволоки с 4 шариками и две проволоки с 10 шариками, которые находятся между ними, мы пока считать не будем, словно бы их и не было. Где же тогда будет нижняя проволока? Покажите. Эту проволоку назовем первой. Укажите вторую проволоку, третью, четвертую. Слушайте, дети: каждый шарик первой проволоки означает простую единицу. Что означает шарик второй проволоки? третьей? четвертой? Какое число положил (обозначил) я? Почему вы говорите, что я положил 4 единицы? Пойди, положи 7, 5, 9. Какое число теперь положил я? Почему говорите вы, что это 30? Ступай, положи 20, 80, 60. А теперь какое число я положил? Почему говорите вы, что это 700? Ступай, положи 400, 500, 300.

Затем учитель обозначает на счетах числа, состоящие из единиц нескольких разрядов, двузначные и трехзначные. Дети читают и объяс-

няют, почему они так прочитали эти числа. Далее учитель диктует числа, а ученики кладут их на классных счетах.

После этого детям раздаются ручные счеты.

— Покажите средний палец на правой руке. Этим пальцем всего удобнее класть шарики (косточки). Положите одну единицу. Скиньте. Положите десяток. Скиньте. Положите, сотню, тысячу. Положите число 2, 20, 200, 3, 30, 300. 1, 2, 3 шарика можно положить сразу, не считая. Положите 6 единиц. Вы видите, что 6 шариков вы клали не сразу: насчитывали их. А это долго. Для того чтобы можно было скорее класть числа на счетах, два средних шарика сделаны черными. Поставьте палец между черными шариками. Сколько шариков налево от пальца? Положите 5 единиц. Положите 5 десятков, положите 5 сотен. Поставьте палец перед первым черным шариком (налево от черных шариков). Сколько шариков тогда положится? Положите 4 единицы. Положите 4 десятка. Положите 4 сотни. Поставьте палец после второго черного шарика (вправо от черных шариков). Сколько шариков мы тогда захватим? Положите 6 единиц. Положите 6 десятков. Положите 6 сотен. Куда же надо поставить палец, когда хотим положить 5 шариков? Когда требуется положить 4 шарика? Когда надо положить 6 шариков? (Кладет 7 шариков, оставшиеся закрывает рукой.) Сколько шариков положил я? Сколько шариков осталось направо? (Сколько шариков закрыл я рукой?) Как это узнать? Слушайте, дети: когда требуется положить 7 шариков, то мы сначала сообразим в уме, что направо должно остаться 3 шарика, и поставим палец так, чтобы направо от него было 3 шарика. Положите 70. Положите 700. Как надо поставить палец, когда требуется положить 8 шариков? Положите 8. Положите 80. Положите 800. Как надо поставить палец, когда требуется положить 9 шариков? Положите 9. Положите 90. Положите 900.

После сделанных разъяснений ученики кладут на счетах различные числа первой тысячи, которые называет им учитель.

Сложение и вычитание на счетах мы начинаем с простейших случаев, когда действие выполняется на одной проволоке. Это — сложение единиц с единицами ($3 + 5$), десятков с десятками ($20 + 60$), сотен с сотнями ($400 + 500$), когда в сумме получается не больше 9; вычитание единиц из единиц ($8 - 3$), десятков из десятков ($60 - 40$), сотен из сотен ($700 - 300$).

Затем переходим к сложению и вычитанию двузначных и трехзначных чисел в тех случаях, когда сложение совершается без превращения единиц или десятков, а вычитание — без раздробления сотни или десятка.

После этого показываем сложение и вычитание составных именованных чисел, выраженных в рублях и копейках, ограничиваясь пока упомянутыми более простыми случаями. Здесь надо объяснить детям, что на нижней, с 10 шариками, проволоке кладутся копейки, на следующей — гривенники; на той проволоке, на которой раньше откладывали единицы, кладутся рубли; на следующих проволоках — десятки рублей, сотни рублей, тысячи рублей. Каждый из четырех шариков самой нижней проволоки, находящейся под проволокой копеек, означает $\frac{1}{4}$ копейки; а каждый из четырех шариков проволоки, находящейся под проволокой рублей, означает $\frac{1}{4}$ рубля, или четвертак.

Далее рассматриваем сложение единиц, десятков и сотен, дающих в сумме единицу следующего высшего разряда ($7 + 3$, $60 + 40$, $800 + 200$); вычитание единиц из десятка, десятков из сотни, сотен из тысячи ($10 - 4$, $100 - 70$, $1000 - 500$). Эти сложения и вычитания дети могут первоначально производить так. Пусть, например, надо к 7 прибавить 3. Ученики кладут на проволоке единиц 7 шариков, потом еще 3. Отложенные 10 шариков сбрасывают и вместо них кладут один шарик на второй проволоке. Пусть требуется от 100 отнять 60. Ученики раздробляют сотню в десятки: сбрасывают шарик, положенный на третьей проволоке, и кладут 10 шариков на второй проволоке, от которых и отнимают 6 шариков. Но потом надо приучить детей поступать в таких случаях следующим образом. На проволоке единиц положено 7 шариков; к ним надо прибавить еще 3. Делаем сложение в уме: $7 + 3 = 10$. Кладем шарик на второй проволоке и сбрасываем отложенные 7 шариков с первой проволоки. На третьей проволоке положен 1 шарик — 1 сотня; отсюда надо отнять 60. Делаем вычитание в уме: $100 - 60 = 40$. Сбрасываем шарик с третьей проволоки и кладем 4 шарика на второй.

Затем даются примеры на сложение двузначных и трехзначных чисел, когда сумма десятков или единиц равна 10, и примеры на вычитание двузначных и трехзначных чисел из круглых десятков, круглых сотен и из тысячи.

Подобные же случаи сложения и вычитания проходятся потом на именованных числах, выраженных в рублях и копейках.

Наконец, мы приводим такие случаи сложения, когда сумма десятков или единиц превышает 10, и такие случаи вычитания, когда десятков или единиц в уменьшаемом меньше, чем в вычитаемом.

Предварительно надо рассмотреть относящиеся сюда случаи табличного сложения и вычитания ($8 + 7$, $60 + 50$; $12 - 5$, $140 - 80$).

— Положите 8. Сюда надо прибавить 7. Есть ли еще 7 шариков на первой проволоке? Сколь о их есть?

— Есть еще только 2 шарика.

— Прибавьте их к 8. Сколько шариков положено теперь на первой проволоке? Чем можно заменить их? Замените. Сколько прибавили мы к 8? А сколько надо было прибавить? Сколько еще осталось положить? Положите. Сколько же получилось, когда к 8 мы прибавили 7?

— Теперь я покажу вам, как можно по-другому прибавить 7 к 8. Смотрите сюда. У меня на столе (или на планке доски) лежат 8 палочек. Я хочу, чтобы здесь было на 7 палочек больше. Как это сделать?

— Положить еще 7 палочек, прибавить 7 палочек.

— Но отдельных палочек, кроме тех 8, у меня только 2; прочие же палочки связаны в пучки, по 10 штук. Кто может сделать так, чтобы на столе стало 7 палочками больше, но при этом не развязывать (не разнит) пучков?

Ученики могут догадаться (а если нет, учитель объяснит сам): положить на стол целый пучок и снять со стола 3 палочки.

— Когда, вместо 7 палочек, мы положили на стол 10 палочек, то сколько лишних палочек прибави мы? А когда сняли со стола 3 палочки, будут ли на столе лишние палочки?

— Положите теперь на счетах 8 единиц. Как же прибавите вы сюда 7 единиц, когда на первой проволоке осталось только 2 шарика?

— Положим 10 (1 шарик на второй проволоке) и скинем 3 (3 шарика с первой проволоки).

— Положите 15. Отсюда надо вычесть 7. Сколько шариков можно скинуть с первой проволоки? Скиньте. Сколько осталось отнять? Как отнимете вы 2 от десятка? Чем можно заменить шарик второй проволоки? Замените. Что теперь надо сделать?

— Скинуть 2.

— Скиньте. Сколько получилось?

Затем учитель показывает детям иной прием вычитания 7 из 15: отнять десятков и прибавить 3 единицы. На этот прием можно навести учеников подобно тому, как это сделано в соответствующем случае сложения. На столе лежит 15 палочек: 1 пучок и 5 палочек; кроме того, есть палочки, например в коробке.

— Как взять со стола 7 палочек, не развязывая (не розня) пучка? Если мы возьмем со стола пучок, то мы снимем не только те 7 палочек, которые нам надо снять, но еще лишних 3 палочки, которые должны бы остаться на столе. Эти 3 лишние снятые палочки надо вернуть назад. Мы сделаем это, если вместо них положим на стол 3 палочки со стороны (например из коробки). Для той же цели может служить задача вроде следующей. У мальчика было 15 копеек: гривенник и пять копеек. Мальчик купил бумаги на 7 копеек. Сколько денег осталось у мальчика? Как это узнать?

— Надо из 15 вычесть 7.

— Как расплатился мальчик с кассиром: какую монету он дал ему? Когда мальчик отдал в кассу гривенник, сколько денег у него осталось (в кармане)? Как это узнать?

— От 15 отнять 10.

— Столько ли денег должно остаться у мальчика?

— Нет, кассир должен дать ему 3 копейки сдачи, и у мальчика останется денег 5 копеек и еще 3 копейки, всего 8 копеек.

— Положите на счетах 15. Как отнимете вы отсюда 7? Почему скинете десятков?

— Потому что здесь (в 15) только 5 единиц.

— А зачем положите вы потом 3 единицы?

— Когда мы скинули 10, то отняли лишних 3 единицы; они должны остаться, их надо вернуть назад.

Затем идут примеры на сложение и вычитание двузначных и трехзначных чисел, сначала отвлеченных, потом именованных, выраженных в рублях и копейках.

Сложение и вычитание на счетах отличается от общих, или нормальных, приемов выполнения этих действий в тех случаях, когда сложение совершается с превращением единиц или десятков, а вычитание с раздроблением сотни или десятка; здесь при вычислениях на счетах употребляется частный прием округления: чтобы прибавить 7 к 28, придаем 10 и скидываем 3; чтобы вычесть 7 из 42, вычитаем 10 и придаем 3. Затем, при устном, а равно и письменном выполнении этих действий следует (для возможно быстрого вычисления) знать наизусть таблицы сложения и вы-

читания; выкладки на счетах требуют от памяти только вычитания из 10 (в упомянутых выше случаях сложения и вычитания); все же остальные результаты получаются на самих счетах — инструментально.

§ 45. Сложение и вычитание дробей.

При изучении действий в пределах сотни дети складывали и вычитали простейшие дроби, выраженные в одних и тех же долях единицы, т. е. дроби с одинаковыми знаменателями. Здесь мы считаем уместным продолжить ознакомление с простейшими дробями, показав детям сложение и вычитание дробей с разными знаменателями, ограничиваясь при этом такими случаями, когда одни доли могут быть выражены в других, как, например, половины и четверти, трети и шестые и т. п.

На дробных счетах или на чертеже учитель напоминает детям о сравнительной величине таких долей, как $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$, и затем показывает, как производится сложение и вычитание дробей, выраженных в этих долях

Пусть надо сделать сложение $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Положите на дробных счетах $\frac{1}{2}$. Что еще осталось на этой проволоке? — Осталось еще $\frac{1}{2}$. — А сколько нам надо прибавить? Не догадаетесь ли, на какой проволоке надо сделать сложение? — На той, где четверти, где единица разделена на 4 равные части. — Что же сначала выложите на этой проволоке? — Сначала положим $\frac{1}{2}$. — Как положить на этой проволоке $\frac{1}{2}$: ведь на ней четверти? — Надо положить $\frac{2}{4}$: это все равно, что $\frac{1}{2}$. — Положите. Что теперь надо сделать? — Прибавить $\frac{1}{4}$. — Прибавьте. Сколько же получилось? Получилось $\frac{3}{4}$. — Запишите. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\right)$. — Для того чтобы сложить $\frac{1}{2}$ с $\frac{1}{4}$, мы положили $\frac{1}{2}$ на той проволоке, где четверти: положили вместо половины $\frac{2}{4}$. Как сказать; что сделали мы с $\frac{1}{2}$? — Мы раздробили $\frac{1}{2}$ в четверти. — Сложите $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$. Как станете складывать? — Мы раздробим $\frac{1}{4}$ в восьмые: будет $\frac{2}{8}$; к $\frac{2}{8}$ прибавить $\frac{1}{8}$ — получится $\frac{3}{8}$. (За-

пись: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.) — Сложите $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$. Как станете складывать? — Мы раздробим $\frac{1}{2}$ в восьмые: будет $\frac{4}{8}$; к $\frac{4}{8}$ прибавить $\frac{1}{8}$ — получится $\frac{5}{8}$. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}\right)$

Подобным же образом делается и вычитание этих долей.

Затем, уже без наглядных пособий, выполняет я сложение и вычитание дробей, состоящих не из одной, а из нескольких долей единицы.

Пример: $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$. Дети раздробляют $\frac{3}{4}$ в восьмые, рассуждая так: в одной четверти две восьмых, а в трех четвертях втрое больше — шесть восьмых. Потом из $\frac{6}{8}$ вычитают $\frac{5}{8}$. Запись: $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$.

Когда ученики поняли, что в рассматриваемых случаях сложения и вычитания надо одни доли раздроблять в другие, тогда они будут иметь дело со знакомым уже сложением и вычитанием дробей, выраженных в одинаковых долях единицы.

Далее решаются задачи и примеры, в которых имеют место половины, четверти и восьмые; половины, третьи и шестые; половины, пятые и десятые доли.

§ 46. Умножение и деление.

Случаи умножения и деления, какие могут иметь место за пределом сотни и в пределах тысячи, кроме рассмотренных уже действий над круглыми десятками и сотнями, мы располагаем в следующем порядке.

1. Умножение двузначного числа на однозначное, когда произведение более ста, например 67×8 . Прием такого умножения уже известен, выполнение действия подготовлено умножением круглых десятков и сложением в пределах тысячи: 60 умножить на 8 — будет 480; $7 \times 8 = 56$; $480 + 56 = 536$. Желательно, чтобы все промежуточные вычисления дети производили в уме, записывая окончательный результат тогда, когда он вполне найден: $67 \times 8 = 536$.

2. Умножение трехзначного числа на однозначное. К приему такого умножения ученики легко переходят от знакомого им приема умножения двузначного числа на однозначное. Выполнение действия подготовлено умножением на однозначное число круглых сотен и десятков.

Учитель пишет на класной доске пример: 43×2 .

— Прочтите. Сколько получится? Как умножили?

— 40 умножить на 2 — будет 80; 3 умножить на 2 — получится 6; 80 и 6 — будет 86.

— Из скольких десятков и единиц состоит число 43? Что умножали вы сначала? Что умножали потом?

Затем дается пример 234×2 .

— Прочитайте. Из чего состоит число 234? Когда мы говорим, из скольких сотен, десятков и единиц состоит число, что делаем мы с этим числом?

— Мы разбиваем это число на десятичные группы: на сотни, десятки и единицы.

— Вот вы разбили 234 на десятичные группы. Как же станете умножать его на 2?

— Сначала умножим сотни, потом десятки и единицы: 200 умножить на 2 — будет 400; 30 умножить на 2 — получится 60; 400 и 60 — будет 460; 4 умножить на 2 — получится 8; 460 и 8 — будет 468.

Найденное число 468 записывается после знака равенства: $234 \times 2 = 468$.

Для первого примера мы взяли такой случай умножения, когда действие совершается без превращения десятков в единицы. Потом выведенный прием применяется к таким случаям, в которых произведение десятков или единиц более 9. Примеры. 1) 129×3 ; $100 \times 3 = 300$, $20 \times 3 = 60$, $300 + 60 = 360$, $9 \times 3 = 27$, $360 + 27 = 387$. 2) 226×4 ; $200 \times 4 = 800$, $20 \times 4 = 80$, $800 + 80 = 880$, $6 \times 4 = 24$, $880 + 24 = 904$. Желательно, чтобы все вычисления производились в уме и записывался бы только окончательный результат.

Здесь можно сообщить детям названия чисел данных и искомого: то число, которое мы множим, — это „множимое число“, или просто *множимое*; то число, на которое множим, — *множитель*; число, которое получается от умножения, — *произведение*. Нелишне остановиться несколько на разъяснении значения множителя: множитель показывает, сколько раз множимое берется слагаемым. Для этой цели могут служить упражнения, состоящие в переходе от сложения к умножению, и обратно. Учитель напишет, например, $24 + 24 + 24 + 24 + 24$; ученики прочитают сначала так: к 24 прибавить 24, еще прибавить 24 и т. д.; потом: 24 повторить 5 раз, 24 умножить на 5.

— Где же здесь множитель? Как найти его? — Надо сосчитать, сколько слагаемых. — Запишите эту строчку короче. Напишите, сколько получится. А как назовете вы каждое из слагаемых? — Множимым. — Как назовете их сумму? — Произведением.

Учитель пишет, например, 54×7 .

— Прочитайте. Сколько получится? Запишите. Как назовете вы число 54? 7? 378? Как написать это без знака умножения? Сколько раз надо написать число 54? Почему надо написать его 7 раз? А если бы множитель был 9, 13, тогда сколько раз написали бы вы число 54? Как назовете вы теперь это число? — Слагаемым. — Как назовете теперь произведение 378? — Суммой.

Упражнениям в умножении трехзначного числа на однозначное предшествует случай, когда множимое оканчивается нулем, как, например, 360×2 . Умножение может быть выполнено здесь или по общему правилу: $300 \times 2 = 600$, $60 \times 2 = 120$, $600 + 120 = 720$; или же может быть сведено к умножению двузначного числа, если рассматривать 360 как 36 десятков: $36 \times 2 = 72$, 36 десятков $\times 2 = 72$ десятка, или 720.

3. Умножение однозначного числа на двузначное, когда произведение более ста, например 7×52 . Прием такого умножения ученикам уже известен, выполнение действия подготовлено ум-

ножением на круглые десятки: $7 \times 50 = 350$, $7 \times 2 = 14$, $350 + 14 = 364$.

4. Умножение однозначного числа на трехзначное. Прием такого умножения достаточно подготовлен умножением на двузначное число: для того чтобы умножить какое-нибудь число, например число 4, на 23 (для того чтобы повторить 23 раза число 4, чтобы набрать 23 четверки), мы умножаем его на 20 (повторяем 20 раз, берем 20 четверок), потом на 3 (повторяем 3 раза, берем 3 четверки); чтобы умножить какое-нибудь число, например, 3 на 327, умножаем его на 300 (берем 300 троек), потом на 20 (берем 20 троек) и затем на 7 (7 троек). А выполнение действия подготовлено умножением на круглые сотни и круглые десятки.

Упражнениям в умножении однозначного числа на трехзначное предшествует случай, когда множитель оканчивается нулем, как, например, 3×280 . Умножение может быть выполнено здесь или по общему правилу: $3 \times 200 = 600$, $3 \times 80 = 240$, $600 + 240 = 840$, или же может быть сведено к умножению на двузначное число, если 280 рассматривать как 28 десятков.

5. Деление трехзначного числа на однозначное. К приему такого деления ученики легко переходят от знакомого им приема деления двузначного числа на однозначное. Выполнение действия подготовлено делением на однозначное число круглых сотен и десятков.

Учитель пишет на классной доске пример: $86:2$.

— Прочитайте. Сколько получится? Как делили?

— 80 разделить на 2 — будет 40; 6 разделить на 2 — получится 3; 40 и 3 — будет 43.

— Из скольких десятков и единиц состоит число 86? Что делили вы сначала? Что делили потом?

Затем дается пример: $468:2$.

— Прочитайте. Из чего состоит число 468? Что делаем мы с числом, когда говорим, сколько в нем сотен, десятков и единиц? Вот вы разбили 468 на десятичные группы. Как ста ете делить его на 2?

— Сначала разделим сотни, потом десятки и единицы: 400 разделить на 2 — будет 200; 60 разделить на 2 — получится 30; 200 и 30 будет 230; 8 разделить на 2 — получится 4; 230 и 4 — будет 234.

Найденное число 234 записывается после знака равенства: $468:2 = 234$.

Здесь можно сообщить детям названия чисел данных и искомого: то число, которое мы делим, — это „делимое число“, или просто *делимое*; то число, на которое мы делим, — *делитель*.

— Что мы узнаем, когда разделим 468 на 2? — Мы узнаем половину числа 468. — А если бы разделили 468 на 3, что тогда нашли бы? — Тогда нашли бы третью часть числа 468. — Число, которое получается от деления, есть часть делимого (половина, третья часть и т. д.); поэтому оно называется *частным*. — Что еще узнаем мы, когда разделим 468 на 2? — Еще узнаем мы, сколько раз 2 содержится в числе 468. — Что же еще показывает частное? — Оно показывает еще, сколько раз делитель содержится в делимом. Затем дается пример вроде $968:3$, для того чтобы напомнить ученикам о том, что при делении иногда получается остаток.

Мы рассмотрели деление трехзначного числа на однозначное, когда делимое приходится разбивать на десятичные группы, без раздробления сотен и десятков. Подольше следует остановиться на делении, требующем раздробления сотен и десятков. К нему также надо подойти от соответствующего случая деления двузначного числа на однозначное.

— 87 разделите на 3. Сколько получится? Как дели и?

— Мы разложили 87 на две группы: 60 и 27; 60 разделить на 3 — будет 20; 27 разделить на 3 — получится 9; 20 и 9 — будет 29.

— Почему разбили вы 87 на 60 и 27, а не на 80 и 7?

— Потому что 8 десятков не делятся на 3: из них — самое большее — на 3 делятся 6 десятков; остается 2 десятка; их надо раздробить в единицы; всего будет 27 единиц.

Учитель пишет на классной доске: $741:3$.

— Прочитайте. Как разобьете вы число 741 для того, чтобы разделить его на 3? Какая будет первая группа? (6 сотен, 600.) Почему? Что же сделаете вы с седьмой сотней? Сколько будет тогда всех десятков? Из 14 десятков — самое большее — сколько десятков разделится на 3? Какая же будет вторая группа? (12 десятков, 120.) А третья? (21.) Как составила третья группа? Повторите, на какие группы разбили вы делимое. Теперь делите. — 600 разделить на 3 — получится 200; 120 разделить на 3 — будет 40; 200 и 40 будет 240; 21 разделить на 3 — получится 7; 240 и 7 — будет 247.

Найденное частное записывается после знака равенства; $741:3 = 247$.

Еще пример: $376:8$.

— Как разобьете вы число 376 для того, чтобы разделить его на 8? Получится ли в частном хоть одна сотня? Почему нет? — Потому что в делимом только 3 сотни. — Да, для того чтобы в каждой части получилась хоть одна сотня, надо, чтобы в делимом их было, по крайней мере, 8. Что же сделаете вы с 3 сотнями? Сколько будет всех десятков в делимом? Из 37 десятков — самое большее — сколько десятков делится на 8? Какая же будет первая группа? (32 десятка, 320.) А вторая? (56.)

На первых порах можно надписывать над делимым те группы, на которые оно разбивается. То же самое можно и впоследствии позволить тем ученикам, для которых оказалось бы трудным держать эти группы в памяти.

Общему случаю деления трехзначного числа на однозначное предшествует случай, когда делимое оканчивается нулем, переходящим в частное, как, например, $720:3$. Такое деление выполняется по общему правилу: $600:3 = 200$, $120:3 = 40$, $200 + 40 = 240$; или же сводится к делению двузначного числа на однозначное, если рассматривать делимое 720 как 72 десятка.

6. Деление трехзначного числа на трехзначное и деление трехзначного числа на двузначное при однозначном частном. К приему такого деления ученики переходят от известного им приема деления двузначного числа на двузначное. А выполнение действия подготовлено делением сотен на сотни и десятков на десятки, а затем умножением трехзначного и двузначного числа на однозначное.

При делении двузначного числа на двузначное, например при делении $87:29$, ученики, задаваясь десятками делителя и

десятках делимого, прикидывали, приблизительно, сколько раз делитель содержится в делимом, и потом делали поверку: 2 десятка в 8 десятках содержатся 4 раза; посмотрим, не будет ли и 29 содержаться в 87 также 4 раза. Умножаем 29 на 4; получаем 116. Значит, 29 в 87 не содержится 4 раза; посмотрим, не содержится ли 3 раза; $29 \times 3 = 87$; следовательно, $87:29 = 3$.

При делении трехзначного числа на трехзначное ученики, подобно тому, как они делали это в предыдущем случае, станут угадывать частное делением сотен делимого на сотни делителя; $952:238 = 2$ сотни содержатся в 9 сотнях 4 раза; посмотрим, не будет ли и наш делитель содержаться в делимом также 4 раза; для этого умножим 238 на 4 и полученное произведение сравним с делимым.

Мы советовали бы несколько видоизменить прием такого деления: приучить детей задаваться не одной, но двумя цифрами делителя. Так, чтобы разделить 952 на 238, пусть ученики сообщают: в делителе 23 десятка, в делимом 95 десятков; узнаем, сколько раз 23 содержится в 95 2 в 9 содержится 4 раза; посмотрим, содержится ли 23 в 95 тоже 4 раза; $23 \times 4 = 92$; 23 десятка содержатся в 95 десятках 4 раза; теперь посмотрим, будет ли 238 в 952 содержаться 4 раза; 23 десятка мы уже умножили на 4; получилось 92 десятка, или 920; умножим теперь 8 на 4 — будет 32; 920 и 32 — будет 952.

Как видим из приведенного примера, дело сводится опять к тому, что мы задаемся старшей цифрой делителя (2) в старшей цифре делимого (9); различие состоит лишь в том, что мы делаем сначала предварительную поверку испытываемой цифры (4), умножая на нее лишь две старшие цифры делителя (23). Такая предварительная поверка имеет практическое значение при делении многозначных чисел, почему мы и считаем полезным приучить к ней детей возможно ранее: эта поверка часто укажет нам непригодность испытываемой цифры, избавляя от необходимости умножать на нее (письменно) весь делитель. Она сохраняет это значение и в пределе тысячи, несмотря на устное выполнение действий: пусть, например, надо разделить 936 на 246; задаваясь только одной старшей цифрой делителя, ученики станут проверять найденную цифру 4, умножая на нее весь делитель: 200 на 4—800; 40 на 4—160; 800 да 160—960; 6 на 4—24; 960 да 24—984; быть может, некоторые ученики и не станут умножать единиц делителя, заметивши, что уже произведение его сотен и десятков на 4 превышает делимое; но в большинстве случаев ученики доведут умножение до конца; причина этого заключается в том, что детям трудно в одно и то же время делать два дела: и умножать делитель на испытываемую цифру, и сравнивать с делимым получаемое произведение. Между тем, привыкнув задаваться двумя старшими цифрами делителя, ученики прежде всего умножат на 4 его сотни и десятки ($24 \times 4 = 96$) и, сравнив полученное произведение с соответственной частью делимого (93), увидят, что испытываемая цифра сильна.

Кроме того, если дети знают наизусть заключающиеся в пределе сотни произведения чисел второго десятка, то они, за-

даваясь двумя цифрами, весьма скоро найдут частное в тех случаях, когда две старшие цифры делителя изображают число второго десятка, как, например, при делении 865 на 173. А это — такие случаи, в которых число, находимое делением сотен делимого на сотни делителя, бывает обыкновенно далеко от искомого частного (см. главу VI настоящего руководства, конец § 40: повторительные упражнения под цифрой IV).

Подобно делению трехзначного числа на трехзначное выполняется и деление трехзначного числа на двузначное при однозначном частном, как, например, деление $256:32$. Ученики задаются десятками делителя во всех десятках делимого: 3 десятка в 25 десятках содержатся 8 раз; делается испытание.

Кроме приведенных случаев умножения и деления, в пределах тысячи еще имеет место умножение двузначного числа на двузначное и соответствующее ему деление трехзначного числа на двузначное при двузначном частном. Эти случаи умножения и деления, как более трудные, — по крайней мере, для устного выполнения, — мы рассматриваем последними.

7. Умножение двузначного числа на двузначное. Общий случай такого умножения следует подготовить умножением двузначного числа на круглые десятки. Ученики уже умножали однозначное число на круглые десятки; здесь надо только применить прием такого умножения к двузначному множимому: чтобы умножить 24 на 30, умножаем 24 на 3 и потом 72 на 10 (с умножением двузначного числа на 10 ученики уже имели дело, когда умножали однозначное число на круглые десятки — см. § 42 настоящей главы.). Ученики уже умножали однозначное число на двузначное, и прием умножения на такой множитель им известен: чтобы умножить на 36, умножаем сначала на 30, потом на 6. Здесь этот прием применяется к двузначному множимому: чтобы умножить 24 на 36, умножаем 24 сначала на 30 ($24 \times 3 = 72$; $72 \times 10 = 720$), потом на 6 ($24 \times 6 = 144$), полученные произведения складываем.

Примечание. Как мы сказали выше, такой случай умножения является сравнительно трудным для устного выполнения. Происходит это оттого, что здесь много промежуточных вычислений, а потому и трудно держать их в памяти. Выполнение действия значительно облегчается, если записать найденные в уме результаты умножения 24 на 30 и 24 на 6, т. е. прибегнуть к записи: $24 \times 36 = 720 + 144 = 864$. На первых порах и можно предоставить детям делать такие записи, а впоследствии ученики могут обойтись и без них.

Упражнениям в умножении двузначного числа на двузначное предшествуют подготовительные упражнения, состоящие в умножении двузначного числа на круглые десятки и умножение круглых десятков на двузначное число, как, например, 20×48 . Такое умножение или выполняется по общему правилу ($20 \times 40 = 800$, $20 \times 8 = 160$, $800 + 160 = 960$) или же сводится к умножению однозначного числа на двузначное ($2 \times 48 = 96$; 2 десятка $\times 48 = 96$ десяткам $= 960$).

8. Деление трехзначного числа на двузначное при двузначном частном¹. Оно приводится к двукратному делению двузначного числа на двузначное или к делению двузначного на двузначное и трехзначного на двузначное при однозначном частном. Изложим процесс такого деления. Пусть надо разделить 782 на 23. В частном ни одной сотни не получится; раздробляем 7 сотен в десятки, всех десятков будет в делимом 78; 78 десятков разделить на 23 — получится 3 десятка, и 9 десятков останутся неразделенными; раздробляем их в единицы, всех единиц будет в делимом 92; 92 разделить на 23 — получится 4; 3 десятка и 4 единицы — будет 34. Считаем полезным требовать от учеников, чтобы они называли и на первых порах записывали над делимым те группы, на которое делимое разложено, в данном случае группы 69 десятков и 92 единицы. Еще пример. 952 разделить на 17. На 17 делятся 85 десятков, которые и составят первую группу; вторая группа будет 102; 85 десятков разделить на 17 — получится 5 десятков; 102 разделить на 17 — будет 6; 50 и 6 — будет 56.

ГЛАВА VIII.

ЧИСЛА ЛЮБОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

§ 47. Нумерация.

Нумерация до тысячи, или нумерация чисел первого класса, лежит в основе нумерации чисел любой величины: числа второго и третьего классов носят те же названия, что и числа первого класса, лишь с присоединением слов „тысяча“, „миллион“: триста сорок четыре, триста сорок четыре тысячи, триста сорок четыре миллиона; числа второго и третьего классов пишутся так же, как и числа первого класса, только обозначения эти сопровождаются одной или двумя тройками нулей: 704, 704 000, 704 000 000. Зная хорошо нумерацию до тысячи, ученики легко усвоят и нумерацию чисел любой величины.

При обучении устной нумерации в пределах сотни и тысячи мы употребляли как наглядные пособия палочки, пучки по десяти и связки по сотне палочек или кубики, бруски и доски арифметического ящика. Эти пособия дают наглядное представление о сравнительной величине счетных единиц: простой единицы, десятка и сотни. Пользоваться с той же целью палочками за пределом тысячи крайне неудобно и притом бесполезно: едва ли можно вызвать сколько-нибудь отчетливое представление о величине, например, десятка тысяч сравнительно с простой единицей. Но дети уже имеют представление о сравнительной величине каких бы то ни было трех соседних единиц: если вообразить себе миллион в виде кубика, то десятков миллионов явится в форме бруска, сотня миллионов — в виде доски.

¹ Этот случай деления, как наиболее трудный, целесообразно отнести к следующему концентру, т. е. к концентру чисел любой величины. Ред.

За пределом тысячи наглядным пособием при изучении нумерации могут служить счеты, которыми мы пользовались и раньше при ознакомлении с письменной нумерацией¹.

Спросив у детей, какие счетные единицы они знают (простую единицу, десяток и сотню) и на каких проволоках счетов кладутся эти единицы, учитель вызывает нескольких учеников по очереди к классным счетам и заставляет их провести счет единицами, десятками и сотнями. Это упражнение имеет целью напомнить детям, относительно уже знакомых им единиц, что каждые десять единиц составляют одну новую единицу, и этим подготовить учеников к тому же выводу для единиц последующих.

Кладя по шарiku на нижней проволоке, ученик считает: одна единица, две, три, ... десять единиц.

— Чем можно заменить 10 шариков первой проволоки? Замени. Что же означает шарик второй проволоки? Счи-ай десятками.

Кладя по шарiku на второй проволоке, ученик считает: один десяток, или десять; два десятка, или двадцать, ... десять десятков.

— Чем можно заменить 10 шариков второй проволоки? Замени. Что же означает шарик третьей проволоки? Считай сотнями.

Кладя по шарiku на третьей проволоке, ученик считает: одна сотня, или сто; две сотни, или двести, ... десять сотен.

— Чем можно заменить 10 шариков третьей проволоки? Замени. Что же означает шарик четвертой проволоки? Тысяча есть тоже счетная единица: тысячами считают так же, как и простыми единицами. Считай тысячами.

Кладя по шарiku на четвертой проволоке, ученик считает: одна тысяча, две тысячи, ... десять тысяч.

За е-а идет нумерация четырехзначных чисел.

Учитель кладет на счетах, например, число 576.

— Прочитайте число, которое я положил еще. Напишите его. (Кладет еще 2 тысячи.) Сколько я положил еще? Прочитайте теперь все положенное число. — Две тысячи пятьсот семьдесят шесть. — На какой проволоке кладутся тысячи? На каком месте надо писать тысячи? Напишите цифру тысяч. Прочитайте написанное число.

— Прочитайте число, которое я положил на счетах. (4385.) Сколько тысяч в этом числе? Напишите цифру 4. После цифры 4 оставьте небольшой промежуток и потом напишите 385².

Потом ученики кладут на счетах и пишут различные четырехзначные числа: 6384, 7603, 1570, 3800, 2067, 5020, 7009, 8000, 1000. Здесь надо особенно остановиться на тех случаях, когда в числе нет сотен или сотен и десятков, спрашивая учеников, на которых проволоках не положено шариков и что надо писать на соответствующих местах.

Далее вводятся десятки тысяч. Вызванный к классным счетам ученик повторяет счет тысячами: одна тысяча, две тысячи, ... десять тысяч.

¹ Для лучшего уяснения того, что числа любой величины читаются и пишутся по классам, содержащим каждый по три счетных единицы, полезно приспособить классные шведские счеты к изучению нумерации, вынув по одной проволоке через каждые три проволоки для того, чтобы оставить заметные промежутки между классами.

² Значение этого промежутка будет объяснено детям несколько позже, когда пойдет речь о разделении счетных единиц на классы.

— Чем можно заменить 10 шариков четвертой проволоки? Замени. Что же означает шарик пятой проволоки? 10 тысяч, или десяток тысяч, есть также счетная единица: их считают как десятки.

Выясняется привычному счет десятками тысяч: один десяток тысяч, или десять тысяч, два десятка тысяч, или двадцать тысяч, ... десять десятков тысяч.

Десятки тысяч можно ввести так же, как это сделано нами для тысяч: учитель обозначает на счетах, например, число 6587 уч.: ики читают его и пишут; затем учитель кладет на счетах еще 3 десятка тысяч; ученики читают все положенное число, а потом пишут его. Следуют примеры. Особенное внимание должно быть обращено на те случаи, когда второй класс оканчивается, а первый начинается нулями.

Подобно тысячам и десяткам тысяч вводятся и сотни тысяч. Вызванный к классным счетам ученик повторяет счет десятками тысяч: один десяток тысяч, или десять тысяч; два десятка тысяч, или двадцать тысяч, ... десять десятков тысяч.

— Чем можно заменить 10 шариков пятой проволоки? Замени. Как называется 10 десятков? Как называть 10 десятков тысяч? Что же означает шарик шестой проволоки? 100 000, или сотня тысяч, есть также счетная единица: их считают как сотни.

Ученик производит счет сотнями тысяч: одна сотня тысяч, или сто тысяч; две сотни тысяч, или двести тысяч, ... десять сотен тысяч.

Затем учитель обозначает на счетах, например, число 75 287; ученики читают и пишут. Учитель кладет на счетах еще 6 сотен тысяч. Ученики читают все положенное число, а потом пишут его. Следуют примеры. Здесь, как и раньше, надо обратить особое внимание на те случаи, когда второй класс оканчивается, а первый начинается нулями.

Наконец, учитель знакомит детей с единицами третьего класса: миллионами, десятками миллионов и сотнями миллионов.

Вызванный к классным счетам ученик, откладывая по шарiku на шестой проволоке, повторяет счет сотнями тысяч: одна сотня тысяч, или сто тысяч; две сотни тысяч, или двести тысяч, ... десять сотен тысяч.

— Чем можно заменить 10 шариков шестой проволоки? Замени. Как называется 10 сотен? Как назовете вы 10 сотен тысяч? — Тысяча тысяч. — Тысяча тысяч называется миллионом. Что же означает шарик седьмой проволоки? Миллион есть также счетная единица: миллионы считают как простые единицы.

Идет обозначение на счетах, чтение и письмо чисел, содержащих миллионы.

Точно так же вводятся десятки и сотни миллионов.

Познакомив учеников со всеми счетными единицами, кончая сотней миллионов, показав, как читаются и пишутся числа в этих пределах, произведем общий обзор нумерации, укажем группировку счетных единиц по классам и уясним детям, что нумерация чисел любой величины сводится к нумерации чисел до тысячи.

— Назовите все счетные единицы, которые вы теперь знаете. Укажите, на которой проволоке кладутся простые единицы, десятки, сотни, тысячи...

— Вот этими промежутками счеты разделены на классы. По сколько проволок в каждом классе? Какие счетные единицы попадут в первый класс? во второй? в третий? Вот видите: в каждом классе есть свои единицы, свои десятки и свои сотни. В первом классе единицами будут простые единицы. А во втором? в третьем?

Обозначение чисел на горизонтальных проволоках счетов не вполне соответствует письменному их обозначению: на счетах единицы высших разрядов находятся над единицами разрядов низших, а при письме — влево от них. Для полного соответствия станем теперь обозначать числа на вертикальных проволоках, вставляемых в верхний брусок рамы классных счетов, отделяя попрежнему промежутками каждые три проволоки¹.

— Будем теперь обозначать числа на отвесных (стоячих) проволоках. Считать проволоки будем справа налево. Укажите проволоки первого класса, второго класса, третьего класса.

— Будем называть правую проволоку каждого класса первой проволокой в этом классе. На которой же проволоке в каждом классе кладутся единицы каждого класса? — На первой. — А десятки? Сотни?

Затем учитель кладет на счетах число первого класса, например 357.

— Прочитайте положенное число. В каком классе оно положено?

После этого учитель кладет число одного второго класса, например 357 тысяч.

— В каком классе положено это число? Прочитаем его. Что означают 3 шарика шестой проволоки? — 3 сотни тысяч, или 300 тысяч. — Что означают 5 шариков пятой проволоки? — 5 десятков тысяч, или 50 тысяч. — Что означают 7 шариков четвертой проволоки? — 7 тысяч. — В этом числе 300 тысяч, да 50 тысяч, да 7 тысяч. Сколько тут всех тысяч? — 357 тысяч. — Вот видите: если число положено во втором классе, то его надо читать так, как будто бы оно было в первом классе. (Закрывает три правые проволоки.) Читайте. — Триста пятьдесят семь. — И потом прибавить слово „тысяч“.

— Ступай, напиши это число цифрами. Ученик пишет 357 000.

— В каком классе находится число 357? Чем обозначен первый класс? Как при письме указать, что цифры 357 означают число второго класса, а три нуля стоят в первом классе?

— Надо между классами оставить небольшой промежуток.

Далее учитель кладет на счетах число одного третьего класса, например, 357 миллионов.

— В каком классе положено это число? Прочитаем его. Что означают 3 шарика девятой проволоки? — 3 сотни миллионов, или 300 миллионов. — Что означают 5 шариков восьмой проволоки? — 5 десятков миллионов, или 50 миллионов. — Что означают 7 шариков седьмой проволоки? — 7 миллионов. — Сколько всех миллионов в этом числе? — 357 миллионов. — Вот видите: если число положено в третьем классе, то его надо читать, как будто оно было в первом классе. (Закрывает 6 правых про-

¹ В предшествующих упражнениях по изучению нумерации мы предполагали обозначение чисел на горизонтальных проволоках, что гораздо удобнее: легче передвигать шарики по проволокам, нежели надевать шарики на проволоки и снимать их с проволок. Существует, впрочем, прибор, на котором весьма удобно изображать числа вертикальными рядами шаров, перекидываемых с одной части прибора на другую. Прибор этот описан нами в § 9 главы II. Однако, такой прибор едва ли имеется в наших школах

волок). Читайте. — Триста пятьдесят семь. — И прибавить слово „миллионов“.

— Ступай, напиши это число цифрами. Ученик пишет: 357 000 000.

— В каком классе находится число 357? Чем обозначен первый класс? Второй класс?

Следуют примеры.

— Положите на счетах, прочитайте и напишите цифрами: 3 единицы второго класса; 6 единиц третьего класса; 12 единиц второго класса; 48 единиц третьего класса; 457 единиц второго класса; 782 единицы третьего класса и т. д.

В этих примерах двузначные и трехзначные числа, относящиеся ко второму или третьему классу, должны быть разнообразны в смысле личности разрядов: двузначное число должно состоять из десятков и единиц (65) или только из десятков (30); трехзначное — из сотен, десятков и единиц (873) или из сотен и десятков (240), сотен и единиц (704), из одних сотен (800).

Для перехода к нумерации чисел, состоящих из трех классов, считаем полезным поупражнять учеников в письме чисел первого класса тремя цифрами.

Учитель пишет, например, число 287.

— Прочитайте. Сколькими цифрами, или знаками, написано это число? Как поэтому можно назвать его? — Его можно назвать трехзначным числом. Учитель пишет, например, число 95. — Сколькими цифрами написано это число? Как назовете его. — Двузначным числом. — Скажите такие числа, которые пишутся одной цифрой. Как они называются? — Они называются однозначными. Учитель пишет, например, число 57. — Читайте. Теперь я слева напишу ноль (057). На каком месте поставил я ноль? Что пишется на третьем месте? Что же означает этот ноль? — Он означает, что сотен нет. — А были ли сотни раньше? Изменилось ли число от того, что мы слева написали ноль? Прочитайте написанное число. Число 57 двузначное, а число 057 какое? Вы видите, что вместо двузначного числа можно написать трехзначное. 4 — число однозначное; нельзя ли написать число четыре тремя цифрами? Как это сделать? Напишите. (004.) Число 80 напишите тремя цифрами.

Упражнения: ученики пишут тремя цифрами числа: 86, 15, 11, 40, 10, 8, 5, 1.

После этого можно перейти к нумерации чисел, состоящих из трех классов.

— Какие счетные единицы находятся в первом классе? во втором? в третьем? Когда мы обозначаем числа на счетах, сколько проволок будет в каждом классе? Когда мы пишем числа, скольким цифрам должны быть места в каждом классе?

Затем учитель пишет число 753 948 216.

— Укажите: какие цифры написаны в первом классе? во втором? в третьем? Прочитайте третий класс. — Семьсот пятьдесят три. — Чего это семьсот пятьдесят три? — 753 миллиона. — Читайте следующий класс. — 948 тысяч. — Читайте младший класс. — 216 единиц. — Назовите теперь все число. — 753 миллиона 948 тысяч 216 единиц. — Слово „единиц“ обыкновенно не произносится. Прочитайте еще раз это число, не говоря слова „единиц“. Положите теперь это число на счетах.

Потом надо брать такие примеры, когда старшие классы оканчиваются, младшие начинаются нулями: 320 040 007.

— Из скольких классов состоит написанное число? Сколькими цифрами написано число, находящееся в каждом классе? Читайте старший класс. — 320 миллионов. — Читайте следующий класс. — 40 тысяч. — Читайте младший класс. — Семь. — Назовите теперь все число на счетах.

Полезно провести соответствие между занятыми проволоками и значащими цифрами, между пустыми проволоками и нулями. — На какой проволоке во втором классе положены 4 шарика? Что они означают? На каком месте во втором классе написана цифра 4? Что она означает? На каких проволоках во втором классе не положено шариков? Что это значит? Какие знаки написаны во втором классе на третьем и первом местах.

Далее учитель пишет число, не оставляя промежутков между классами: 864060130.

— Когда я писал вам числа раньше, то делал промежутки между классами. Теперь я напишу число без этих промежутков. Прочитаем его. Сколько цифр должно быть в первом классе? Отделим эти цифры запятой. Сколько цифр надо отделить для второго класса? В каком классе будут цифры 864? Теперь читайте. Прочитайте еще такое число: 045087002. (Ученик, вызванный к классной доске, разбивает число на классы запятыми; затем число читается.) Сколькими цифрами написано число каждого класса? Прочитайте старший класс. — 45 миллионов. — Что означает нуль, стоящий слева в этом классе? — Он означает, что здесь нет сотен миллионов. — Этот нуль я сотру. (Стирает.) Читайте теперь старший класс. Читайте все число. По-прежнему ли прочитали вы это число или как-нибудь иначе? Вот видите: нули, которые стоят налево в старшем классе (впереди всего числа), можно и не писать. Прочитайте такое число: 6000020. Сколько цифр написано здесь в старшем классе? Сколько же цифр может быть в старшем классе? — Три цифры, две цифры, одна цифра. — Прочитайте такое число: 124075386. Вы видели, что можно не писать нулей слева в старшем классе, т. е. впереди всего числа. Выбросим нуль и в этом примере. (Пишет снова те же цифры, кроме нуля.)¹ Прочитайте написанное теперь число. То же ли это число, что и раньше было, или нет? Останется ли прежним число, если не писать нулей в середине его? Не догадаетесь ли, почему изменилось число в нашем примере? Что означала цифра 6 прежде, и что означает она теперь? Что означала и означает цифра 8? 3? 5? 7? Вот видите: те цифры, которые стояли направо от пропущенного нуля, и теперь означают то же самое, что означали они прежде. Что означала раньше цифра 4, и что означает она теперь? Что означала и означает цифра 2? цифра 1? Видите: цифры, которые стояли влево от пропущенного нуля, означают теперь уже не то, что означали они раньше, потому что, пропустивши нуль, мы подвинули каждую из этих цифр вправо на одно место; например, цифра 4 была раньше на седьмом месте, а теперь на каком месте написана она? Итак, нулей можно не писать только впереди всего числа: только в старшем классе может быть три цифры, две цифры и одна цифра; в остальных же классах должно быть по три цифры; поэтому, когда мы разбиваем число на классы (запятые),

¹ Пишет число 12475386 под числом 124075386 так, чтобы цифры одноименных разрядов были в одном столбце (единицы под единицами и т. д.).

то идем от правой руки к левой; слева начать мы не можем, потому что не знаем, сколько цифр надо отделить для старшего класса.

После чтения чисел идет письмо их ¹.

Учитель кладет на счетах, например, число 73 040 008.

— Прочитайте число, которое я положил на счетах. Теперь пишите его. Читайте число, положенное в третьем классе. Напишите его. Читайте число, положенное во втором классе (сорок). Напишите его тремя цифрами, оставив небольшой промежуток между классами. Читайте число, положенное в первом классе. Напишите его тремя цифрами.

Здесь опять можно провести соответствие между занятыми проволоками и значащими цифрами, между пустыми проволоками и нулями.

Потом, уже не прибегая к счетам, учитель диктует числа, ученики пишут их.

Когда дети научатся читать и писать числа, следует сделать несколько упражнений: 1) в разложении числа на десятичные группы и 2) обратно в составлении числа по данным десятичным группам его.

Написав число, например 27 085 306, учитель говорит:

— Разбейте это число на десятичные группы: скажите, сколько в нем единиц каждого разряда; начинайте с разряда высшего.

— 2 десятка миллионов 7 миллионов 8 десятков тысяч 5 тысяч 3 сотни и 6 единиц.

Назовите число, которое состоит из 1 десятка миллионов 6 сотен тысяч 4 десятков тысяч 5 десятков и 2 единиц. (Эти группы учитель записывает на классной доске, или же ученики читают их по книжке.)

Потом учитель скажет детям, что простая единица называется единицей I разряда, десяток будет единицей II разряда и т. д. (нумера разрядов могут быть написаны мелом на раме счетов против соответственных проволок), и спросит учеников, какие разряды входят в первый класс, во второй, в третий.

После этого предыдущие упражнения даются в иной форме: счетная единица называется номером ее разряда.

— Назовите и напишите число, которое состоит из 5 единиц VI разряда, 2 единиц IV разряда, 7 единиц II разряда и 1 единицы I разряда.

§ 48. Умножение и деление на 10, 100, 1 000 и т. д.

Такое умножение и деление тесно примыкает к нумерации, так как приводится только к перечислению единиц одного разряда в другой: высший или низший.

Нам представляется наиболее удобным начать с внешних приемов такого умножения и деления: приписывания и отбрасывания нулей с правой стороны данного числа. Сравнение получаемых чисел с данными и приводит к приему умножения и деления на число, обозначаемое единицей с нулями.

¹ Раньше письма чисел полезно печатать их при помощи подвижных цифр: цифровые карточки можно прикалывать кнопками к бруску счетов под соответственными проволоками.

Учитель пишет, например, число 3 576 и под ним число 35 760.

— Какие единицы означает каждая цифра числа 3 576?

— Цифра 3 означает тысячи, цифра 5 — сотни, цифра 7 — десятки и цифра 6 — единицы.

— Какие единицы означают те же цифры в числе 35 760?

— Цифра 3 означает десятки тысяч, цифра 5 — тысячи, цифра 7 — сотни, цифра 6 — десятки.

— Во сколько раз второе число больше первого? Чтобы увеличить число в 10 раз, надо его тысячи перечислить в десятки тысяч, сотни — в тысячи, десятки — в сотни и единицы — в десятки. А как это сделать письменно?

— Надо с правой стороны приписать ноль.

— Почему же тогда число увеличится в 10 раз?

— Потому, что каждая цифра подвинется влево на одно место и будет обозначать в 10 раз больше, чем она обозначала раньше.

Следуют примеры умножения на 10.

Затем учитель пишет, например, число 47 850 и под ним число 4 785.

— Какие единицы означают цифры 4, 7, 8, 5 в числе 47 850? Какие единицы означают те же цифры в числе 4 785? Во сколько раз второе число меньше первого? Чтобы уменьшить число в 10 раз, надо его десятки тысяч перечислить в тысячи, тысячи — в сотни, сотни — в десятки и десятки — в единицы. А как сделать это письменно?

— Надо с правой стороны отбросить ноль.

— Почему же тогда число уменьшится в 10 раз?

— Потому что каждая цифра подвинется вправо на одно место и будет обозначать в 10 раз меньше, чем обозначала раньше.

Следуют примеры деления на 10 таких чисел, которые оканчиваются нулями.

Деление на 10 ведет к выражению чисел в виде десятков.

— Сколько всех десятков в числе 6 230? Как это узнать?

— Надо 6 230 разделить на 10 — будет 623.

— Запишите это так: $6\,230 = 623$ десяткам.

Следуют примеры.

Далее идет деление на 10, когда оно совершается с остатком.

— Число 5 364 надо разделить на 10. Если бы в делимом не было 4 единиц, а было бы число 5 360, то как вы разделили бы его на 10? Сколько получили бы в частном? А если разделить на 10 число 5 364, сколько получится в частном? Все ли число тогда разделится? Сколько будет в остатке? Запишите это: $5\,364 : 10 = 536(4)$.

Такое деление ведет к разложению числа на две группы, из которых первая содержит все десятки числа.

— Сколько всех десятков в числе 6 285? Сколько сверх того единиц? Запишите это так: $6\,285 = 628$ десятков + 5 единиц.

Следуют примеры вроде таких: число 15 207 разложить на две части, из которых первая содержит все десятки числа. Ученики говорят: число 15 207 состоит из 1 520 десятков и 7 единиц; пишут: $15\,207 = 1\,520$ десятков + 7 единиц.

Умножение и деление на 100 может быть выполнено сначала двукратным умножением и делением на 10. Потом выводится обычный прием такого умножения и деления.

— Число 257 увеличьте в 10 раз. Полученное произведение снова увеличьте в 10 раз. Во сколько раз будет тогда увеличено число 257? Как письменно увеличить число в 100 раз?

— Надо приписать с правой стороны два нуля.

— Когда к числу 257 мы припишем справа два нуля, на сколько мест влево подвинется каждая цифра? Во сколько раз больше будет обозначать каждая цифра, чем она обозначала прежде?

Примеры.

— Число 5800 уменьшить в 10 раз. Полученное частное снова уменьшить в 10 раз. Во сколько раз будет тогда уменьшено число 5800? Как письменно уменьшить число в 100 раз?

— Надо с правой стороны откинуть два нуля.

Следуют примеры деления на 100 таких чисел, которые оканчиваются двумя или более нулями, а потом и таких чисел, которые при делении на 100 дают остатки.

Ознакомившись с делением на 100, ученики выражают числа в виде сотен ($402\,900 = 4\,029$ сотен) или разлагают число на две группы, из которых первая содержит все сотни числа ($14\,036 = 140$ сотен + 36; $7\,605 = 76$ сотен + 5).

Прием умножения и деления на 1000 может быть выведен путем умножения и деления сначала на 100, потом на 10. Что касается других (редко встречающихся) множителей и делителей, выраженных единицей с нулями, то ученики, уже без особого вывода, распространяют на них знакомые им приемы умножения и деления на 10, на 100 и на 1000. Так, например, дети скажут, что для умножения какого-нибудь числа на 10 000 или на 100 000, надо к этому числу приписать справа четыре или пять нулей.

§ 49. Сложение.

Прежде чем выводить правило письменного сложения, нелишне сделать несколько упражнений в сложении на счетах. Сложение на счетах можно начать ранее письменного сложения по той причине, что первое более последнего соответствует устному приему выполнения этого действия (на счетах, как и при устном сложении, действие начинается с высших разрядов). Слагаемые могут быть записаны в строку; в ту же строку запишется и сумма, после того как она найдена на счетах. Здесь получит полное развитие уже знакомая ученикам основная мысль правила сложения: складывать числа по разрядам (складывать единицы одноименных разрядов).

Правило письменного сложения легко может быть выведено из знакомого уже ученикам приема устного выполнения этого действия: надо только обратить внимание учеников на следующее: 1) большие числа складывать в уме трудно потому, что нелегко держать в памяти десятичные группы получаемой суммы, так как групп этих много; поэтому сложение больших чисел будем производить письменно, т. е. записывать десятичные группы суммы по мере их получения (см. главу II, § 12); 2) писать большие слагаемые в строку неудобно: трудно отыскивать одинаковые разряды; лучше всего писать такие числа одно под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки под десятками и

т. д.: тогда одинаковые разряды слагаемых будут написаны очень близко друг к другу; 3) письменное сложение удобнее начинать с низших разрядов, нежели с высших, так как в последнем случае уже написанные цифры часто придется заменять другими (зачеркивая или стирая их), тогда как в первом случае всякая записанная цифра будет уже окончательной.

Приступая к письменному сложению чисел любой величины, следует предварительно распространить таблицу сложения на единицы различных разрядов. Пример: $800\ 00 + 70\ 000$. Выполнение: к 8 прибавить 7 — будет 15; к 8 десяткам тысяч прибавить 7 десятков тысяч — будет 15 десятков тысяч; а это составит 1 сотню тысяч и 5 десятков тысяч, или 150 000.

Приведем примерный ход урока, относящегося к выводу правила письменного сложения.

Учитель пишет $254 + 532$.

— Читайте. Как станете складывать?

— Мы разобьем эти числа на сотни, десятки и единицы; сначала сложим сотни, потом десятки, затем единицы.

Ученики выполняют устно сложение; когда вся сумма названа, учитель записывает ее после знака равенства. Затем он пишет на классной доске $2\ 135\ 627 + 5\ 452\ 251$.

— Читайте. Как станете складывать эти числа?

— Мы разобьем эти числа на десятичные группы. (Называют десятичные группы обоих слагаемых.) Сначала сложим миллионы, потом сотни тысяч и т. д.

— Попробуйте сделать сложение.

Ученики затрудняются.

— Почему в прежнем примере вы скоро сделали сложение, а здесь затрудняетесь? Что легче сложить: 2 сотни с 5 сотнями или 2 миллиона с 5 миллионами? — Все равно. — Так что же вас затрудняет? — Здесь получится много десятичных групп, трудно их запомнить. — Это верно. Поэтому давайте делать сложение *письменно*, т. е. как только найдем какую-нибудь десятичную группу суммы, сейчас же ее и запишем. Начинайте складывать, я буду писать. — 2 миллиона и 5 миллионов — будет 7 миллионов. (Учитель записывает цифру 7 после знака равенства.) — Сколько еще цифр должно быть потом написано направо от этой цифры? На каком месте будет тогда стоять цифра 7? Продолжайте сложение. — 1 сотня тысяч и 4 сотни тысяч — будет 5 сотен тысяч. — Где надо написать цифру 5? Сколько еще цифр будет потом написано направо от этой цифры? На каком месте будет стоять цифра 5?

Так идет сложение до конца.

Написав затем еще пример на сложение: $432\ 521\ 218 + 25\ 138\ 651$, учитель говорит ученикам, что большие числа писать при сложении в строку неудобно: трудно отыскивать одинаковые разряды, потому что они далеко друг от друга, и можно ошибиться: сложить, например, цифру, означающую десятки миллионов, с цифрой миллионов, поэтому слагаемые пишут так, чтобы одинаковые разряды были близко друг к другу, а для этого подписывают число одно под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки под десятками и т. д. Пишет первое слагаемое и спрашивает, откуда надо начать писать второе сла-

гаемое. — Его надо написать так, чтобы цифра 2 (десятки миллионов) пришлась под цифрой 3 (десятки миллионов.) — Для того чтобы показать, — говорит учитель, — что над этими числами надо произвести сложение, ставят знак + налево от слагаемых (в середине), внизу проводят черту, под нею пишут сумму:

$$\begin{array}{r} + 432\,521\,218 \\ 25\,138\,651 \\ \hline \end{array}$$

Ученики выполняют сложение попрежнему, т. е. начиная с высших разрядов. Затем учитель спрашивает, нельзя ли начать сложение с низшего разряда, с единиц, и получив утвердительный ответ, заставляет учеников переписать слагаемые и снова сделать сложение, начиная с простых единиц; полученная сумма сравнивается с прежней: она одна и та же.

До сих пор брали такие примеры, когда от сложения одинаковых разрядов получается в сумме не более 9. Затем учитель дает пример, в котором сумма некоторых разрядов превышает 9: $57\,386 + 29\,653$.

— Подпишите эти числа одно под другим, поставьте знак, проведите черту. Начните сложение с высших разрядов.

— 5 десятков тысяч и 2 десятка тысяч — будет 7 десятков тысяч.

— Запишите цифру 7. Продолжайте.

— 7 тысяч и 9 тысяч — будет 16 тысяч.

— Что составляют 16 тысяч? Сколько же будет в сумме десятков тысяч? Написанную цифру 7 надо переправить на цифру 8, цифру 7 надо стереть и написать вместо нее 8, или же зачеркнем ее и напишем под ней цифру 8.

Так идет сложение до конца.

— Перепишите данные числа. Начните теперь сложение с низших разрядов.

— 6 и 3 — будет 9. (Записывается цифра 9.) 8 десятков и 5 десятков — 13 десятков.

— Что составляют 13 десятков?

— 13 десятков составляют 1 сотню и 3 десятка.

— Запишите цифру 3 под десятками, а 1 сотню запомните (держите в уме) или напишите цифру 1 наверху, над сотнями.

Так идет сложение до конца.

— Когда мы производим действие письменно, то с каких разрядов удобнее начинать сложение? Почему удобнее начинать с низших разрядов? — Если начинать с высших разрядов, то приходится переправлять цифры (зачеркивать, стирать); а если начинать с низших разрядов, то не приходится переправлять цифры.

§ 50. Вычитание.

Так же, как и при сложении, и по той же причине, ранее вывода правила письменного вычитания можно поупражнять учеников в вычитании на счетах.

Правило письменного вычитания может быть выведено подобно тому, как это сделано для правила сложения.

Прежде всего надо дать несколько примеров на вычитание круглых тысяч, десятков тысяч и т. д., т. е. распространить на эти единицы

таблицу вычитания. Пример: $1400 - 600$. Выполнение: 1400 — это 14 сотен; от 14 отнять 6 — будет 8; от 14 сотен отнять 6 сотен — останется 8 сотен, или 800.

Затем учитель дает пример на вычитание чисел первой тысячи: $736 - 524$ и спрашивает учеников, как станут они делать вычитание.

— Мы разобьем эти числа на десятичные группы: на сотни, десятки и единицы; сначала вычтем сотни из сотен, потом десятки из десятков и единицы из единиц.

Вычитание выполняется устно, результат записывается после знака равенства.

Затем берется пример с многозначными числами: $8\,644\,927 - 6\,211\,715$. Ученики говорят, что данные числа надо разбить на десятичные группы (называют эти группы) и вычитать: миллионы из миллионов, сотни тысяч из сотен тысяч и т. д. Сделать вычитание в уме здесь трудно, потому что будет много десятичных групп, и запомнить их нелегко; надо вычитать письменно, т. е. узнав, сколько получится миллионов, сотен тысяч и т. д., сейчас же их и записывать. Писать большие числа в строку неудобно, потому что одинаковые разряды находятся при этом далеко друг от друга, их трудно отыскивать; лучше всего подписать одно число под другим (вычитаемое под уменьшаемым) так, чтобы одинаковые разряды приходились в одном столбце: тогда они будут очень близко друг к другу. Делается запись с надлежащей постановкой знака вычитания и чертой, проведенной под вычитаемым. Ученики выполняют действие, начиная с высших разрядов. Затем данные числа переписываются, и ученики еще раз производят вычитание, начиная с разрядов низших. Результаты сравниваются: получилось то же.

Остается указать детям на удобство начинать вычитание с низших разрядов. Для этого учитель дает такой пример на вычитание, в котором уменьшаемое содержит в некоторых разрядах меньше единиц, нежели вычитаемое: $82\,549 - 53\,876$.

Написав данные числа одно под другим, поставив знак и проведя черту, ученики выполняют вычитание, начиная с высших разрядов.

— От 8 десятков тысяч отнять 5 десятков тысяч — останется 3 десятка тысяч.

— Запишите, где надо, цифру 3. Продолжайте вычитание.

— От 2 тысяч нельзя отнять 3 тысячи.

— Когда от числа $82\,549$ вы отняли 5 десятков тысяч, какое число осталось?

— Осталось $32\,549$.

— Сколько всех тысяч в этом числе? Можно ли от 32 тысяч отнять 3 тысячи? Как от 32 отнять 3?

— Надо разбить 32 на 20 и 12.

— Значит, в остатке будет не 3, а только 2 десятка тысяч. Зачеркните цифру 3 и запишите под нею 2. 1 десяток тысяч мы раздробили в тысячи. Из скольких тысяч будете теперь вычитать 3 тысячи?

— 3 тысячи вычитаем из 12 тысяч — получится 9 тысяч. (Записывается цифра 9.)

Так идет вычитание до конца.

— Перепишите данные числа. Начните вычитание с низших разрядов.

— От 9 отнять 6 — останется 3. (Записывается цифра 3.) Из 4 десятков нельзя вычесть 7 десятков.

— Как стали бы вы вычитать 7 из 54: ведь 7 из 4 вычесть нельзя?

— Мы разбили бы 54 на 40 и 14.

— Стало быть, вы берете 1 десяток и раздробляете его в единицы. Как же станете вычитать 7 десятков?

— Мы возьмем одну сотню и раздробим ее в десятки.

— Сколько сотен будет тогда в уменьшаемом? Чтобы не забыть этого, поставим точку над цифрой 5; точка эта будет означать, что сотен в уменьшаемом не 5, а 4: одну сотню взяли, или — как говорят — *заняли*. Раздробим сотню в десятки; сколько десятков будет в уменьшаемом? Вычитайте.

— Из 14 десятков вычесть 7 десятков — останется 7 десятков. (Записывается цифра 7.)

Так идет вычитание до конца.

— Когда мы производим действие письменно, то с каких разрядов удобнее начинать вычитание? Почему?

§ 51. Умножение.

Умножение чисел любой величины располагается в следующем порядке: 1) умножение на однозначное число; 2) умножение на значащую цифру с нулями; 3) умножение на многозначное число.

1. Умножение на однозначное число.

Прежде всего следует проделать несколько примеров на умножение круглых сотен, тысяч, десятков тысяч и т. д. Это умножение требует только распространения таблицы умножения на различные счетные единицы. Пример: $70\,000 \times 6$. Выполнение: 70 000 — это 7 десятков тысяч; 7 умножить на 6 — будет 42; 7 десятков тысяч умножить на 6 — будет 42 десятка тысяч, что составит 4 сотни тысяч и 2 десятка тысяч, или 420 000.

Прием письменного умножения на однозначное число выводится из устного приема такого умножения.

Учитель дает пример на умножение в пределе тысячи: 325×3 .

— Как станете умножать?

— Мы разобьем 326 на десятичные группы: 3 сотни, 2 десятка и 6 единиц; сначала умножим сотни, потом десятки и затем единицы.

Умножение выполняется устно, произведение записывается после знака равенства.

Следует пример: $12\,684 \times 6$.

— Как станете умножать?

— Мы разобьем множимое на десятичные группы (называют их); сначала умножим десятки тысяч, потом тысячи и т. д.

— Так же легко сделать здесь умножение в уме, как и умножение 326 на 3? Почему здесь это труднее?

— Много получится групп, трудно их запомнить.

— Как же легче сделать умножение?

— Легче — письменно: умножить десятки тысяч и сейчас же записать, сколько получится; умножить тысячи и записать...

— Умножьте, я стану записывать. 1 десяток тысяч умножить на 6 — будет 6 десятков тысяч.

Учитель пишет 6 после знака равенства и спрашивает:

— Что означает цифра 6?

— 6 десятков тысяч.

— Сколько цифр должно быть еще написано направо от цифры 6? Продолжайте умножение.

— 2 тысячи умножить на 6 — получится 12 тысяч.

— Что составляют 12 тысяч? Сколько же будет в произведении десятков тысяч? (Зачеркивает цифру десятков тысяч 6 и пишет под нею цифру 7.) Какую цифру надо написать на следующем месте?

— Цифру тысяч — 2.

Так идет умножение до конца.

— С каких разрядов начинали мы сейчас умножение? Нельзя ли начинать с низших разрядов? (Перечисывает данные числа.) Начинайте.

— 4 умножить на 6 — будет 24.

— Что составляют 24 единицы?

— 24 единицы составят 2 десятка и 4 единицы.

— Полученные 4 единицы мы запишем (пишем 4 после знака равенства, отступая от него на столько, чтобы потом все произведение могло быть помещено после знака равенства), а 2 десятка запомним (заметим в уме) или напишем на стороне. Продолжайте.

— 8 десятков умножить на 6 — получится 48 десятков.

— А сколько десятков получилось от умножения единиц (сколько десятков замечено в уме или на стороне)? Сколько будет всех десятков? Что составляют они? Значит, все десятки уйдут в сотни, десятков не будет; напишем на их месте нуль, а 5 сотен заметим.

Так идет умножение до конца.

— Такое ли получилось произведение, как и прежде? С каких разрядов удобнее начинать умножение? Почему?

Затем учитель объясняет детям, что при письменном умножении располагать вычисление в строку неудобно: не угадаешь, где поставить первую цифру произведения (цифру единиц); часто пишут множитель под единицами множимого, знак умножения ставят налево от множителя; внизу проводят черту; под нею и пишут произведение так, чтобы единицы его бы и под единицами множимого, десятки — под десятками и т. д.

Так писать удобнее еще и потому, что цифры множимого будут несколько ближе к множителю:

Кроме этой обычной записи следует указать ученикам еще такое расположение вычисления:

$$\begin{array}{r} \times 6 \\ 76104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\,684 \times 6 \\ \hline 76\,104 \end{array}$$

Эта последняя запись, занимая меньше места, удобна еще тем, что разряды произведения подписываются под соответствующими разрядами множимого, не будучи отделены от них таким промежутком, как в первом случае; а это, ведя к более красивому в смысле расположения цифр письму, может вместе с тем содействовать предупреждению ошибок в прописке цифр произведения, особенно в тех случаях, когда в обозначение множимого входят нули, как, например, при умножении $380\,006 \times 7$.

Умножение многозначного числа на однозначное заключаем рассматриванием того случая, когда множимое оканчивается нулями.

Учитель пишет пример: $236\ 700 \times 4$.

— Прочитайте. Раздробите все множимое в сотни и прочитайте снова.

— 2367 сотен умножить на 4.

— Умножим 2367 на 4.

2 367

Выполняется умножение. Является запись:

$\times 4$

— 2367 умножить на 4 — сколько будет? Но нам надо умножить на 4 не 2367 единиц, а 2367 сотен. Сколько же тогда получится? — Получится 9468 сотен.

9 468

Учитель приписывает ко множимому и произведению название сотен:

2 367 сотен

$\times 4$

9 468 сотен

— Мы обозначили, что во множимом и в произведении у нас сотни; для этого мы написали слово „сотен“. Как можно обозначить это иначе?

— Приписать по два нуля.

Учитель стирает слово „сотен“ и пишет по два нуля:

236 700

— Вот видите: если множимое оканчивается нулями, то множитель следует подписать так, чтобы нули эти остались вправо от него, и умножать на него число без нулей (не обращая внимания на нули); нули эти надо приписать, или — как иногда говорят — снести к полученному произведению.

$\times 4$

946 800

Затем показывается другая запись:

Здесь прежде всего подписываются под множимым те нули, которыми оно оканчивается, а затем число 2367 умножается на 4.

$236\ 700 \times 4$
946 800

2. Умножение на значащую цифру с нулями.

Предварительно можно дать ученикам несколько примеров умножения на единицу с нулями, которое пройдено вслед за нумерацией.

Прием умножения на круглые десятки и сотни был уже введен при изучении умножения в пределах первой сотни и первой тысячи. Напомнив ученикам этот вывод, мы распространим его на круглые тысячи и другие разрядные числа.

Учитель пишет $5\ 432 \times 30$ и спрашивает:

— Что значит 5432 умножить на 30? Если мы не умеем умножать на 30, каким другим действием могли бы мы вычислить это? — Сложением. — Сколько раз мы должны были бы написать число 5432? А если эти 30 слагаемых мы соединим в группы, по 3 слагаемых в каждой, сколько будет таких групп? Мы умеем умножать на однозначное число; как же вычислим мы каждую группу? — 5432 умножим на 3. (Выполняется умножение.) — А сколько таких групп? Что же надо теперь сделать? — Надо 16296 умножить на 10. — На 10 мы умножать умеем; как это сделать письменно? — Надо с правой стороны приписать нуль. — Как же умножить 5432 на 30? — Надо 5432 умножить на 3; а то, что получится, умножить на 10. — Как умножили бы вы 5432 на 400? —

Мы умножили бы 5 432 на 4, а то, что получится, умножили бы на 100. — Почему это так? — Умножить 5 432 на 400 — значит 5 432 повторить 400 раз. Если эти 400 чисел соединить в группы, по 4 числа в каждой, то выйдет 100 таких групп. Чтобы вычислить каждую группу, надо 5 432 умножить на 4; а чтобы узнать, сколько будет всего, надо то, что получится, умножить на 100. (Все это ученики могут высказать по вопросам учителя.)

Затем учитель объясняет ученикам, что так как при умножении на однозначное число пишут множитель под единицами множимого, то и здесь следует писать множитель (400) так, чтобы значащая цифра (4) была под единицами множимого, а нули оставались бы вправо от него; потом надо сделать умножение на значащую цифру (4) и к полученному произведению приписать (снести) нули: 5432

$$\begin{array}{r} \times 400 \\ 2172800 \end{array}$$

Другая запись:
$$\begin{array}{r} 5432 \times 400 \\ 2172800 \end{array}$$

Здесь сначала подписываются под множимым те нули, которыми оканчивается множитель; а потом 5 432 умножается на 4.

— А как умножили бы вы 758 на 2 000? — Мы умножили бы 758 на 2; а то, что получится, умножили бы на 1000. — Почему это так? — Умножить 758 на 2 000 — значит повторить 2 000 раз. Если 2 000 чисел соединить в группы, по 2 числа в каждой группе, то выйдет 1000 таких групп. Чтобы вычислить каждую группу, надо 758 умножить на 2; а чтобы узнать, сколько будет всего, надо то, что получится, умножить на 1000. — А как умножить какое-нибудь число на 60 000? — Надо умножить это число на 6, а полученное число умножить на 10 000; приписать справа четыре нуля.

Умножение на значащую цифру с нулями можно заключить такими примерами, в которых и множимое оканчивается нулями.

Чтобы умножить 1 357 000 на 600, надо 1 357 000 умножить на 6, а то, что получится, умножить на 100. А для того, чтобы умножить 1 357 000 на 6, умножаем 1 357 на 6, полученное произведение — на 1 000. Так как, кроме умножения на 1 000 и на 100, дело сводится к умножению 1 357 на 6, то мы напишем множитель так, чтобы его значащая цифра 6 приходилась под первой (справа) значащей цифрой множимого 7:

Умножим 1 357 на 6, имеем 8 142; но так как во множимом 1 357 тысяч, то и полученное число 8 142 означает тысячи: приписываем к нему справа три нуля. Теперь мы умножили данное число на 6; остается полученное число умножить на 100, для чего приписываем к нему справа еще два нуля. Итак, умножив 1 357 на 6, мы приписываем к произведению 8 142 столько нулей, сколько их во множимом и во множителе вместе.

Другая запись:

$$\begin{array}{r} 1357000 \times 600 \\ 814200000 \end{array}$$

Под множимым подписываются три нуля, которыми оканчивается множимое, два нуля, которыми оканчивается множитель, и потом произведение, полученное от умножения числа 1 357 на 6.

3. Умножение на многозначное число.

При вычислениях в пределах сотни и тысячи ученики уже умножали на двузначное и трехзначное числа и знают, что в этих случаях надо умножать множимое на каждую десятичную группу множителя. Напомнив об этом, учитель выводит правило письменного умножения многозначных чисел.

Пишется пример: 24×32 .

— Что значит 24 умножить на 32? — Умножить 24 на 32 — значит 24 взять, повторить 32 раза. — Как число 24 возьмете вы 32 раза? — Мы возьмем 24 сначала 30 раз, потом 2 раза. — Как станете умножать 24 на 30? — Умножим 24 на 3 — будет 72; 72 на 10 — получится 720. — Докажите умножение. — 24 умножить на 2 — будет 48; 720 и 48 — будет 768.

Затем учитель дает пример $5\,347 \times 364$.

— Умножим 5 347 на 364. Как это сделать? — Надо умножить 5 347 на 300, потом на 60, потом на 4; все, что получится, сложить. — Мы уже умеем умножать на сотни, на десятки и на единицы; будем умножать.

Ученики, вызванные по очереди к классной доске, выполняют действие. Являются записи:

			1 604 100
5 347	5 347	5 347	+ 320 820
$\times 300$	$\times 60$	$\times 4$	21 388
1 604 100	320 820	21 388	1 946 308

— Вместо того чтобы писать вычисление в четырех разных местах, запишем его в одном месте. Напишем множимое (учитель пишет на классной доске, ученики могут писать на грифельных досках или в тетрадях), а под ним множитель так, чтобы единицы его были под единицами множимого; десятки будут под десятками и сотни под сотнями. Проведем внизу множителя черту, налево поставим знак умножения. На что множили вы сначала число 5 347? Как умножить его на 300? Станем умножать на 3. Умножайте.

— 7 умножить на 3 — будет 21 — 1 единица и 2 десятка.

— Но ведь потом нам придется умножить полученное число на 100; во что же тогда обратится единица?

— Она обратится в сотню.

— Поэтому мы запишем цифру 1 под сотнями. Продолжайте.

— 4 умножить на 3 — будет 12; 12 да 2 — 14: 1 сотня и 4 десятка.

— Во что обратятся эти 4 десятка после умножения на 100? Где надо написать цифру 4?

Так идет умножение до конца. Является запись:

$$\begin{array}{r} 5\,347 \\ \times 364 \\ \hline 1\,604\,100 \\ + 320\,820 \\ 21\,388 \\ \hline 1\,946\,308 \end{array}$$

— Когда мы умножили 5347 на 3, сколько тогда получилось? — Получилось 16041. — Что потом сделали мы с этим числом? Как умножили его на 100? Если мы не припишем этих двух нулей, но напишем число 16041 так, чтобы последняя цифра его приходилась под сотнями (под сотнями множимого или множителя и над сотнями остальных слагаемых произведений), произойдет ли от этого ошибка при сложении? Значит, нулей этих можно и не писать (нули стираются). Когда мы умножили 5347 на 6, какое число получилось? Что потом сделали мы с этим числом? Нельзя ли не писать и этого нуля (ноль стирается)? Где должна быть написана последняя цифра числа 32082? — Под десятками. — Значит, второе слагаемое надо писать под первым, отступая на одно место вправо. А как написано третье слагаемое под вторым? — Отступя вправо на одно место. — Почему так? — Потому что последняя цифра его означает единицы.

— Что значит 5347 умножить на 364? — Это значит 5347 взять, повторить 364 раза. — Как взяли мы это число 364 раза? — Мы взяли его сначала 300 раз (умножили на 300), потом 60 раз (умножили на 60) и затем 4 раза (умножили на 4). — Нельзя ли сначала умножить на 4, потом на 60 и после того на 300? Будем так умножать.

Данные числа переписываются. Ученики начинают умножение.

— 7 умножить на 4 — будет 28 — 2 десятка и 8 единиц; 8 писать, 2 десятка замечать. — Где надо записать цифру 8? — Ее надо записать под единицами.

Продолжается и заканчивается умножение на 4.

— Теперь на что будем умножать? Умножайте — 7 умножить на 6 будет 42; 2 писать, 4 замечать. — То число, которое получим от умножения на 6, придется еще умножить на 10. Что же означает цифра 2? Где записать ее?

Продолжается и доканчивается умножение на десятки.

— Теперь на что будете умножать? Умножайте.

— Третье 7 — 21; 1 писать, 2 замечать. — То число, которое получим от умножения на 3, придется еще умножить на 100. Что же означает цифра 1? Где написать ее?

Продолжается и доканчивается умножение на сотни.

— Что надо сделать с полученными тремя числами? Складываем.

Является запись:

$$\begin{array}{r} 5347 \\ \times 364 \\ \hline 21388 \\ + 32082 \\ \hline 16041 \\ \hline 1946308 \end{array}$$

— Как называется то число, которое получается от умножения? Прочитайте произведение, полученное от умножения данных чисел. А как получилось число 21388? Значит, это число есть также произведение. Второе и третье числа тоже будут произведениями. Каждое из этих (трех) чисел составляет часть всего (полного) произведения; поэтому числа эти называются *частными произведениями*, или *неполными произведениями*. Обыкновенно умножают многозначные числа так, как мы сейчас это сделали: сначала умножают на единицы множителя. Как надо писать первое

неполное произведение? — Так, чтобы единицы его были под единицами множимого (или множителя). — На что умножают потом? Как пишут второе неполное произведение под первым? — Так, чтобы единицы второго произведения были под десятками первого, т. е. отступая на одно место влево. — На что умножают потом? И т. д.

Другая запись:

$$\begin{array}{r} 5\,347 \times 364 \\ \hline 21\,388 \\ + 320\,82 \\ 1\,603\,1 \\ \hline 1\,946\,308 \end{array}$$

В числе упражнений учитель приводит такие примеры, в которых некоторые неполные произведения оканчиваются нулями, и такие, в которых множитель имеет нули в

$$\begin{array}{r} 1\,925 \qquad 6\,539 \\ \times 823 \qquad \times 3\,004 \\ \hline 5\,775 \qquad 26\,156 \\ + 38\,50 \qquad + 19\,617 \\ 1\,540\,0 \qquad 19\,643\,156 \\ \hline 1\,584\,275 \end{array}$$

середине. В последнем случае, составляя второе неполное произведение, ученики должны рассуждать: трижды 9 — 27; 7 надо писать, 2 замечать; мы умножили 9 единиц на 3 тысячи, и получилось 27 тысяч; цифра 7 означает тысячи, ее надо писать под тысячами.

Иные записи двух последних примеров:

$$\begin{array}{r} 1\,925 \times 823 \qquad 6\,539 \times 3\,004 \\ \hline 5\,775 \qquad 26\,156 \\ + 38\,50 \qquad + 19\,617 \\ 1\,540\,0 \qquad 19\,643\,156 \\ \hline 1\,584\,275 \end{array}$$

Затем надо рассмотреть умножение чисел, оканчивающихся нулями.

Ученики уже умножали: число, оканчивающееся нулями, на однозначное число ($236\,700 \times 4$); число без нулей в конце на значащую цифру с нулями ($5\,432 \times 400$); число, оканчивающееся нулями, на значащую цифру с нулями ($1\,357\,000 \times 600$). Здесь надо только распространить уже известные ученикам приемы на те случаи, когда множитель есть число многозначное — без нулей и с нулями на конце.

а) $63\,700$ умножить на 256 . Ученики читают множимое, раздробляя все разряды в сотни: 637 сотен.

$$\begin{array}{r} 637 \text{ сотен} \\ \times 256 \\ \hline 3822 \\ + 3185 \\ 1274 \\ \hline 163072 \text{ сотен.} \end{array}$$

Слово „сотен“ заменяется двумя нулями.

$$\begin{array}{r} 63700 \\ \times 256 \\ \hline 3822 \\ + 3185 \\ 1274 \\ \hline 16307200 \end{array}$$

Другая запись:

$$\begin{array}{r} 63\,700 \times 256 \\ \hline 382\,200 \\ + 31\,850 \\ 12\,740 \\ \hline 16\,307\,200 \end{array}$$

б) $1\,254$ умножить на $32\,600$. Ученики уже знают, что для умножения, например, на 700 надо умножить множимое на 7 , а то, что получится, умножить на 100 — приписать два нуля. Прочитав множитель $32\,600$ как 326 сотен, они скажут, что $1\,254$ надо умножить на 326 , а полученное произведение — на 100 .

$$\begin{array}{r}
 1254 \\
 \times 32600 \\
 \hline
 7524 \\
 + 2508 \\
 3762 \\
 \hline
 40880400
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1254 \times 32600 \\
 \hline
 752400 \\
 + 2508 \\
 3762 \\
 \hline
 40880400
 \end{array}$$

или

в) 34700 умножить на 2510. Читается: множимое — 347 сотен, множитель — 251 десяток. Чтобы умножить 347 сотен на какое-нибудь число, надо умножить на него 347 и потом приписать два нуля; а чтобы умножить на 251 десяток, надо умножить на 251 и потом приписать ноль. Итак, множим 347 на 251 и к полученному произведению приписываем три нуля (два и один).

$$\begin{array}{r}
 34700 \\
 \times 2510 \\
 \hline
 347 \\
 + 1735 \\
 694 \\
 \hline
 87097000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 34700 \times 2510 \\
 \hline
 347000 \\
 + 1735 \\
 694 \\
 \hline
 87097000
 \end{array}$$

или

§ 52. Умножение дробей.

Мы рассматриваем здесь: 1) умножение дроби и целого с дробью на целое число и 2) отыскание частей целого числа, соединяемое также с повторением числа несколько раз, т. е. умножение целого числа на дробь и на целое с дробью. Умножение дроби на дробь мы здесь опускаем.

Как и раньше, мы соединяем простейшие дроби в три группы: а) половины, четверти и восьмые; б) половины, трети и шестые; в) половины, пятые и десятые. Ход упражнений во всех группах одинаков.

Вначале мы повторяем сравнение долей одних с другими, с целью напомнить превращение долей более мелких в доли более крупные, и выделение целых из долей единицы: эти преобразования — сокращение дробей и исключение из дроби целого — будут иметь место при умножении дробей.

1. Умножение дроби на целое число.

В день расходуют $\frac{3}{8}$ кг сахара. Сколько сахара выйдет в 7 дней?

Что надо сделать, чтобы узнать это?

— Надо $\frac{3}{8}$ повторить 7 раз. Надо $\frac{3}{8}$ умножить на 7.

(Запись: $\frac{3}{8} \times 7$).

Сколько восьмых килограмма выходит в день? Сколько восьмых выйдет в 7 дней? Запишите. $\left(\frac{3}{8} \times 7 = \frac{21}{8} = 2 \frac{5}{8}\right)$.

Мы приводим здесь учеников к искомому результату, сосредоточивая внимание детей на числе долей и заставляя смотреть на знаменатель, как на наименование (3 восьмушки). К тому же самому можно притти, сводя умножение к знакомому уже детям сложению: умножить $\frac{3}{8}$ на 7 — значит к $\frac{3}{8}$ прибавить $\frac{3}{8}$, еще прибавить $\frac{3}{8}$ и т. д. : $\frac{3}{8} \times 7 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$; чтобы сложить эти дроби, мы должны высчитать, сколько всего будет восьмых долей; но так как в каждом слагаемом долей поровну, по 3, а всех слагаемых 7, то мы узнаем, сколько будет всех долей, умноживши 3 на 7.

При умножении целого с дробью на целое число ученики будут целое дробь умножать отдельно: $9 \frac{3}{4} \times 5 = 45 \frac{15}{4} = 48 \frac{3}{4}$.

2. Отыскание частей целого числа.

Отыскание частей целого числа есть не что иное, как умножение на дробь: найти $\frac{3}{4}$ числа 24 — это все равно, что 24 умножить на $\frac{3}{4}$. Но в элементарном курсе дробей не должно отыскание частей называть умножением, и, следовательно, в относящихся сюда записях не надо употреблять знака этого действия.

С отысканием частей дети неоднократно встречались уже раньше. Здесь надо только вспомнить о нем.

Килограмм луку стоит 72 копейки. Сколько надо заплатить за $\frac{1}{4}$ кг луку? Как это узнать?

— Надо 72 разделить на 4 — будет 18.

Запись может быть такова: $\frac{1}{4}$ от 72 = 18.

— А сколько придется заплатить за $\frac{3}{4}$ кг луку? Как это узнать?

— Надо 18 умножить на 3 — получится 54.

Запись: $\frac{3}{4}$ от 72 = 54.

— Как найти $\frac{7}{8}$ от 40?

Сначала надо найти $\frac{1}{8}$ от 40: 40 разделить на 8 — будет 5; потом повторить 5 семь раз, получится 35; $\frac{7}{8}$ от 40 = 35.

Запись: $\frac{1}{8}$ от 40 = 5.

$\frac{7}{8}$ от 40 = 35.

несколько раз (умножение на целое с дробью).

— Хозяйка купила $2\frac{3}{8}$ кружки молока по 32 коп. за кружку.

Сколько заплатила она за молоко? Как станете решать эту задачу?

— Сначала надо узнать, сколько стоят 2 кружки молока. Для этого должно 32 умножить на 2; получится 64. Потом узнаем, сколько приходится за $\frac{1}{8}$ кружки; для этого 32 разделим на 8, будет 4. Затем узнаем,

сколько придется заплатить за $\frac{3}{8}$ кружки; 4 умножить на 3 — будет 12.

Потом узнаем, сколько заплатила хозяйка за все молоко: к 64 прибавить 12, получится 76.

Относящаяся сюда запись, появляющаяся по мере решения задачи, может быть такая¹:

1) $32 \times 2 = 64$; 64 коп. или: 1) $32 \times 2 = 64$; 64 коп.

2) $32 : 8 = 4$; 4 коп. 2) $\frac{1}{8}$ от 32 = 4; 4 коп.

3) $4 \times 3 = 12$; 12 коп. 3) $\frac{3}{8}$ от 32 = 12; 12 коп.

4) $64 + 12 = 76$; 76 коп. 4) $64 + 12 = 76$; 76 коп.

§ 53. Деление.

Деление чисел любой величины мы располагаем в таком порядке: 1) деление многозначного числа на однозначное; 2) деление многозначного числа на многозначное при однозначном частном; 3) деление многозначных чисел — общий случай.

1. Деление многозначного числа на однозначное.

Прежде всего ученики могут сделать несколько примеров на деление круглых сотен, тысяч и т. д. ($5400 : 9$; $63\,000 : 7$). Это деление требует только распространения таблицы деления на различные счетные единицы.

Прием письменного деления на однозначное число выводится из устного приема такого деления.

Учитель дает пример на деление в пределе тысячи: $824 : 2$. Как станете делить? Мы разобьем делимое на 8 сотен, 2 десятка и 4 единицы; сначала разделим сотни, потом десятки и затем единицы.

Еще пример: $936 : 4$.

— Мы разобьем делимое на 8 сотен, 12 десятков и 16 единиц; сначала разделим 8 сотен, потом 12 десятков и затем 16 единиц.

Деление выполняется устно; частное записывается после знака равенства.

¹ Повторение произведений и частных с наименованиями (64 коп., 4 коп., 12 коп. и др.) нельзя признать целесообразным: лучше умножение и деление записывать сразу, как умножение и деление именованных чисел, а именно: $32 \text{ коп.} \times 2 = 64 \text{ коп.}$ и т. д. *Ред.*

Следует пример: $763\,542:3$.

— Как станете делить? — Мы разобьем делимое на группы: 6 сотен тысяч, 15 десятков тысяч, 12 тысяч, 15 сотен, 3 десятка и 12 единиц. — Попробуйте разделить в уме. — Что затрудняет вас? — Много групп: трудно запомнить. — Как же легче сделать деление? — Легче сделать письменно. — Делите, я буду записывать — 6 сотен тысяч разделить на 3, получится 2 сотни тысяч. (Учитель пишет цифру 2 после знака равенства.) 15 десятков тысяч разделить на 3, будет 5 десятков тысяч. (Записывается цифра 5.)

Так идет деление до конца.

Мы полагаем возможным требовать от учеников, чтобы они выполняли деление на однозначное число так, как сейчас изложено, обходясь без всяких других записей. Однако, с целью подготовки к делению на многозначное число, учитель может и здесь показать детям те записи, которые делаются при отыскании числа разделенных единиц и нахождении остатка. Вместе с тем может быть показан и другой знак деления — $\overline{)}$, который образуют две черты: между делимым и делителем проводится вертикальная черта (сверху вниз), под делителем — черта лежащая (слева направо); внизу этой черты пишется частное¹.

Приводим пример.

Старший разряд делимого — сотни тысяч; в частном сотен тысяч не получится: для того, чтобы в частном получилась хоть одна сотня — $479\,451 \overline{)} 7$ тысяч, в делимом их должно быть, по крайней мере, 7. Раздробляем 4 сотни тысяч в десятки тысяч и, придавая 7 десятков тысяч, имеем 47 десятков тысяч; 47 разделить на 7 — будет 6. Чтобы узнать, сколько десятков тысяч разделено, умножим 6 на 7: в каждую часть мы положили по 6 десятков тысяч, а всех частей 7; разделено 42 десятка тысяч. Чтобы определить, сколько десятков тысяч остались неразделенными, вычитаем 42 десятка тысяч из 47 десятков тысяч, для чего подписываем 42 под 47. Оставшиеся 5 десятков тысяч раздробляем в тысячи, имеем 50 тысяч; кроме того, в делимом есть еще 9 тысяч, так что всех тысяч будет 59; чтобы узнать число тысяч, надо, как видно, к остатку 5 приписать следующую цифру делимого 9, или — как говорят — надо к остатку снести следующую цифру. И т. д.

Запись может быть сокращена, если мы станем писать только остатки.

$$\begin{array}{r} 479\,451 \overline{)} 7 \\ \underline{59} 68\,493 \\ \underline{34} \\ \underline{65} \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

¹ Такой знак деления удобнее прежнего при делении на многозначное число.

2. Деление многозначного числа на многозначное при однозначном частном.

Этот случай деления следует начать делением друг на друга круглых сотен, тысяч и т. д. Такое деление требует лишь распространения таблицы деления на различные счетные единицы: чтобы разделить, например, 2800 на 400, рассуждаем: 4 сотни содержатся в 28 сотнях столько же раз, сколько 4 содержится в 28.

Переходя затем к общему случаю деления многозначного числа на многозначное при однозначном частном, надо прежде всего научить детей узнавать, будет ли частное однозначное или нет. Чтобы узнать это, должно делитель умножить (в уме) на 10 и полученное произведение сравнить с делимым: если удесятеренный делитель больше делимого, то делитель содержится в делимом менее 10 раз, и частное будет однозначное. Так, при делении 30736 на 3684 получится однозначное частное, потому что удесятеренный делитель 36840 больше делимого. Применяв этот прием распознавания однозначного частного к нескольким примерам вроде следующих:

$$\begin{array}{r} 9432: 2358 \\ 79794: 26598 \\ 985962: 328654 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44618: 6374 \\ 157461: 52487 \\ 5015214: 835869, \end{array}$$

учитель укажет детям внешний признак однозначного частного: частное бывает однозначное: 1) когда в делимом и делителе поровну цифр (первый столбец примеров) и 2) когда в делимом на одну цифру больше, чем в делителе (второй столбец). В первом случае старший разряд делимого содержит больше единиц, нежели старший разряд делителя: старшая цифра делимого больше старшей цифры делителя; если старшие цифры одинаковы (85637:81748), то вторая цифра делимого больше второй цифры делителя и т. д. Во втором случае старшая цифра делимого менее старшей цифры делителя; если же эти цифры одинаковы (7133886:792654), то сказанное относится ко вторым цифрам и т. д.

Для отыскания частного мы советуем приучить детей задаваться не одной, но двумя старшими цифрами делителя в соответствующей части делимого (см. главу VII, § 46, п. 6).

Примеры.

1) $69734 \overline{) 34867}$. Узнаем, сколько раз 34 тысячи содержатся в 69 тысячах; для этого делим 6 на 3, имеем 2; умножаем (устно) 34 на 2, получаем 68. Итак, 34 тысячи содержатся 2 раза в 69 тысячах. Теперь делаем окончательное испытание цифры 2, умножая на нее письменно весь делитель.

2) $401576 \overline{) 57367}$. Задаемся числом 57 в числе 401. Для этого делим 40 на 5, имеем 8; умножаем (устно) 57 на 8, получаем 456; следовательно, 57 не содержится 8 раз в 401. Пробуем: 7 умножаем (в уме) 57 на 7, имеем 399 — меньше 401. Делаем окончательное испытание цифры 7, умножая на нее письменно весь делитель.

3) $89765 \overline{) 17953}$. Две старшие цифры делителя представляют собой число второго десятка (17). Если мы знаем на память произ-

ведения таких чисел, заключенные, по крайней мере, в пределе сотни, то мы сразу разделим 89 на 17 (так как помним, что 85 есть 5 раз 17) и затем делаем окончательное испытание цифры 5, умножая на нее письменно весь делитель.

4) 120 824 | 15 823. Две старшие цифры делителя — число второго десятка 15. Зная, что в числах, не превышающих сотни, 15 содержится не более 6 раз (90 есть 6 раз 15), умножаем в уме 15 на 7, потом на 8; имеем 120. (Или так: разлагаем 120 на 90 и 30 и делим на 15 эти числа). Испытываем цифру 8.

В тех случаях, когда произведение двух старших цифр делителя на испытуемую цифру частного очень мало отличается от соответствующей части делимого (будучи меньше ее) или равно ей, как это имеет место в последнем примере: $15 \times 8 = 120$, желательно приучить детей, раньше письменной проверки, захватывать еще третью цифру делителя, умножая ее на испытуемое частное и придавая полученное число к произведению двух старших цифр. Так, в последнем примере умножаем 8 сотен на 8, получаем 64 сотни, или 6 тысяч и 4 сотни; придавая 6 тысяч к 120 тыс. ($15 \times 8 = 120$), имеем 126 тысяч. Отсюда видим, что испытуемая цифра 8 сильна; берем 7 и делаем окончательную проверку.

3. Деление многозначных чисел — общий случай.

Деление многозначных чисел в общем случае сводится к ряду делений многозначного числа на многозначное при однозначном частном и, таким образом, вполне подготовлено рассмотренными двумя случаями деления.

Начать следует с примера более легкого деления на двузначное число. Для того чтобы выполнить приведенное деление, ученики при помощи вопросов учителя рассуждают так. Старший разряд делимого — сотни тысяч; в частном сотен тысяч не будет: для того чтобы в частном получилась

$$\begin{array}{r}
 313\,776 \quad | \quad 48 \\
 \underline{288} \\
 257 \\
 \underline{240} \\
 177 \\
 \underline{144} \\
 336 \\
 \underline{336} \\
 0
 \end{array}$$

хотя одна сотня тысяч, в делимом их должно быть, по крайней мере, 48. Раздробляя сотни тысяч в десятки тысяч, имеем всего 31 десяток тысяч; десятков тысяч в частном не будет по той же причине, по какой нет и сотен тысяч; десятков тысяч в делимом меньше 48. Раздробляем 31 десяток тысяч в тысячи и имеем в делимом всего 313 тысяч; тысячи в частном получатся (и это будет старший разряд его), так как в делимом их больше 48. Делим 313 на 48; 31 раз делить на 4 — будет 7; 7 раз по 48 — 336;

7 много: берем 6, 6 раз по 48 — 288; пишем цифру частного 6. Мы разделили на 48 не все 313 тысяч, а только 288 тысяч (в каждой части по 6 тысяч, всех частей 48; стало-быть, во всех частях будет 6×48 , или — все равно — 48×6 , т. е. 288 тысяч). Узнаем, сколько тысяч осталось неразделенными: вычитаем 288 из 313, для чего подписываем 288 под 313, имеем в остатке 25 тысяч. Раздробляем оставшиеся 25 тысяч в сотни, получаем 250 сотен; в делимом есть еще 7 сотен, так что всех сотен будет 257; чтобы узнать число всех сотен, надо, как видим, к остатку 25

После деления на двузначное число учитель переходит к делению на число многозначное. Рассуждая попрежнему, ученики соображают, что в частном не будет сотен, десятков и единиц миллионов, сотен тысяч:

высший разряд частного — десятки тысяч. Тут учитель может сказать детям, что всякий раз так узнавать старший разряд частного — долго. Легко понять, что, рассуждая попрежнему, мы раздробляем разряды делимого до тех пор, пока не получим число, которое не меньше делителя, в котором делитель содержится несколько, но не более 9 раз (случай 2-й). Поэтому поступаем так: отделяем (запятой или мысленно) в делимом слева такое число, в котором делитель содержится

Остановимся на таких примерах деления, когда делимое, а затем делитель и делитель оканчиваются нулями. Здесь можно различить три случая.

3 354 000 | 5375. Этот случай ничем особенным не отличается от общего случая.

$$\begin{array}{r} 2\,924\,800 \mid 457 \\ - 2\,742 \\ \hline 1828 \\ - 1828 \\ \hline 0 \end{array}$$

получим число 1828, которое без остатка делится на делитель, давая в частном 4. Эта цифра 4 означает сотни, так как получилась от деления 1828 сотен. Десятков и единиц в частном не будет: на их местах ставим нули.

в) И делимое и делитель оканчиваются нулями: $729\,000 \mid 16\,200$. В таких случаях часто отбрасывают (зачеркивают) поровну нулей в делимом и делителе. Разъяснить это можно так. Делитель представляет собой 162 сотни, а делимое — 7 290 сотен. Разделив 7 290 на 162, мы узнаем, что 162 в 7 290 содержится 45 раз. Но сколько раз 162 содержится в

$$\begin{array}{r}
 729\,000 \overline{) 16\,200} \\
 \underline{648\,00} \\
 81\,000 \\
 \underline{81\,000} \\
 0
 \end{array}$$

Однако лучше не пользоваться указанным сокращением и при делении таких чисел поступать так же, как в общем случае. Дело в том, что если деление совершается с остатком, то зачеркнутые нули делимого должны быть снесены к остатку. Разъяснение этого дается детям не легко и скоро забывается ими.

§ 54. Деление дробей.

Эти упражнения мы располагаем в следующем порядке. а) Деление на части: 1) деление целого, дроби и целого с дробью на целое число, 2) отыскивание целого по данным частям его.

Деление на части.

1. Деление на целое число. Сначала мы изучаем деление целых чисел в том случае, когда оно не совершается нацело.

— Слушайте задачу. Учитель роздал 20 листов бумаги поровну 4 ученикам. По сколько листов получил каждый ученик? Что надо сделать, чтобы узнать это?

— Надо 20 разделить на 4 равные части ($20:4=5$).

— Слушайте еще задачу. Учитель роздал 3 листа бумаги поровну 4 ученикам. Сколько бумаги получил каждый ученик? Похожа ли эта задача на прежнюю? Да, похожа: только здесь раздается не 20 листов, а 3 листа. Чтобы решить прежнюю задачу, надо было 20 разделить на 4 равные части. Что же надо сделать, чтобы решить эту задачу?

— Надо 3 разделить на 4 равные части.

Учитель записывает $3:4=$

— Вот 3 листа бумаги. Как разделить их поровну четырем ученикам?

— Разрезать (разделить) один лист на 4 равные части и дать каждому по четверти листа. (Выполняется.) Потом то же сделать с другим листом (выполняется) и с третьим (выполняется).

— По сколько бумаги получил каждый ученик?

— По $\frac{3}{4}$ листа.

А что (какое действие) надо было сделать, чтобы решить эту задачу?

— Надо было 3 разделить на 4 равные части.

— 3 разделить на 4 равные части — сколько же будет?

— 3 разделить на 4 равные части — будет $\frac{3}{4}$.

Учитель пишет $3:4=\frac{3}{4}$.

Затем рассматриваем деление дробей, когда оно может быть выполнено разделением числителя. Например, $\frac{4}{5}:2=\frac{2}{5}$. Потом к дроби присоединяется целое число, делящееся без остатка на данный делитель. Например, $18\frac{9}{10}:3=6\frac{3}{10}$.

После этого, напомнив детям раздробление целого и целого с дробью в назначенные доли, мы приводим такие случаи деления целого с дробью, когда все целое или остаток от разделения его на делитель раздробляются в имеющиеся при целом доли.

Примеры: 1) $4\frac{3}{8}:7=\frac{35}{8}:7=\frac{5}{8}$; 2) $39\frac{1}{5}:4$; деля 39 на 4, имеем 9 в частном и 3 в остатке; раздробляя остаток в пятые доли и прибавляя $\frac{1}{5}$, получим $\frac{16}{5}$; по разделении на 4 будет $\frac{4}{5}$, а всего $9\frac{4}{5}$. Запись может быть такова: $39\frac{1}{5}:4=36\frac{16}{5}:4=9\frac{4}{5}$.

Далее следует деление дробей, выполняемое умножением знаменателя (раздроблением долей).

— Мать разделила $\frac{1}{2}$ пирога между двумя сыновьями поровну. Какую часть пирога получил каждый сын? Что надо сделать, чтобы узнать это?

— Надо $\frac{1}{2}$ разделить на 2 равные части, пополам.

— Положите $\frac{1}{2}$ на дробных счетах: положите ее на той проволоке, где можно было бы разделить ее пополам. На какой это проволоке? Разделите. Что получилось? (Запись $\frac{1}{2}:2=\frac{2}{4}:2=\frac{1}{4}$).

Вместо дробных счетов может служить чертеж.

— В два дня расходуется $\frac{3}{4}$ кг сахара, поровну. Сколько расходуется каждый день? Что надо сделать, чтобы узнать это? Как разделите вы $\frac{3}{4}$ пополам?

— $\frac{1}{4}$ разделить пополам — будет $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$ разделить пополам получится $\frac{3}{8}$ (запись: $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{8}$).

При делении целого с дробью ученики будут делить порознь целое и дробь. Сначала должен быть рассмотрен такой случай, когда целое делится без остатка ($6\frac{1}{2}:2=3\frac{1}{4}$; $12\frac{3}{4}:2=6\frac{3}{8}$). Затем тот случай, когда от деления целого числа получается остаток; здесь, кроме деления, приходится делать и сложение дробей: $9\frac{1}{2}:4=2\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=2\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=2\frac{3}{8}$.

2. Отыскание целого по части. Это есть не что иное, как деление на дробь, в смысле деления на части: найти число, $\frac{3}{4}$

которого составляет 12, это все равно, что разделить 12 на $\frac{3}{4}$.

Но в элементарном курсе дробей не должно отыскивание целого по части называть делением, и, следовательно, в относящихся сюда записях не надо употреблять знака деления.

— $\frac{3}{4}$ метра шерстяной материи стоят 6 руб. Сколько стоит метр?

При решении таких задач ученики должны рассуждать: $\frac{3}{4}$ м стоят 6 руб. $\frac{1}{4}$ м стоит в 3 раза меньше (потому что $\frac{1}{4}$ втрое меньше, чем $\frac{3}{4}$); чтобы узнать, сколько стоит $\frac{1}{4}$ м, надо 6 разделить на 3, будет 2; $\frac{1}{4}$ м стоит 2 руб., а (целый) метр стоит в 4 раза дороже (потому что в метре — в единице — 4 четверти).

Запись решения подобных задач может быть такая:

$\frac{3}{4}$ м — 6 руб. (это запись условия задачи).

1) $6:3=2$; $\frac{1}{4}$ м — 2 руб.

2) $2 \times 4 = 8$; 1 м — 8 руб.

Приведем еще решение задачи, относящейся к делению на целое с дробью.

— Хозяйка купила $7\frac{5}{8}$ кг капусты и заплатила за нее 1 р. 22 к. Что стоит кило капусты?

Прежде всего узнаем, сколько восьмых в $7\frac{5}{8}$ (раздробляем $7\frac{5}{8}$ в восьмые доли): $7\frac{5}{8} = \frac{61}{8}$. Далее задача решается попрежнему.

$7\frac{5}{8}$ кг — 1 р. 22 к. 2) $122:61=2$; $\frac{1}{8}$ кг — 2 к.

1) $\frac{61}{8}$ кг — 1 р. 22 к. 3) $2 \times 8 = 16$; 1 кг — 16 к.

Записи, подобные указанным, ученики могут делать и при решении примеров во время самостоятельных занятий:

$\frac{3}{4}$ от ? = 252

1) $252:3=84$

2) $84 \times 4 = 336$.

§ 55. Составные именованные числа.

Простые именованные числа проходят через весь курс арифметики, постоянно встречаясь в задачах, решая которые дети попутно знакомятся с различными мерами и их единичными от-

ношениями. Затем в пределах двух десятков, сотни и тысячи неоднократно имели место и составные именованные числа, причем дети ознакомлены были с раздроблением, превращением, сложением и вычитанием таких чисел.

Здесь надо составить таблицы мер, приведя в порядок, в систему, знакомые детям меры и дополнив их такими мерами, которых ученики еще не знают. Далее следует повторить раздробление и превращение, сложение и вычитание и показать, как производятся умножение и деление составных именованных чисел.

Простое и составное именованное число. Именованным числом называют иногда вообще число, имеющее при себе название единиц, из которых оно состоит: и 5 карандашей и 5 метров — будут именованные числа. Однако, такие числа, как „5 карандашей“ и „5 метров“, отличаются одно от другого постольку, поскольку простой счет отличается от измерения величин. Поэтому число, происходящее от счета, называют иногда *предметным*, присваивая термин „именованное число“ числу, полученному от измерения сплошных величин. Но в курсе начальной арифметики можно не делать такого различия, называя именованным вообще число, имеющее при себе название единиц, и разделяя, таким образом, числа на именованные и неименованные. Для последних можно ввести и термин „отвлеченное число“: если мы станем считать, не обращая внимание на то, какие предметы считаем (один, два, три, четыре и т. д.), то получим число, например, восемь, единицы которого названия не имеют; это — отвлеченное число, так как здесь мы не обращаем внимания, отвлекаем внимание, отвлекаемся от того, какие предметы считаем. Когда эти термины будут известны ученикам, следует, время от времени, указывать детям на то, что в действиях над именованными числами являются отвлеченными множитель, делитель при делении на части и частное в делении по содержанию.

— Что надо сделать, чтобы узнать, сколько книг находится в шкапу?

— Надо сосчитать.

— Я считал и насчитал 45 книг (пишет на классной доске: 45 книг).

А что сделали мы для того, чтобы узнать длину классной комнаты?

— Мы измерили длину.

— Длина нашей комнаты 10 метров (пишет: 10 м). 45 книг, 10 метров — это числа. Первое из этих чисел получилось от счета; а второе?

— Второе получилось от измерения.

— Когда мы считаем предметы, то каждый предмет служит единицей; когда мы измеряем, например, длину метров, то мера — метр — есть также единица. Обозначено ли в первом числе, какие предметы сосчитаны? Обозначено ли при втором числе, какой единицей сделано измерение? Слушайте, дети: такие числа, при которых поставлено название — имя — единиц, называются *именованными* числами. Придумайте несколько именованных чисел, которые получаются от измерения.

— Теперь я буду считать так: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь. А вы считайте восемь. (пишет: 8). Показано ли здесь какие

будет число неименованное. Это называют числом *отвлеченным*, потому что здесь мы не обращаем внимания на то, что считаем; не обращать внимания — иначе можно сказать: отвлечь внимание, отвлечься.

— Стали измерять метром высоту окна; метр отложился ровно 2 раза. Чему равна высота окна? (Записывает: 2 м.) Потом стали измерять ширину окна; метр отложился один раз, но с остатком. Чем можно измерить этот остаток? — Сантиметром. — Сантиметр отложился в остатке 6 раз. Чему равна ширина окна? (Записывает: 1 м 6 см.) — У нас здесь два именованных числа: одно (2 м) показывает высоту окна, другое (1 м 6 см) — ширину окна. Какую разницу замечаете вы между этими числами? — В первом числе метры, во втором и метры и сантиметры. — Слушайте, дети: именованное число, в котором есть только одни меры, меры одного только наименования, называется *простым* именованным числом; а такое именованное число, в котором есть меры нескольких наименований, называется *составным* именованным числом. 5 км, 15 кг, 9 руб. — какие это числа? 6 кг 20 г, 15 руб. 75 коп., 7 час. 8 мин. — это какие числа? Придумайте сами несколько простых именованных чисел, составных.

Примечание. Считаем нелишним обратить внимание на то, чтобы при письме составных именованных чисел ученики держались определенного сокращения наименований. При этом надо иметь в виду, что слово не принято обрывать на гласной, так что название „час“ не следует писать сокращенно двумя буквами „ча“; затем, если названия двух мер начинаются одинаковыми буквами, то надо ввести в сокращенную запись такие буквы, по которым можно было бы отличить одно слово от другого; с внешней стороны красивее, когда в одном и том же составном именованном числе все наименования обозначены одним и тем же числом букв.

Раздробление и превращение. Здесь надо напомнить детям, какое преобразование именованных чисел называется раздроблением и, превращением, и показать, как следует располагать относящиеся сюда вычисления.

— Длину комнаты измерили метром, метр отложился 7 раз. Какова длина комнаты? Если теперь мы хотим узнать, сколько дециметров содержит длина комнаты, надо ли еще делать измерение, измерять дециметром, или же это можно вычислить? Как это вычислить?

— Надо 10 умножить на 7: в одном метре 10 дм, в 7 метрах — в 7 раз больше; будет 70 дециметров.

— Метр и дециметр: которая из этих мер более крупная и которая более мелкая? Когда мы узнаем, сколько мелких мер выйдет из мер крупных, мы делаем раздробление крупных мер в мелкие. Мы узнали, сколько дециметров в 7 метрах. Мы раздробили 7 метров в дециметры.

Приведенное выше рассуждение требует умножения единичного отношения на данное число мер; для раздробления 7 метров в дециметры надо 10 умножить на 7: в одном метре 10 дм, а в 7 метрах — 7 раз по 10 дм, в 7 раз больше. Но при письменном вычислении бывает удобнее делать множителем единичное отношение. Ввиду этого следует объяснить детям (хотя они и знают, что от перестановки множимого и множителя произведение не изменяется), что для раздробления 7 метров в дециметры можно и 7 умножить на 10: метр отложился по длине комнаты 7 раз; дециметр в 10 раз меньше метра; значит, он отложится

в 10 раз большее число раз — надо 7 умножить на 10. Обычно такое раздробление производится устно.

Учитель должен приучить детей к тому, чтобы при всех вычислениях они устно производили те расчеты, которые могут сделать устно.

— Колесо тачки, делая один оборот, подвигается на 1 метр. Сколько километров пройдет тачка, когда колесо ее обернется 3000 раз?

— Когда колесо обернется 3000 раз, тачка пройдет 3000 метров. Узнаем, сколько это будет километров: 1000 метров составляют 1 километр, а 3000 метров составят столько километров, сколько раз 1000 содержится в 3000 (во сколько раз 3000 больше 1000); 3000 разделить на 1000, получится 3, тачка пройдет 3 км.

— Узнать, сколько километров выйдет из 3000 метров, значит превратить 3000 метров в километры. Когда нам даны меры более крупные, а мы узнаем, сколько выйдет мер более мелких, то мы делаем раздробление. А когда мы делаем превращение?

— Мы делаем превращение, когда нам даны меры более мелкие, и мы узнаем, сколько выйдет мер более крупных.

Приведенным выше рассуждением превращение выполняется посредством деления по содержанию. Но можно рассматривать относящееся сюда деление и как деление на части: в пройденном пути метр откладывается 3000 раз; километр отложится в 1000 раз меньше; надо 3000 уменьшить в 1000 раз, т. е. разделить на 1000 равных частей.

Сложение. Повторение сложения именованных чисел начинаем мы сложением простых именованных, дающих в сумме: а) простое именованное число того же наименования ($12 \text{ кг} + 15 \text{ кг} = 27 \text{ кг}$; сумму превратить нельзя); б) простое именованное число высшего наименования ($14 \text{ час.} + 10 \text{ час.} + 24 \text{ час.} = 48 \text{ час.} = 2 \text{ суток}$; сумма превращается без остатка); в) составное именованное число ($4 \text{ ц} + 7 \text{ ц} = 11 \text{ ц} = 1 \text{ т } 1 \text{ ц}$). Затем рассматриваем прибавление простого именованного числа к составному ($27 \text{ кг } 200 \text{ г} + 5 \text{ кг}$) и отсюда переходим к сложению составных чисел ($4 \text{ час. } 15 \text{ мин.} + 3 \text{ час. } 12 \text{ мин.}$).

Прием сложения составных именованных чисел и относящаяся сюда запись — подписывание слагаемых так, чтобы меры одного наименования были расположены в одном столбце — уже известны ученикам: они делали такие сложения еще в пределе тысячи. Здесь надо только указать детям, что при письменном вычислении удобнее начинать действие с мер низшего наименования.

Взяв такой пример, в котором сложение совершается с превращением, учитель предлагает детям выполнить действие, начиная с мер высшего наименования. Потом дети делают сложение тех же чисел, начиная с мер низшего наименования. Сравнивая оба приема, ученики увидят, что удобнее начинать сложение с мер низшего наименования, так как в первом случае (т. е. при сложении с высших мер) приходится записанные уже числа заменять другими, стирая или зачеркивая их. При сложении с низших мер этого не будет, если только сложение и превращение в каждом отдельном столбце мы сделаем устно; а это в большинстве случаев возможно; тогда мы записываем под чертой число мер, оставшихся после превращения; число выделенных мер высшего

наименования держим в уме или пишем над столбцом высших мер:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \text{ сут.} \quad 1 \text{ час.} \\
 + \begin{array}{r}
 5 \text{ " } \quad 4 \text{ " } \quad 11 \text{ мин.} \\
 4 \text{ " } \quad 19 \text{ " } \quad 55 \text{ " }
 \end{array} \\
 \hline
 10 \text{ сут.} \quad 0 \text{ час.} \quad 6 \text{ мин.}
 \end{array}
 \end{array}$$

Примечание. Когда в одних слагаемых отсутствуют меры, имеющиеся в других слагаемых, на месте отсутствующих мер удобно ставить нули. Например:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \text{ м} \quad 17 \text{ дм} \quad 0 \text{ см} \\
 + \begin{array}{r}
 0 \text{ " } \quad 18 \text{ " } \quad 3 \text{ " } \\
 1 \text{ " } \quad 12 \text{ " } \quad 0 \text{ " }
 \end{array} \\
 \hline
 7 \text{ м} \quad 7 \text{ дм} \quad 3 \text{ см}
 \end{array}
 \end{array}$$

Вычитание. Повторение вычитания именованных чисел мы начинаем вычитанием чисел простых именованных, когда а) данные числа одного наименования ($432 \text{ км} - 158 \text{ км} = 274 \text{ км}$), и б) данные числа разного наименования ($4 \text{ ц} - 21 \text{ кг} = 3 \text{ ц } 79 \text{ кг}$; здесь 1 мера высшего наименования — 1 ц — раздробляется в меры низшего наименования, в кг). Затем переходим к вычитанию составных именованных чисел. Прием такого вычитания и относящиеся сюда записи детям уже знакомы.

Примечание. Когда бывает нужно занимать меру высшего наименования, полезно приучить детей сначала вычитать из раздробленной меры, а потом придавать к полученному остатку имеющиеся в уменьшаемом меры того же названия. Так, в приведенном примере, раздробляя 1 час в минуты, вычитаем

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \text{ сут.} \quad 15 \text{ час.} \quad 34 \text{ мин.} \\
 - \begin{array}{r}
 1 \text{ " } \quad 22 \text{ " } \quad 56 \text{ " } \\
 1 \text{ сут.} \quad 16 \text{ час.} \quad 38 \text{ мин.}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

56 из 60; раздробляя 1 сут. в часы, вычитаем 22 из 24.

Умножение. Мы начинаем это действие умножением простых именованных чисел, рассматривая здесь три случая: а) когда произведения нельзя превратить ($112 \text{ км} \times 4 = 448 \text{ км}$); б) когда произведение превращается без остатка ($85 \text{ коп.} \times 20 = 1700 \text{ коп.} = 17 \text{ руб.}$); в) когда в произведении получается составное именованное число ($157 \text{ м} \times 9 = 1413 \text{ м} = 1 \text{ км } 413 \text{ м}$).

Затем переходим к умножению составных именованных чисел.

— Мастер сделал 3 кастрюли; на каждую пошло меди 4 кг 9 г. Сколько меди пошло на все кастрюли? Как это узнать? Как станете умножать? — Сначала умножим кг, потом г (сначала г, потом кг). — Умножайте. Записывает: $4 \text{ кг } 9 \text{ г} \times 3 = 12 \text{ кг } 27 \text{ г}$. Как можно записать это иначе? Является другая запись:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 4 \text{ кг } 9 \text{ г} \\
 \times \quad 3 \\
 \hline
 12 \text{ кг } 27 \text{ г}
 \end{array}
 \end{array}$$

Потом на подходящем примере (пример умножения, которое совершается с превращением) выясняется, подобно тому как это сделано для сложения, что удобнее начинать умножение с мер низшего наименования.

В тех случаях, когда для детей трудно сделать устно умножение и превращение мер каждого отдельного наименования, вычисления эти мо-

ответствующем месте, пишется число мер, оставшихся после превращения.

Примечание. При решении задач, дающих к тому повод, учитель обращает внимание детей на то, что при умножении именованных чисел множитель есть всегда число отвлеченное.

Задача. Поезд железной дороги проходит в минуту 466 м. Сколько пройдет он в 4 час. 15 мин.? Отнюдь не допуская выражения „466 м умножить на 4 час. 15 мин.“, учитель разъясняет, что для решения этой задачи надо 4 час. 15 мин. раздробить в минуты и затем именованное число 466 м умножить на отвлеченное число 255 (повторить 255 раз).

Деление. А. Деление на части, или деление на отвлеченное число. Это деление мы начинаем делением простых именованных чисел, рассматривая здесь три случая: а) когда частное простое именованное число одного наименования с делимым ($336 \text{ кг} : 24 = 14 \text{ кг}$); б) когда частное простое именованное число низшего наименования ($7 \text{ кг} : 8 = 7 \text{ 000 г} : 8 = 875 \text{ г}$); в) когда частное составное именованное число ($21 \text{ кг} : 15 = 1 \text{ кг } 400 \text{ г}$; остаток 6 кг от деления 21 кг раздробляется в граммы).

Далее следует деление составных именованных чисел. Сначала можно привести такой случай, когда число мер каждого наименования делится нацело на делитель. А потом взять такой пример, в котором меры высших наименований дают остатки.

— Для школы куплена бумага двух сортов: одного сорта куплено 6 кг 600 г, а другого, лучшего, вдвое меньше. Сколько куплено бумаги лучшего сорта? Как это узнать? Как станете делить? — Сначала разделим 6 кг, потом 600 г.

— Хозяйка истратила 9 кг 330 г масла поровну в 6 месяцев. По сколько масла тратила она каждый месяц? Как это узнать? Делите. — 9 кг разделить на 6, получится 1 кг и в остатке 3 кг. Что сделаете вы с этим остатком? — Раздробим его в граммы, будет 3000 г. — Сколько граммов есть еще в делимом? Сколько будет всего граммов? Как это узнать? — К 3000 г прибавить 330 г. — Что станете теперь делить? Делите. И т. д. По мере выполнения действия является запись:

$$\begin{array}{r} 9 \text{ кг } 330 \text{ г} \quad | \quad 6 \\ \underline{3 \text{ кг}} \qquad \qquad \quad 1 \text{ кг } 555 \text{ г} \\ 3330 \text{ г} \\ \underline{33} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

Б. Деление по содержанию, или деление на именованное число. Начинаем с деления простых именованных чисел, рассматривая два случая.

Данные числа одного наименования.

— От Москвы до Иркутска 4984 км. Во сколько суток можно доехать от Москвы до Иркутска по железной дороге, проезжая в сутки по 623 км? Как это узнать? Почему надо 4984 км разделить на 623 км? Доехать можно во столько суток, сколько раз 623 км содержится в 4984 км. — Какое число делимое? Делитель? А частное — именованное число? — Нет, частное — отвлеченное число. — Верно: частное показывает, что 623 км содержится в 4984 км 8 раз, и это число 8 есть число отвлеченное.

Примечание. Со стороны детей возможно недоразумение такого рода: они будут считать полученное частное именованным, потому что в задаче оно означает 8 суток. Для устранения этого недоразумения учитель подробнее остановится на том, что частное, получаемое от деления именованного числа на именованное, показывает, сколько раз делитель содержится в делимом, и само по себе не имеет никакого наименования, вследствие чего в разных задачах может означать разное. Возьмем задачи. Засыпано 28 ц ржи в закрома по 4 ц в каждый. Сколько было таких закромов? — В магазине было 28 ц муки; каждый день продавали по 4 ц. Во сколько дней продали всю муку? — Магазин продал 28 ц муки несколькими столовым, по 4 ц каждой. Скольким столовым продал он муку? Для решения всех этих задач надо 28 ц разделить на 4 ц. Частное 7 означает и число закромов, и число дней, и число столовых; само же по себе оно показывает только, что 4 ц содержится 7 раз в 28, и никакого наименования не имеет.

Данные числа разного наименования.

— Из 5 кг никеля мастер сделал ложки, употребив на каждую по 150 г никеля. Сколько ложек сделал мастер? Как это узнать? — Надо узнать, сколько раз 150 г содержится в 5 кг. — Да, т. е. надо 5 кг разделить на 150 г. Как станете делить? — Мы раздробим 5 кг в граммы.

Затем переходим к делению составных именованных чисел, проходя его в такой последовательности: а) деление составного именованного числа на простое именованное, например, 15 кг 4000 г : 50 г; б) деление простого именованного числа на составное именованное, например, 81 кг : 4 кг 200 г; в) деление составного именованного числа на составное именованное, например, 7 сут. 12 час. 54 мин. : 3 час. 30 мин.

Дети легко понимают, что для всех таких делений должно делимое и делитель раздробить в меры одного и того же наименования. Относящиеся сюда записи могут быть расположены так:

$$\begin{array}{r}
 7 \text{ сут. } 12 \text{ час. } 54 \text{ мин.} : 3 \text{ час. } 21 \text{ мин.} = \\
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 24 \\
 + \quad 168 \\
 \hline
 12 \\
 + \quad 180 \\
 \hline
 60 \\
 + \quad 10800 \\
 \hline
 54
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10854 \quad | 201 \\
 1005 \quad | 54 \\
 \hline
 804 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 3 \\
 \hline
 180 \\
 + \quad 21 \\
 \hline
 201
 \end{array}$$

В большинстве случаев многие вычисления по раздроблению выполняются устно, и запись можно значительно сократить. Иногда же все раздробление производится в уме, и записываются только результаты раздробления.

Пройдя оба вида деления именованных чисел (на части и по содержанию), полезно сопоставить их на подходящих задачах. — Из 1 стопы 2 дестей 12 листов¹ бумаги сделано 18 одинаковых тетрадей. Сколько бумаги пошло на каждую тетрадь? (Задача решается.) — Из 1 стопы 2 дестей 12 листов бумаги сделаны тетради, в 1 десть 6 листов каждая. Сколько сделано тетрадей? (Задача решается.) Каким действием решили мы первую задачу? Вторую? Какое число делили в первой задаче? Во второй? На какое число делили в первой задаче? — На отвлеченное, делили на равные части. — Какое число получили в частном? На какое число делили во второй задаче? — На именованное: узнавали, сколько раз одно именованное число содержится в другом. — Какое число получили в частном? На какие же числа можно делить именованное число? — Именованное число можно делить на отвлеченное, или на равные части; именованное число можно делить на именованное, или узнавать, сколько раз одно именованное число содержится в другом. Ученики должны ясно понимать различие между обоими видами деления.

§ 56. О решении задач.

Задачи на числа любой величины, числа предметные, простые и составные именованные, как и прежде, должны быть преимущественно задачи чисто арифметические, а преобладающий прием решения — синтез. (См. главу II, § 11 настоящего руководства.)

Скажем несколько слов о расположении записей при решении задач.

Раньше, в пределах сотни и даже тысячи, когда все действия ученики выполняли устно, решение задачи записывалось строчками. Здесь многие вычисления производятся письменно, а потому и располагаются так, как принято при письменном выполнении действий.

Следует обратить внимание на то, чтобы все относящиеся к решению задач вычисления ученики записывали в должном порядке и возможно аккуратнее. Успешность решения задач, конечно, зависит, главным образом от умения раскрывать зависимость между величинами данными и искомым, зависимость, приводящую к ответу на вопрос задачи. Но большое значение имеет тут и навык в возможно быстром и вполне правильном вычислении. А развитию этого навыка может содействовать тщательное и возможно красивое выполнение и расположение записей тех вычислений, которые делаются для решения задач.

Приводим пример.

Задача. В швейной мастерской было два куска полотна: один в 33 м 50 см, другой в 31 м 78 см; из половины всего этого по-

¹ В задаче дается единичное отношение мер бумаги, которое было принято в дореволюционной школе. *Ред.*

лотна сшито 16 рубях, а из другой половины наволочки; на наволочку шло полотна на 68 см меньше, чем на рубяху. Сколько наволочек сшили в мастерской?

Если задача взята из сборника, который имеется у детей на руках, то текст задачи писать, конечно, не надо. Равным образом можно обойтись и без записи числовых данных, так как на рассматриваемой ступени обучения ученики уже вполне свободно владеют книгой в смысле чтения. Достаточно ограничиться выпиской номера, под которым помещена задача в сборнике.

Отдельные действия, производимые для решения задачи, должны быть занумерованы; окончательный ответ следует подчеркнуть. Решение приведенной задачи может быть записано так:

$$\begin{array}{r}
 1) \quad \begin{array}{r} 33 \text{ м } 50 \text{ см} \\ + 31 \text{ " } 78 \text{ " } \\ \hline 65 \text{ м } 28 \text{ см} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \quad \begin{array}{r} 65 \text{ м } 28 \text{ см} \\ \hline 5 \\ \hline 128 \text{ см} \\ \hline 8 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3) \quad \begin{array}{r} 32 \text{ м } 64 \text{ см} \\ \hline 64 \text{ см} \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4) \quad \begin{array}{r} 2 \text{ м } 04 \text{ см} \\ \hline 68 \text{ " } \\ \hline 1 \text{ м } 36 \text{ см} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5) \quad \begin{array}{r} 32 \text{ м } 64 \text{ см} : 1 \text{ м } 36 \text{ см} = \\ \hline 3264 \text{ см} \\ - 272 \\ \hline 544 \\ - 544 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

0 Ответ: 24 наволочки.

Надо требовать от учеников, чтобы наиболее простые вычисления они выполняли в уме; тогда, минуя промежуточные записи, дети прямо пишут окончательный результат (в приведенном примере это может быть сделано для 2-го и 3-го вычислений).

От времени до времени как на уроках с учителем, так и на самостоятельных занятиях ученики записывают вопросы тех простых задач, на которые разлагается задача сложная.

Сначала задача решается так, как показано; потом решение переписывается с вопросами, составленными возможно кратко и складно. Произведенные уже вычисления можно при этом переписать строчками, показывающими, каким действием решается каждый вопрос.

1) Сколько полотна было в обоих кусках вместе?

$$33 \text{ м } 50 \text{ см} + 31 \text{ м } 78 \text{ см} = 65 \text{ м } 28 \text{ см}.$$

2) Сколько полотна пошло на рубяхи и сколько на наволочки?

$$65 \text{ м } 28 \text{ см} : 2 = 32 \text{ м } 64 \text{ см}.$$

3) Сколько полотна шло на одну рубяху?

$$32 \text{ м } 64 \text{ см} : 16 = 2 \text{ м } 04 \text{ см}.$$

4) Сколько полотна шло на одну наволочку?

$$2 \text{ м } 04 \text{ см} - 68 \text{ см} = 1 \text{ м } 36 \text{ см}.$$

5) Сколько сшито наволочек?

$$32 \text{ м } 64 \text{ см} : 1 \text{ м } 36 \text{ см} = 24; 24 \text{ (наволочки)}.$$

Примечание. При письменном умножении удобнее большее число брать множимым, меньшее — множителем, нежели наоборот; например удобнее 2789 умножить на 6, нежели 6 на 2789. Поэтому можно позволить ученикам (которым уже знакомо свойство переместительности умножения) при письменном выполнении действия умножать большее число на меньшее и тогда, когда это следовало бы наоборот; но при записи вычисления в строку надо требовать от детей, чтобы они ставили на первом месте то число, которое служит множимым по смыслу вопроса.

§ 57. Типические задачи.

Арифметические задачи могут быть весьма разнообразны. Разнообразие задач зависит: 1) от их арифметического содержания, т. е. условий, выражающих зависимость между данными и искомыми и определяющих сочетание тех простых задач, на которые распадается данная сложная задача, и 2) от их вещественного содержания, т. е. от рода тех предметов и величин, о которых идет речь в задаче.

И в теоретическом и в практическом отношении весьма важным является вопрос о систематизации задач, т. е. о сведении всего разнообразия задач к сравнительно немногим типическим группам.

Однако, вполне удовлетворительно вопрос этот не решен и до сих пор.

Укажем, какие делались попытки систематизации арифметических задач.

В задачниках, назначенных для средней школы, издавна принята такая группировка: тройное правило, правило процентов и учета векселей, правило товарищества, правило смешения. Эта группировка, охватывающая преимущественно задачи с пропорциональными величинами, имеет в основании вещественное содержание задач, кроме задач первой группы, название которой отмечает лишь внешний признак, указывающий на то, что в этих задачах даются три числа (простое тройное правило; более подробное заглавие могло бы быть таково: правило отыскания четвертого пропорционального к трем данным числам).

Недостаток систематизации, основанной на вещественном содержании задач, заключается в том, что в одну и ту же группу могут быть соединены задачи, разнородные по построению и представляющие различный ход решения.

Отметим попытку группировки задач по их арифметическому содержанию. Мы разумеем здесь появившуюся в 1885 г. книгу: *Канашевич*, Опыт систематизации арифметических задач. Автор имеет в виду лишь задачи более или менее трудные, в которых

водить к отысканию двух неизвестных, для определения которых должны быть даны между ними две зависимости, выраженные отдельными арифметическими действиями. Комбинируя попарно четыре действия, автор сводит задачи к следующим шести группам, или отделам:

I отдел. Задачи, в которых даются сумма искоемых чисел и их частное.

II отдел: даются разность и частное.

III отдел—сумма и разность.

IV отдел—сумма и произведение.

V отдел—разность и произведение.

VI отдел—произведение и частное¹.

Представляя известный интерес в теоретическом отношении, систематизация эта нуждается в дополнительной характеристике задач, без которой отнести каждую встретившуюся задачу к одной из указанных групп является делом довольно трудным. Возьмем пример.

Задача. Отец и мать роздали своим детям вместе 1 р. 08 к. Отец каждому дал по 24 коп., а мать по 12 коп. Сколько было детей?

Автор рассматриваемой книги предлагает рассуждать так. „В этой задаче требуется определить число детей; число их найдем, когда будем знать, сколько дал детям каждый из родителей, поэтому количество денег, розданных отцом, и количество денег, розданных матерью, примем за искомые задачи; оба вместе дали 1 р. 08 к., и отец дал денег вдвое более, нежели мать. Таким образом, задача приведена к I отделу: найти два числа, когда даются их сумма и частное. А решение этой последней задачи, конечно, должно быть ученикам уже известно.

Нам кажется, что учащиеся скорее напали бы на решение этой задачи, если бы признали в ней задачу на пропорциональное деление в том его случае, когда даются сумма и отношение искоемых чисел“.

Далее мы встречаемся с систематизацией задач, основанной не на содержании задач, арифметическом или вещественном, а на способах их решения. Такая систематизация была предложена в брошюре *Александрова* — Методы решений арифметических задач.

Автор этой брошюры насчитывает двенадцать методов решения арифметических задач. Приведем названия некоторых из них, опуская те методы, которые применяются очень редко: 1) Метод приведения к единице. 2) Метод обратного приведения к единице. 3) Метод отношений. 4) Метод остатков. 5) Методы исключения неизвестного с помощью: а) подстановки, б) уравнивания неизвестных. 6) Метод пропорционального деления². 7) Метод подобия. 8) Метод нахождения частей неизвестных. 9) Метод из-

¹ Задачи трех последних отделов относятся собственно к алгебре.

² Нам кажется, что это название скорее выражает арифметическое содержание задачи, а не способ решения.

лишка и недостатка сравнительно с средним требуемым. Ниже мы скажем, в чем состоят эти методы.

Признавая, что изучение методов дает в руки учащихся более надежные ключи к решению задач, нежели группировка задач по их содержанию, мы все-таки думаем, что, имея только эти ключи, учащиеся на практике не легко будут разбираться в том, какой ключ или какие ключи подходят к той или другой встретившейся им задаче.

Указанные опыты систематизации задач имеют в виду не начальную, а среднюю школу (брошюра Александрова прямо назначена для старших классов средних учебных заведений).

Что же касается учебной литературы для начальной школы, то здесь первые попытки группировки задач по типам относятся к девяностым годам прошлого столетия.

Назовем книгу *Комарова*: Методическое решение типических арифметических задач в начальных училищах (3-е издание появилось в 1891 г.).

Арифметические задачи, „представляющие определенный ход решения, требующие знания известных приемов или, по крайней мере, известной методической подготовки“, упомянутый автор разделяет на 34 типа. Среди этих 34 типов мы встречаем несколько издавна установленных групп, которым автор дает лишь более подробные заглавия. Таковы: „задачи, в которых по данному количеству смешиваемых веществ и цене каждого требуется определить цену единицы смеси“ (так называемые задачи на смешение первого рода); „задачи, относящиеся к простому тройному правилу; задачи на пропорциональное деление; задачи, относящиеся к сложному тройному правилу; задачи, в которых по данной цене единиц смешиваемых веществ и самой смеси определяется количество смешиваемых веществ“ (так называемые задачи на смешение второго рода). Остальные типы придуманы автором рассматриваемой книги. Приведем некоторые из этих типов, по которым можно судить и о других. „Задачи, в которых определяются: расстояние, по которому колесо прокатывается, число оборотов его или окружность. Задачи, в которых определяется: расстояние между двумя телами, движущимися навстречу, время встречи их и скорость движения одного из них. Задачи, в которых определяется время наполнения или опустения водоема, если будут открыты все приводы или отводы воды, соединенные с ним. Задачи, в которых при данном последовательном движении двоих требуется определить, когда и где задний догонит переднего“. В приведенных типах мы видим группировку задач по их вещественному содержанию. А вот примеры группировки задач, в основу которой положено арифметическое содержание их. „Задачи на сравнение величин, сперва относимых для этого к одинаковым единицам. (В одном кооперативе каждая пара карандашей стоила 5 коп., а в другом каждая полдюжина таких же карандашей — 14 коп.; где выгоднее купить?) Задачи, в которых по вычитаемым и остаткам требуется определить уменьшаемые. (У мальчика было 60 листов бумаги белой и серой; когда он исписал 15 листов белой и 27 листов серой, то у

него осталось той и другой поровну. Сколько белой бумаги и сколько серой было у мальчика?»“.

Уже самое обилие типов (34) указывает на то, что группировка задач в большинстве случаев сделана на основании внешних, несущественных признаков, каковыми являются вещественное содержание или форма, в которой изложены условия задачи. Если выделять в особый тип задачи о колесах, то типических задач будет чрезвычайно много, и самый вопрос о систематизации задач отпадает: что ни задача — то тип. То же самое будет и в том случае, если мы станем видеть различные типы в таких задачах, которые отличаются друг от друга лишь небольшим изменением в форме условий. Например, в разбираемой книге к двум типам отнесены так называемые задачи на смешение второго рода, различающиеся между собой только тем, что в одной из них дается цена всей смеси, а в другой — цена единицы смеси, каковы задачи: 1) „Продано черного и синего сукна, всего 15 м. за 76 руб.; метр черного сукна стоит 6 руб., а метр синего 4 руб. Сколько черного и сколько синего сукна продано?“ 2) Килограмм ржаной муки стоит 1 р. 20 к., а килограмм пшеничной 3 р. 40 к. Нужно составить 24 кг смеси из ржаной и пшеничной муки, стоимостью в 1 р. 64 к. килограмм. Сколько нужно взять той и другой муки, чтобы составить требуемую смесь?“ Первая из этих задач отнесена к типу, озаглавленному: „Задачи, в которых по общей стоимости различных предметов, общему количеству их и цене каждого определяется количество их“; а вторая задача принадлежит к типу „задач, в которых по данной цене единиц смешиваемых веществ и самой смеси определяется количество смешиваемых веществ“. Или, может быть, здесь принято во внимание вещественное содержание этих задач? И это не единственный пример подведения однородных задач под различные типы.

Обилию типов, кроме вещественного содержания задач и формы их условий, содействует также стремление охватить группировкой возможно большее количество задач. Между тем, несомненно, есть такие задачи, которые не представляют ничего характерного, а потому и не подлежат группировке. Такова, по нашему мнению, приведенная выше задача, определяющая тип задач, в которых по вычитаемым и остаткам требуется найти уменьшаемое.

Предполагая, что содержание типов должен усвоить учитель, а не ученики, для которых важно только решение задач в определенной последовательности, мы все-таки не можем не отметить, что содержание многих типов изложено довольно тяжело и неясно: читая помещенное в конце книги оглавление, иногда затрудняешься определить, какие задачи надо отнести к тому или другому типу, например, что это за задачи, „в которых из сравнения стоимостей единиц предметов и дополнений к ним для образования одинаковых величин определяется число предметов?“ Это становится понятным только тогда, когда будет известен образчик задачи, принадлежащей к этому типу: „Гражданин предлагал за свой долг: или кусок шерсти, по 3 руб. за метр, и день-

за метр, а деньгами 25 руб. Сколько метров шерсти предлагал гражданин и как велик был его долг?

В арифметических задачниках для начальной школы, появившихся у нас за последнее время, число типов несколько сокращено; но сокращение это сделано не путем обобщения или слияния типов, а простым исключением некоторых групп задач.

Задачи группируются и по методам их решения и по содержанию их: вещественному и арифметическому. Так, мы находим здесь типы: „приведение к единице, замена одного другим, приравнивание, предположение“ — типы, заглавия которых указывают на способ решения. Затем имеются такие типы, как „прибыль и убыток, бассейны, встреча, один догоняет другого; обмен предметов; вычеты за прогульные дни и неисполненную работу“ — типы, в основании которых лежит вещественное содержание задач. Наконец, встречаются типы вроде „пропорциональное деление, нахождение частей от целого и целого по данным частям, распределение числа на части при разностном и кратном отношении их“ — типы, выделенные по арифметическому содержанию задач.

Оставляя в стороне логические требования теории и имея в виду только практическую цель систематизации задач — помочь детям разбираться в более или менее характерных задачах, — мы думаем, что предлагаемое в новейших задачниках распределение задач по типам не достигает в должной мере и этой цели. В самом деле, эта цель могла бы быть достигнута лишь в том случае, если бы каждый тип объединял собой достаточно характерные задачи и если бы характер этих задач был ясно выражен заглавием типа. Между тем, к таким типам, как „прибыль и убыток; обмен предметов“, могут быть отнесены задачи, весьма разнообразные по своей конструкции и решаемые различными методами. Равным образом, такие искусственные заглавия, как „сравнение“, „приравнение“, придуманные, очевидно, с целью указания на способ решения, слишком неопределенны, расплывчаты и характеризовать метода не могут¹.

Излагая попытки систематизации задач, указывая их достоинства и недостатки, мы не задавались целью предложить какую-либо новую, более совершенную систему, оговорившись заранее,

¹ В пояснение методов „сравнение“ и „приравнение“ приведем примеры задач, помещенных под такими заглавиями

Задачи на „сравнение“: 1) „За 50 дюжин стульев и 10 диванов назначено 1120 руб., а за 30 дюжин таких же стульев и те же 10 диванов назначено 760 руб. Почему продавали дюжину стульев, и сколько стоил диван?“

Задачи на „приравнение“: 2) „За 90 стульев и 120 табуретов нужно заплатить 1020 руб., а за 180 таких же стульев и 70 табуретов—1360 руб. Что стоит один стул и один табурет?“ 3) „Если будут продавать все имеющиеся в фруктовой палатке апельсины по 3 руб. за штуку, то получат 45 руб. прибыли, а если будут продавать по 5 руб. за штуку, то получат 135 руб. прибыли. Сколько было апельсинов?“

Задача 1-я и 2-я различаются между собою тем, что в задаче 2-й количество диванов оба раза одинаковое, и для решения задачи надо сделать сравнение количества стульев и стоимости; в задаче 2-й в обоих случаях покупается различное количество стульев и различное количество табуретов, и раньше сравнения следует уравнивать, например, количество стульев.

что вопрос о систематизации арифметических задач и до сих пор не решен вполне удовлетворительно.

Мы полагаем прежде всего, что есть такие задачи, которые не имеют определенно выраженного характера и которые поэтому нельзя сводить в группы, не рискуя в каждой задаче видеть отдельный тип.

Что касается задач типических, то по отношению к ним мы приняли издавна установленную группировку, как хорошо известную учителю и довольно легко дающуюся ученикам. Так, мы рассматриваем задачи на тройные правила, проценты, соразмерное (пропорциональное) деление, смешение, задачи на вычисление времени, задачи на квадратные и кубические меры.

Недостаток такой группировки, в основании которой лежит и вещественное и арифметическое содержание задач, будет в значительной мере сглажен, если при прохождении этих задач учитель особенное внимание обратит на выяснение детям способов решения.

Рассмотрим подробнее эти задачи и укажем методы их решения¹.

I тип. Тройные правила.

A. Простое тройное правило.

1. Способ приведения к единице.

Задача. Кусок сатина в 20 м стоит 70 руб. Сколько стоит кусок такого же сатина в 27 м?

Узнаем цену одного метра, для чего делим 70 руб. на 20; затем находим стоимость 27 м, умножив 3 р. 50 к. на 27.

Задача. 24 работника выполняют некоторую работу в 60 дней. Во сколько дней могут исполнить эту работу 45 таких же работников?

Узнаем, во сколько дней мог бы сделать эту работу один работник, для чего умножаем 60 на 24; затем находим время исполнения работы 45 работниками, разделив 1440 на 45.

Первая из этих задач содержит величины прямо пропорциональные: количество товара и стоимость его; вторая — величины обратно пропорциональные: число рабочих и время работы.

2. Способ приведения к общему делителю (к общей мере).

Последующим способом мы переходим от данного к искомому через единицу: от цены 20 м переходим к стоимости 27 м через цену одного метра; от времени выполнения работы 24 рабочими переходим ко времени выполнения той же работы 45 рабочими через время исполнения работы одним рабочим. Иногда этот переход может быть сделан и не через единицу, а некоторое другое число. Пусть, например, требуется найти стоимость 15 м сатина, зная, что 20 м его стоят 70 руб. Числа 20 и 15 имеют общий делитель 5, через который здесь и можно перейти от 20 к 15: узнаем цену 5 м сатина, для чего делим 70 руб. на 4 (так

как 5 м стоят в 4 раза меньше, чем 20 м); затем находим стоимость 15 м, умножив полученное число 17 р. 50 к. на 3 (так как 15 м стоят в 3 раза больше, чем 5 м). Во второй из приведенных задач можно перейти от 24 к 45 через общий делитель этих чисел 3: для исполнения работы 3 работникам надо времени в 8 раз больше, нежели 24, т. е. 480 дней ($60 \times 8 = 480$); 45 рабочим потребуется времени в 15 раз меньше, нежели 3, т. е. 32 дня ($480:15 = 32$).

Должно заметить, что способ приведения к общему делителю для учеников начальной школы слишком труден, почему мы и не считаем нужным указывать его детям.

3. Способ обратного приведения к единице.

Задача. Поезд железной дороги прошел 435 км в 15 часов. Во сколько времени пройдет он 667 км, двигаясь с той же скоростью?

Узнаем путь, проходимый поездом в один час, для чего делим 435 на 15. Затем делением (по содержанию) 667 на 29 находим время прохождения 667 км.

Обращаем внимание на отличие этого способа от способа 1-го, почему рассматриваемый прием и называется обратным приведением к единице: решая задачу 1-м способом, мы должны были бы сделать переход через единицу от 435 к 667: сначала узнать, во сколько времени поезд проходит 1 км; затем найти, во сколько времени пройдет он 667 км. Применительно к задаче с величинами обратно пропорциональными этот способ приводит к такому рассуждению (см. приведенную выше задачу): для того чтобы выполнить работу в один день, надо не 24 человека, а в 60 раз больше, т. е. 1440 человек; если же будут работать только 45 человек, то им потребуется не один день, а во столько раз больше, т. е. столько дней, сколько раз 45 содержится в 1440.

Как видно из приведенных примеров, способ обратного приведения к единице может быть иногда очень удобен при решении задач с прямо пропорциональными величинами. В применении же к задачам с величинами обратно пропорциональными никаких выгод он не представляет.

4. Способ отношений.

Задача. Тень от прямо поставленного кола вышиной в 2 м имеет длину в 3 м, а тень от дерева в то же самое время имеет длину в 18 м. Как высоко дерево?

Узнаем, во сколько раз тень от дерева длиннее, чем тень от кола, узнаем отношение длины одной тени к длине другой тени; для этого делим 18 на 3; так как тень от дерева в 18 раз длиннее тени от кола, то дерево в 18 раз выше кола: находим его высоту, умножив 2 м на 6.

Задача. Колесо, имеющее в окружности 90 см, на некотором расстоянии обернулось 523 раза. Сколько раз обернется на том же расстоянии другое колесо, окружность которого равна 45 см?

Так как окружность второго колеса вдвое меньше, то число оборотов его будет вдвое больше: $523 \times 2 = 1046$.

Первая из приведенных задач содержит величины прямо пропорциональные, вторая — обратно пропорциональные.

Способ отношений называют также *способом пропорционального изменения*.

5. Способ сложения кратных частей.

Он состоит в том, что мы переходим от одного числа к другому, например от 24 к 20, представляя второе число как сумму кратных частей первого: $20 = 12 + 8$, где 12 есть половина 24, а 8 — треть 24.

— Килограмм муки стоит 3 р. 40 к. Сколько стоят 250 г этой муки? 200 г составляют пятую часть и стоят 68 коп. ($340:5 = 68$), 50 г — это двадцатая часть килограмма, они стоят 17 коп. ($340:20 = 17$); следовательно, 250 г муки стоят 85 коп. ($68 + 17 = 85$).

Этот способ, довольно часто употребляемый в житейских расчетах, требует в разных случаях различных комбинаций и дается детям вообще нелегко.

Задачи на простое тройное правило содержат или величины прямо пропорциональные или обратно пропорциональные. В той и другой группе способ приведения к единице подготавливается упражнениями в переходе от единицы к какому-нибудь числу (Почтовый голубь пролетает в минуту 450 м. Сколько километров пролетит он в $1\frac{1}{2}$ часа? — Сделан запас сена для 1 коровы на 72 дня. На сколько дней хватит этого запаса для 3 коров?) и обратно — от какого-нибудь числа к единице (9 кг ржи дают после перемола 7 кг 26 г чистой муки. Сколько чистой муки дает 1 кг ржи? — Сделан запас овса для 4 лошадей на 30 дней. На сколько дней хватило бы этого запаса для одной лошади?). Затем следуют задачи, решаемые способом приведения к единице, способом обратного приведения к единице (только задачи с прямо пропорциональными величинами) и способом отношений.

Б. Сложное тройное правило.

Из задач на сложное тройное правило полагаем достаточным ограничиться лишь задачами, которые решаются приведением к единице (без внесения дробей) и содержат такие числа, которые позволяют сначала привести все данные к единице, а потом уже перейти к другим их значениям.

— Для продовольствия 20 человек в продолжение 30 дней заготовлено 6 ц муки. Сколько муки надо заготовить для продовольствия 40 человек в продолжение 45 дней, если на каждого идет в день по столько же муки?

Узнаем, сколько муки полагается в один день на одного человека. Для этого сначала найдем, сколько муки приходится в один день на 24 человека ($6 \text{ ц} = 600 \text{ кг}$; $600 \text{ кг}:30 = 20 \text{ кг}$), а потом и на одного ($20 \text{ кг}:20 = 1 \text{ кг}$) (или в обратном порядке: сначала определяем, сколько муки идет на одного человека в 30 дней, а потом и в один день). Затем находим, сколько муки потребуется на 40 человек, сначала в один день ($1 \text{ кг} \times 40 = 40 \text{ кг}$),

обратном порядке.

Это решение дается детям легче, нежели изменение данного сначала в зависимости от изменения одной величины, потом другой: сначала узнаем, сколько муки идет на одного человека в 30 дней, затем — на 40 человек тоже в 30 дней; далее находим, сколько муки надо для 40 человек в один день и, наконец, сколько муки потребуется тоже для 40 человек в продолжение 45 дней.

Считаем нелишним познакомить учеников с понятиями „рабочий день“ и „рабочий час“. Введение этих понятий позволяет в некоторых случаях удобно решать задачи на тройное правило и на соразмерное деление.

„Рабочим днем“ называется день работы одного человека. Если, например, некоторую работу исполнили 12 человек в продолжение 5 дней, то вся работа сделана в 60 рабочих дней. При расчете за работу, если она сдана подневно, а не сдельно, высчитывают число рабочих дней. Пусть, например, условленная подневная цена 2 руб.; 2 дня работало по 3 человека, 3 дня по 12 человек и один день (последний) — 10 человек; всех рабочих дней было $6 + 36 + 10 = 52$; 2 руб. $\times 52 = 104$ руб., следует за работу 104 руб. Подобное же значение имеет „рабочий час“.

При помощи этих понятий решим задачи:

— Надо было починить дорогу в 24 дня; для этого следовало ставить на работу по 30 человек ежедневно. Но первые 10 дней работало только по 23 человека. По сколько человек в день следует потом ставить на работу, чтобы окончить ее к сроку?

Решение. Для исполнения работы требуется 720 рабочих дней ($30 \times 24 = 720$); первые 10 дней работало по 23 человека, что составляет 230 рабочих дней; для окончания работы надо еще 490 рабочих дней ($720 - 230 = 490$); а так как до срока остается 14 дней ($24 - 10 = 14$), то теперь ежедневно надо ставить на работу по 35 человек ($490 : 14 = 35$).

— На уборке поля ржи 25 человек работали ежедневно по 12 часов, в 8 дней сжали половину всей ржи. Сколько человек надо прибавить к прежним рабочим для того, чтобы все вместе, работая по 10 часов в день, дожали остальную рожь в 6 дней?

Решение. 25 человек работали 8 дней; это составляет 200 рабочих дней ($25 \times 8 = 200$); в день работали они по 12 часов; следовательно, было употреблено 2400 рабочих часов ($12 \times 200 = 2400$); в 2400 рабочих часов сделана половина работы; остается другая половина, и потребуются еще 2400 рабочих часов; оставшаяся работа должна быть окончена в 6 дней, при занятиях по 10 часов в день; значит, на каждого человека придется по 60 рабочих часов ($10 \times 6 = 60$); работников потребуется столько, сколько раз 60 содержится в 2400, т. е. 40 человек; следовательно, к прежним рабочим надо прибавить 15 человек ($40 - 25 = 15$).

II тип. Соразмерное деление.

А. Даются отношение частей и сумма их.

а) Прежде всего мы приводим здесь задачи, в которых требуется разделить данное число на части так, чтобы одна часть была в несколько раз больше или меньше другой; например, число 28 разделить на две части так, чтобы одна из них была в 3 раза больше другой. Такое деление называют иногда *делением на части, кратно неравные*.

Способы решения.

1. *Способ частей*. Он может быть подготовлен решением задач, вроде следующих:

— Сплав для паяния жести состоит из одной части свинца и двух таких же частей олова. Сколько надо взять свинца и сколько олова, чтобы приготовить 120 г такого сплава?

— Для приготовления пороха смешивают 15 частей селитры, 3 части серы и 2 части угля. Сколько надо селитры, серы и угля для приготовления 80 кг пороха?

Далее даем задачу:

— Лошадь и корова стоят вместе 900 руб., лошадь в два раза дороже коровы. Сколько стоит лошадь и сколько стоит корова?

Спросив учеников, сколько *частей* всех денег отдано за корову и сколько *частей* отдано за лошадь, мы приводим детей к такому решению задачи. За корову отдана 1 часть, за лошадь 2 части; узнаем, сколько всех частей: $1 + 2 = 3$; потом узнаем, сколько денег приходится на одну часть: $900 \text{ руб.} : 3 = 300 \text{ руб.}$; за корову отдано 300 руб.; теперь найдем, сколько денег приходится на две части:

$300 \text{ руб.} \times 2 = 600 \text{ руб.}$, за лошадь заплачено 600 руб.

2. *Способ проверки*. Покажем его на задаче.

— Кадушка с маслом весит 32 кг; пустая кадушка весит в 7 раз меньше, чем находящееся в ней масло. Сколько весит кадушка и сколько весит масло?

Решение. Положим, что пустая кадушка весит 1 кг, тогда масло весит 7 кг. Проверим, так ли это на самом деле. По нашему предположению выходит, что кадушка с маслом весит 8 кг ($1 \text{ кг} + 7 \text{ кг} = 8 \text{ кг}$), а в действительности кадушка с маслом весит 32 кг. Значит, мы ошиблись, и ошиблись — скажем так — во столько раз, во сколько раз 32 кг больше 8 кг, т. е. в 4 раза ($32 \text{ кг} : 8 \text{ кг} = 4$). Следовательно, кадушка весит не 1 кг, как мы предположили, а 4 кг ($1 \text{ кг} \times 4 = 4 \text{ кг}$); масло весит не 7 кг, а 28 кг ($7 \text{ кг} \times 4 = 28 \text{ кг}$).

Этот способ решения, названный нами способом проверки, называют также *способом проверяемого допущения и способом подобия*¹.

3. *Способ замены*. Объясним его на одной из ранее приведенных задач:

¹ Последнее название объясняется тем, что предположенные нами числа (1 и 7) подобны искомым в том смысле, что находятся между собой в таком же отно-

Лошадь и корова стоят вместе 900 руб.; лошадь в два раза дороже коровы. Сколько стоит лошадь и сколько стоит корова?

Решение. Так как лошадь вдвое дороже коровы, то на деньги, отданные за лошадь, можно купить двух коров, а на все 900 руб. можно купить трех коров ($1 + 2 = 3$). Разделив 900 руб. на 3, узнаем цену коровы.

Заметим, что из приведенных трех способов детям легче всего дается первый, названный нами способом частей.

Деление числа на части кратно неравные представляет собой такой случай пропорционального деления, когда отношения между искомыми, будучи целыми числами, прямо даются условиями задачи, говорящими, что одно число должно быть во столько-то раз больше или меньше другого.

б) Теперь мы переходим к таким задачам на соразмерное деление, в которых отношения между искомыми указаны косвенно, когда, например, требуется разделить заработную плату соразмерно времени работы.

Задачи эти родственны задачам на тройное правило и могут быть решаемы теми же способами, какие приведены нами для задач I типа. В самом деле, задача на соразмерное деление легко переходит в задачу на тройное правило. Поясним это примером.

— С трех полей, при одинаковом урожае, собрано 750 ц ржи; в одном поле 12 га, в другом 15 и в третьем 23 га. Сколько ржи собрано с каждого поля?

Способ приведения к единице. Узнаем, сколько ржи собрано с одного гектара, для этого определяем число гектаров во всех полях вместе и общее количество собранной ржи делим на это число гектаров.

— Две столовых купили 75 л молока по одинаковой цене за литр. Сколько литров придется каждой столовой, если одна заплатила за молоко 80 руб., а другая 70 руб.?

Способ обратного приведения к единице. Определив стоимость всей покупки ($80 \text{ руб.} + 70 \text{ руб.} = 150 \text{ руб.}$), узнаем цену одного литра ($150 \text{ руб.} : 75 = 2 \text{ руб.}$). Затем находим, сколько литров можно купить на те деньги, которые заплатила каждая из столовых ($80 \text{ руб.} : 2 \text{ руб.} = 40$; 40 л; $70 \text{ руб.} : 2 \text{ руб.} = 35$; 35 л).

К иным задачам одинаково удобно может быть применен тот и другой способ приведения к единице.

В решение тех задач, в которых общую заработную плату требуется разделить соразмерно и числу рабочих и времени работы, полезно ввести понятие о рабочем дне.

— Трем артелям каменщиков выдано за работу 8900 руб.; в одной артели было 16 человек, в другой 18 и в третьей 20 человек; первая артель работала 15 дней, вторая 25 и третья 10 дней. Сколько придется получить каждой артели?

Решение. Первой артели придется получить за 240 рабочих дней ($15 \times 16 = 240$), второй за 450 ($25 \times 18 = 450$) и третьей за 200 ($10 \times 20 = 200$) рабочих дней.

в) Далее мы рассматриваем такие задачи, которые по содержанию сходны с предшествующими задачами на соразмерное деление, а по способу решения могли бы быть отнесены к делению на части, кратное не равные. Однако, вследствие особой постановки вопросов, задачи эти удобнее решаются иным способом.

Сравним задачи.

— Два землекопа заработали вместе 108 руб.; один из них работал 4 дня, другой 5 дней. Сколько из этих денег должен получить каждый, если недельная плата тому и другому одинакова?

Это — задача на соразмерное деление: требуется 108 руб. разделить соразмерно времени работы.

— Два работника заработали вместе 220 руб., один из них получал в день по 10 руб., другой по 12 руб. Сколько придется получить каждому, если они работали одинаковое время?

Это — также задача на соразмерное деление: требуется 220 руб. разделить соразмерно поденной плате.

Но задача эта не может быть решена способом приведения к единице, каким решается первая задача. Здесь можно применить способ частей. Отложим на заработок первого 10 частей, тогда на заработок второго надо отложить 12 частей; узнаем, сколько всех частей: $10 + 12 = 22$; определяем, сколько денег приходится на каждую часть: $220 \text{ руб.} : 22 = 10 \text{ руб.}$, затем найдем, сколько получил тот и другой работник: $10 \text{ руб.} \times 10 = 100 \text{ руб.}$; $10 \text{ руб.} \times 12 = 120 \text{ руб.}$

Но обыкновенно подобные задачи ставят вопрос: по сколько дней работал каждый работник? При чем иногда этим вопросом и ограничиваются, а иногда ставят и дальнейший вопрос о сумме денег, заработной каждым работником, тогда для решения задачи удобнее изменить ход рассуждения: если бы каждый работник работал по одному дню, то вместе они заработали бы 22 руб. ($10 \text{ руб.} + 12 \text{ руб.} = 22 \text{ руб.}$); работали они по столько дней, сколько раз 22 руб. содержится в 220 руб., т. е. по 10 дней ($220 \text{ руб.} : 22 \text{ руб.} = 10$; 10 дней).

К задачам рассматриваемой группы принадлежат так называемые „задачи о встрече“. При выводе способа решения этих задач для наглядности удобно воспользоваться чертежом. Сначала задача может быть решена непосредственно на чертеже; это может служить подготовкой к выводу приема ее решения.

— От деревни до города 30 км; один крестьянин вышел из деревни в город, а другой крестьянин в это самое время выехал из города в деревню по той же дороге; первый крестьянин проходил в час по 3 км, а второй крестьянин проезжал в час по 7 км. Через сколько часов они встретятся и на каком расстоянии от деревни и города?

Чертим прямую линию, изображающую дорогу; откладываем на ней 30 равных частей, означающих километры, концы этой линии принимаем за пункты отправления (деревня и город). Отмечаем, где один и другой крестьянин будут через час, через два часа, через 3 часа. Затем выясняем, какими действиями решается задача. Изобразив попрежнему дорогу от деревни до

города прямой линией, но уже без деления ее на километры, спрашиваем: — Где встретятся крестьяне: на полдороге или нет? Почему не на полдороге? Пусть они встретятся вот в этом месте (отмечается приблизительно точка встречи). Знаем ли мы, сколько километров прошел один крестьянин и сколько километров проехал другой крестьянин до этого места (до встречи)? — Мы не знаем этого. — А сколько километров должны они сделать оба вместе для того, чтобы встретиться? — 30 км. — Не встретятся ли они через час? Почему нет? — Потому что в час оба вместе делают только 10 км ($3 + 7 = 10$). — Через сколько же часов они встретятся? — Через столько часов, сколько раз 10 содержится в 30, т. е. через 3 часа.

Б. Даются отношение частей и разность их.

Мы рассмотрели задачи на пропорциональное деление, в которых даются отношение искомых и сумма их. Соответственно этим задачам располагаем мы и такие задачи, в которых даны отношение искомых и разность их.

а) Найти два числа, когда известно, во сколько раз и на сколько единиц одно из них больше или меньше другого.

Способы решения прежние: способ частей, способ проверки и способ замены.

Пример.

— Ученик купил пенал и перочинный ножик. Ножик втрое дороже пенала, и пришлось отдать за него на 40 коп. больше, чем за пенал. Сколько стоит пенал и сколько стоит ножик?

Способ частей. Цена пенала — 1 часть, тогда цена ножика — 3 части. Разница — 2 части ($3 - 1 = 2$), и эти две части составляют 40 коп.

Способ проверки. Положим, что пенал стоит 1 коп., тогда ножик стоит 3 коп. Или — что более соответствует действительности — положим, что пенал стоит 10 коп., тогда ножик стоит 30 коп. По нашему предположению выходит, что ножик дороже пенала на 2 коп. ($3 - 1 = 2$) или на 20 коп. ($30 - 10 = 20$). А на самом деле ножик дороже пенала на 40 коп., значит, мы ошиблись в 20 раз ($40 : 2 = 20$) или в 2 раза ($40 : 20 = 2$).

Способ замены. Так как ножик втрое дороже пенала, то на деньги, заплаченные за ножик, можно купить три пенала. Значит, 3 пенала дороже одного пенала на 40 коп., т. е. 2 пенала стоят 40 коп.

б) Далее идут задачи, решаемые способами приведения к единице.

— Два поденщика кололи дрова; один работал 8 дней, другой 5 дней; первый получил больше второго на 18 руб. Сколько заработал каждый, если поденная плата тому и другому была одинакова?

Способ приведения к единице. Узнаем, сколько получал каждый работник в один день: для этого определяем, на сколько дней один работал больше другого, и разницу в заработках делим на

дала на эту покупку 175 руб., другая 140 руб.; первая получила полотна на 5 м больше второй. Сколько метров полотна пришлось каждой?

Способ обратного приведения к единице. Определив, на сколько больше денег отдала первая (175 руб. — 140 руб. = 35 руб.), найдем цену одного метра ($35 \text{ руб.} : 5 = 7 \text{ руб.}$); затем делением по содержанию узнаем, сколько метров полотна получила каждая ($175 \text{ руб.} : 7 \text{ руб.} = 25$; 25 м; $140 \text{ руб.} : 7 \text{ руб.} = 20$; 20 м).

— Две артели землекопov исправляли дорогу; в одной артели было 18 человек, в другой 12 человек; первая работала 15 дней, вторая — 20 дней. Первая артель получила больше второй на 300 руб. Сколько получила каждая артель?

При решении этой задачи удобно воспользоваться понятием о рабочем дне.

в) Вслед за этими задачами мы приводим такие задачи, в которых разность выражена неявно.

Решим задачу.

— Крестьянин хочет купить лошадь и для этого продает рожь. Если он продаст 15 ц ржи, то ему нехватит для покупки лошади 80 руб.; а если он продаст 20 ц ржи, то после покупки у него останется 110 руб. Сколько стоит лошадь?

Решение. Обращаем внимание на то, что во втором случае крестьянин получит за рожь больше на 90 руб. ($80 + 110 = 190$); это — оттого, что он продает ржи больше на 5 ц ($20 - 15 = 5$); вывод: 5 ц ржи стоят 90 руб., 1 ц — 38 руб.

г) Затем идут задачи вроде следующей:

Столовая купила 20 кг малины и 18 кг клубники и заплатила за все 30 руб. Другой раз по тем же ценам купила она тоже 20 кг малины, а клубники 24 кг и заплатила 36 руб. Почему платила она за килограмм клубники и килограмм малины?

Здесь, как и в предыдущих задачах, внимание решающего должно быть обращено: 1) на разницу в цене обеих покупок и 2) на причину этой разницы. Вторая покупка дороже первой на 6 руб. ($36 - 30 = 6$); а так как малины куплено оба раза поровну, то второй раз отдано денег больше только потому, что больше куплено клубники, а именно, больше на 6 кг ($24 - 18 = 6$). Отсюда заключаем, что 6 кг клубники стоят 6 руб. Узнав, сколько стоит килограмм клубники ($6 \text{ руб.} : 6 = 1 \text{ руб.}$), найдем цену килограмма малины из того или другого условия задачи, например, из первого: вычтя из 30 руб. стоимость 18 кг клубники ($1 \text{ руб.} \times 18 = 18 \text{ руб.}$), определяем цену 20 кг малины ($30 \text{ руб.} - 18 \text{ руб.} = 12 \text{ руб.}$), а потом и одного килограмма ($12 \text{ руб.} : 20 = 60 \text{ коп.}$).

Изложенный способ решения называют иногда *способом исключения неизвестного посредством вычитания равных*.

д) Далее следуют задачи, соответствующие задачам последней группы предшествующего отдела А, в которых вместо суммы дается разность.

— Два плотника работали одинаковое время; один из них получал в день 15 руб., другой 12 руб. По окончании работы

первому пришлось получить больше второго на 45 руб. Сколько дней они работали? Сколько заработал каждый?

Решение. Если бы они работали по одному дню, то первый заработал бы больше второго на 3 руб. (15 руб. — 12 руб. = 3 руб.). А так как первый получил больше второго на 45 руб., то работали они по столько дней, сколько раз 3 руб. содержится в 45 руб. ($45 \text{ руб.} : 3 \text{ руб.} = 15$; 15 дней).

К этому виду задач принадлежат и задачи, в которых идет речь о попутном движении (один догоняет другого).

— Собака увидела зайца, который находился от нее на расстоянии 240 м, и погналась за ним. Заяц пробегает в минуту 280 м, а собака 360 м. Через сколько минут собака догонит зайца?

Приступая к таким задачам, полезно первоначально выяснить их решение при помощи чертежа. Учитель проводит на доске прямую линию (предполагается, что движение происходит по прямой линии) и отмечает на ней две точки, которые, по уговору, будут обозначать те места, где сначала находились собака и заяц. Отмечает на линии еще точку, которая должна обозначать то место, где собака догонит зайца. Затем учитель предлагает детям указать на чертеже весь путь, сделанный собакой и зайцем. — Знаем ли мы, сколько всего метров пробежала собака? заяц? — Нет, мы этого не знаем. — А знаем ли мы, кто из них пробежал больше и на сколько больше? — Знаем: собака пробежала больше на 240 м, на столько, на сколько она была позади зайца. — Значит, чтобы догнать зайца, собака должна пробежать лишку 240 м. Не догонит ли она его через минуту? Почему нет? — Потому что через минуту она пробежит больше только на 80 м. ($360 - 280 = 80 \text{ м.}$) — Через сколько же минут собака догонит зайца? — Через столько минут, сколько раз 80 м содержится в 240 м.

Вслед за этими задачами мы приводим такие задачи, в которых разность выражена неявно:

— Ученики собираются выписать газету. Если они соберут с каждого по 15 коп., то им нехватит 2 руб.; а если каждый внесет по 25 коп., то получится лишних 2 руб. Сколько было учеников? Сколько стоит газета?

Эти задачи сходны с задачами, имеющими место в настоящем отделе под буквой в: от этих задач отличаются они только тем, что промежуточное искомое (количество учеников) служит здесь не множимым, а множителем, почему при решении деление на части заменяется делением по содержанию. Ход решения остается прежним.

III тип. Смешение.

Арифметическое содержание подобных задач может быть выражено так:

1) Даны числа 4 и 9; первое из них берется 3 раза, второе 2 раза; найти среднее арифметическое всех этих чисел, т. е. 3 четверок и 2 девяток¹.

¹ Средним арифметическим нескольких чисел, например трех чисел: 6, 7 и 11, называется их сумма, деленная на число их $(6 + 7 + 11) : 3 = 8$.

Решение. Все четверки составляют число 12 ($4 \times 3 = 12$), а девятки — 18 ($9 \times 2 = 18$); все четверки и девятки вместе равны 30 ($12 + 18 = 30$), число всех чисел 5 (3 четверки и 2 девятки); среднее арифметическое будет 6 ($30 : 5 = 6$).

Обратные задачи.

2) Взяты два числа, из которых одно (назовем его первым) есть 4, другое же (второе) неизвестно; первое (4) повторено 3 раза, второе 2 раза; среднее арифметическое всех этих чисел оказалось равным 6. Найти второе число.

Решение. Всех чисел взято 5 (3 первых и 2 вторых), среднее арифметическое их 6; следовательно, их сумма равна 30 ($6 \times 5 = 30$); 3 первых числа (3 четверки) составляют 12; значит, 2 вторых равны 18 ($30 - 12 = 18$); второе число есть 9 ($18 : 2 = 9$).

3) Даны два числа 4 и 9; то и другое взято слагаемым несколько раз; среднее арифметическое всех этих чисел равно 6; первое число (4) взято 3 раза. Сколько раз взято второе число?

Решение. Когда составляется среднее арифметическое, тогда взятые числа (четверки и девятки) уравниваются, обращаясь в шестерки; для этого надо от каждой девятки отнять по 3 единицы ($9 - 6 = 3$) и все эти единицы распределить между четверками, прибавляя по 2 единицы к каждой четверке ($6 - 4 = 2$); так как всех четверок взято 3 и к каждой из них надо прибавить по 2 единицы, то ко всем четверкам придется приложить 6 единиц ($2 \times 3 = 6$), которые должно отнять от девяток; от каждой девятки отнимается по 3 единицы, следовательно, 6 единиц получается от 2 девяток ($6 : 3 = 2$); итак, девяток взято 2.

4) Даны два числа 4 и 9; взято несколько четверок и несколько девяток, всего 5 чисел; среднее арифметическое их оказалось равным 6. Сколько взято четверок и сколько девяток? Способы решения таких задач изложены ниже.

Первые две задачи называются задачами I рода на смешение. Конкретным содержанием их служит обыкновенно составление смеси, причем искомым является качество или смеси (задача 1) или одного из смешиваемых веществ (задача 2), которых может быть и более двух. Под качеством мы разумеем цену весовой единицы (во что обойдется килограмм смешанного чаю? сколько стоит килограмм муки первого сорта?), вес единицы емкости (сколько весит центнер смешанного овса?), пробу сплава, крепость раствора и т. п. Такие задачи принадлежат к задачам чисто арифметическим.

Две вторые задачи называются задачами II рода на смешение. Искомым служит здесь количество или обоих смешиваемых веществ или одного из них. Эти задачи можно отнести к задачам алгебраического характера.

Приведем примеры решения задач на смешение II рода.

Задачи на смешение II рода. Арифметическое содержание таких задач, как сказано раньше, может быть выражено следующим образом:

— Даны два числа 4 и 9; взято несколько четверок и несколько девяток, всего 5 чисел; среднее арифметическое их оказалось равным 6. Сколько взято четверок и сколько девяток?

Так как всех чисел взято 5, а среднее арифметическое их равно 6, то сумма всех взятых чисел будет 30. Задачу можно выразить в такой форме:

— Сколько надо взять четверок и сколько девяток так, чтобы всех чисел взято было 5, и чтобы сумма их равнялась 30. Или так:

— Число 30 разложить на четверки и девятки таким образом, чтобы всех четверок и девяток вместе было 5. Сколько будет тех и других?

Способ решения таких задач может быть выяснен наглядно.

— У матери 7 человек детей; всем им она купила 36 м ситцу: сыновьям — на рубашки, по 3 м каждому; дочерям — на платья, по 8 м каждой. Сколько у матери сыновей и сколько дочерей?

— Скажем эту задачу по другому: 36 м ситцу надо разделить семерым детям; каждому сыну дать (отрезать) по 3 м, каждой дочери — по 8 м. Вот 36 кубиков: их надо разделить на 7 кучек так, чтобы в одних кучках было по 3 кубика, в других — по 8 кубиков.

Весьма возможно, что ученики смекнут, как это сделать (в противном случае учитель покажет это сам).

— Поставим в каждую из 7 кучек по 3 кубика. — Все ли кубики будут разложены? Что же сделать с оставшимися кубиками? — Их надо тоже разложить: ими надо добавлять кучки. Мы поставили в каждую кучку по 3 кубика, а в иных кучках должно быть по 8 кубиков: надо добавлять по 5 кубиков. Поставим еще 5 кубиков в первую кучку, поставим еще 5 кубиков во вторую кучку, поставим еще 5 кубиков в третью кучку. Все оставшиеся кубики вышли. Мы разложили 36 кубиков так, как требовалось: кучек по 8 кубиков оказалось 3, а кучек по 3 кубика — 4.

От наглядных пособий следует перейти к отвлеченным числам: выразить сделанный процесс разложения при помощи арифметических действий.

— Число 36 (36 единиц) надо разложить на 7 частей таким образом, чтобы в одних частях было по 3 единицы, а в других — по 8 единиц. Как это сделать? — Надо положить в каждую часть по 3 единицы. Сколько единиц будет тогда разложено? Как это узнать? — $3 \times 7 = 21$. — Все ли единицы разложены? Что теперь надо узнать? — Надо узнать, сколько единиц не разложено. — Как это узнать? — $36 - 21 = 15$. — Что теперь надо делать? — Надо добавлять части: класть еще по 5 единиц. — Как узнать, что надо класть еще по 5 единиц? — Из 8 вычесть 3, будет 5 (в иных частях должно быть по 8 единиц, а мы положили только по 3 единицы). — Сколько частей можно добавить? — Столько частей, сколько раз от 15 можно брать по 5, сколько раз 5 содержится в 15; $15 : 5 = 3$. — Во скольких же частях будет по 8 единиц? Во скольких частях будет по 3 единицы? Как это узнать? — $7 - 3 = 4$ (всех частей семь, частей по 8 единиц — три, остальные части будут по 3 единицы).

После этого можно возвратиться к задаче.

— На сколько частей (скольким детям) надо разделить 36 м ситцу? По сколько метров должно быть в одних частях? в других? Как станете решать задачу? — Положим в каждую часть по 3 м. Слушайте: когда мы кладем в каждую часть по 3 м, то этим самым мы предполагаем, что все 7 человек детей — сыновья. Что же будем узнавать? — Будем узнавать, сколько метров ситцу потребовалось бы для 7 сыновей: $3 \times 7 = 21$; 21 м. — Что узнаете дальше? — Сколько метров останется: $36 - 21 = 15$; 15 м. Вот видите: если бы все дети были сыновья, им надо было бы 21 м, но мать купила еще лишку 15 м, что же это значит? — Это значит, что не все дети — сыновья: между ними есть и дочери. — На сколько больше ситцу идет для дочери, чем для сына? Как это узнать? — $8 - 3 = 5$; на 5 м. Если бы из семи человек детей у матери была одна дочь, тогда сколько лишних метров ситцу купила бы мать (сверх 21 м)? — Лишних 5 м. — А на самом деле сколько лишку купила мать? — 15 м. — Что же можно из этого узнать? — Можно узнать, сколько у матери дочерей. — Как это узнать? Почему надо 15 разделить на 5? Дочерей столько, сколько раз 5 содержится в 15: 3 дочери.

Иначе можно рассуждать так. Предположим, что все дети — дочери. Тогда им потребовалось бы 56 м ситцу ($7 \times 8 = 56$); куплено же меньше этого на 20 м ($56 - 36 = 20$). Значит, не все дети дочери. Если бы из семи человек был один сын, то ситцу надо было бы купить меньше (против 56 м) на 5 м ($8 - 3 = 5$); а так как ситцу куплено меньше на 20 м, то заключаем, что сыновей столько, сколько раз 5 содержится в 20, т. е. 4 сына.

Предполагая, что все слагаемые одинаковы, равны меньшему или большему из данных чисел (все дети — сыновья или все дети — дочери), мы находим сумму этих слагаемых (21 или 56) и затем определяем недостаток или излишек этой суммы сравнительно с требуемой суммой (36). Этот недостаток (15) или излишек (20) вместе с разностью данных чисел ($8 - 3 = 5$) позволяет найти число тех или других из них (в первом случае число восьмерок, во втором число троек). Изложенный прием решения может быть назван поэтому *способом недостатка, или излишка, сравнительно с требуемой суммой*.

Вместо того чтобы находить недостаток или излишек против требуемой суммы, можно взять излишек и недостаток сравнительно с требуемым средним арифметическим; этот излишек и недостаток дают отношение между числом тех и других чисел и приводят к задаче на пропорциональное деление. Такой способ решения мы уже применяли к задачам предыдущей группы.

— С завода отправили кирпич на 24 подводах; на одни подводы клали по 120 штук кирпича, на другие — по 150; а если бы положить весь этот кирпич на все подводы поровну, то на каждую пришлось бы по 130 штук. На сколько подвод положили по 120 штук кирпича и на сколько по 150 штук?

Решение. Представим себе, что весь кирпич положен на 24 подводы, по 130 штук на каждую. Теперь с одних из этих подвод надо снять по 10 штук ($130 - 120 = 10$), а на другие положить по 20 штук ($150 - 130 = 20$); каких подвод больше: тех ли,

с которых надо снять, или тех, на которые надо положить? Первых больше, именно в 2 раза больше, потому что 20 кирпичей, которые кладутся на *одну* подводку, снимаются с *двух* подвод. Итак, всех подвод 24, причем одних вдвое больше, чем других. (Деление на части кратно неравные.)

Приведем еще задачу.

— Стрелок стреляет в тире с таким условием: за каждый выстрел, которым он попадает в цель, он получает по 2 руб., а за каждый выстрел мимо цели он не только ничего не получает, но, напротив, с него вычитается по 75 коп.; после 30 выстрелов, стрелок получил 38 руб. Сколько было попаданий в цель?

Решение. Предположим, что все 30 выстрелов попали в цель, тогда стрелку пришлось бы получить 60 руб. ($2 \times 30 = 60$); получил же он только 38 руб., значит, он лишился 22 руб. ($60 - 38 = 22$); с каждым выстрелом, не попавшим в цель, лишился он 2 р. 75 к. (не получал 2 руб. и отдавал 75 коп.); он имел столько промахов, сколько раз 2 р. 75 к. содержится в 22 руб., т. е. 8 выстрелов ($2200 : 275 = 8$).

Иначе: 38 руб. приходится получить стрелку за 19 попаданий ($38 : 2 = 19$). Следовательно, за остальные 11 выстрелов ($30 - 19 = 11$) он не получил ничего: то, что за эти 11 выстрелов ему надо было получить, с него вычтено. Получал он за выстрел по 2 руб., или по 8 четвертаков; вычитали с него за промах по 75 коп., или по 3 четвертака; попаданий в цель было меньше чем промахов: во столько раз меньше, во сколько раз 3 меньше 8. (Попаданий 3 части, промахов 8 частей; всего 11 частей, которые составляют 11 выстрелов, каждая часть равна 1 выстрелу. Попаданий было 3, что вместе с прежними 19 составляет 22 выстрела.)

IV тип. Задачи на вычисление времени.

Еще раньше, во втором году обучения, мы познакомили детей с часами и с простейшими задачами на вычисление времени. Здесь мы расширяем сведения, относящиеся к вычислению времени, повторив те из них, которые ученикам уже должны быть известны.

Учитель сообщает детям сведения о шаровидной форме земли, о ее движении вокруг своей оси и вокруг солнца, о движении луны вокруг земли. За неимением дорогого прибора — теллурия, при этих объяснениях можно воспользоваться глобусом или просто каким-либо шариком, например клубком ниток, проткнутым вязальной спицей. Здесь учитель разъясняет детям, что меры времени зависят от движения земли и луны. Сутками называется то время, в которое земля обернется один раз вокруг своей оси; а год есть время, в которое земля делает один обход вокруг солнца. В то время как земля обходит один раз вокруг солнца, она обернется вокруг своей оси 365 раз и, сверх того, делает еще почти четверть оборота. — Сколько же суток в году? — Но считать в году $365\frac{1}{4}$ суток неудобно; надо брать в году равное (целое) число суток. Будем узнавать, сколько суток в четырех годах: $365\frac{1}{4} + 365\frac{1}{4} + 365\frac{1}{4} + 365\frac{1}{4}$. Сложите только

дробь: сколько получится? Эти сутки прибавим к последнему из четырех годов; сколько будет в нем суток? Из каждых четырех годов три года считают по 365 суток и один в 366 суток: $365 + 365 + 365 + 366$. Те годы, в которых считают по 365 суток, называются *простыми* годами; а год в 366 суток называется *високосным*. Номера високосных годов делятся без остатка на 4. Как узнать, каким был 1862 год? Узнайте. Несколько упражнений.

Когда земля обращается вокруг оси, то какое-нибудь место на земле, например Москва, не все время будет освещено солнцем: часть суток солнце будет светить на это место; эта часть суток — день; а другую часть суток солнце освещать этого места не будет; эта часть суток — ночь. День и ночь у нас вообще не одинаковы: то день больше ночи, то ночь больше дня; только два раза в году они равны (22 марта и 23 сентября). (Это происходит оттого, что ось земли стоит не прямо, а наклонно к ее пути; от этого же происходят и времена года: весна, лето, осень, зима.) Как разделяются сутки? Как разделяется час? Минута? Сутки начинаются в *полночь*, или в 12 часов ночи. Через 12 часов после полуночи бывает *полдень*. Время от полуночи до полудня называется временем *пополуночи*: когда после полуночи (после начала суток) пройдет 2 часа, то будет 2 часа пополуночи; пройдет 10 часов, будет 10 часов пополуночи. Время пополуночи называется также временем *ночи* и *утра*: 2 часа пополуночи — 2 часа ночи; 10 часов пополуночи — 10 часов утра. Время от полудня до следующей полуночи называется временем *пополудни*: от полудня пройдет 3 часа — будет 3 часа пополудни; пройдет 9 часов — будет 9 часов пополудни. Время пополудни называют также временем *дня* и *вечера*; 3 часа пополудни — 3 часа дня; 9 часов пополудни — 9 часов вечера — 6 час. 30 мин., иначе называется *половина седьмого* (часа); 8 час. 15 мин. — *четверть девятого*; 5 час. 45 мин. — *три четверти шестого*, или *без четверти шесть*; 11 час. 10 мин. — *десять минут двенадцатого*; 8 час. 50 мин. — *без десяти минут девять*.

Месяцем называется время, в которое луна обходит один раз вокруг земли; луна обходит один раз вокруг земли приблизительно в 30 дней (суток). Если класть в месяце 30 дней, сколько месяцев будет в году? Ровно ли 12 месяцев? Для того чтобы в году было ровно 12 месяцев, чтобы 12 месяцев заняли ровно весь год, считают в месяцах не поровну дней. — Приводятся названия месяцев с указанием числа дней в каждом месяце. (Не лишне — показать детям, как узнать число дней в месяцах по косточкам и углублениям на пальцах обеих рук.) Год начинается в полночь 1 января. Для решения последующих задач на вычисление времени надо заставить детей заучить номера месяцев: апрель — 4-й месяц; обратно: 8-й месяц — август.

Задачи на вычисление времени решаются сложением и вычитанием; таких задач три вида: один на сложение и два на вычитание.

1. *На сложение.* Французы заняли Москву 2 сентября 1812 года, а русские взяли Париж спустя 1 год 6 месяцев 17 дней. Когда русские взяли Париж?

В этих задачах даются время предшествующего события (завоевание Москвы) и промежуток, отделяющий его от события последующего (взятие Парижа). Отыскивается время последующего события.

2. *На вычитание.* Один брат старше другого на 7 лет 5 мес. 20 дней; младший родился 9 февраля 1886 года. Когда родился старший?

В этих задачах даются время последующего события (рождение младшего брата) и промежуток, отделяющий его от события предшествующего (рождение старшего брата). Отыскивается время предшествующего события.

3. *На вычитание.* Петр I родился 30 мая 1672 года, скончался 28 января 1725 года. Скольких лет от роду скончался Петр I?

В этих задачах даются времена двух событий (рождения и кончины Петра I), и отыскивается промежуток между ними.

Число, обозначающее время какого-нибудь события, называют *календарным* числом; таковы числа: 2 сентября 1812 года, 30 мая 1672 года. Число, которое выражает время, протекшее от одного момента до другого, есть собственно *арифметическое* число: 1 год 6 мес. 18 дней; 7 лет 5 мес. 20 дней; это — обыкновенное составное именованное число, выраженное в мерах времени.

В задачах первой и второй одно из данных чисел — календарное, другое — арифметическое, искомое — календарное число. В задаче третьей оба данные — календарные числа, искомое — арифметическое.

Задачи на вычисление времени обыкновенно решаются при помощи перевода календарного числа в арифметическое и обратно. Перевести календарное число в арифметическое — значит высчитать, сколько времени прошло до известного события от начала эры (или от начала столетия, начала года и т. д.). 2 сентября 1812 года — соответствующее арифметическое число будет 1811 лет 8 мес. 1 день; от начала летосчисления прошло полных 1811 лет 8 мес. 1 день, или 1811 лет 245 дней (здесь месяцы раздроблены в дни; февраль, как принадлежащий к 1812-му, т. е. високосному году, принят в 29 дней). 29 июня — соответствующее арифметическое число; 5 мес. 28 дней (от начала года) или 28 дней (от начала месяца). Перевести арифметическое число в календарное — значит определить, когда случилось событие, зная время, протекшее до него от начала эры (или начала года, месяца и т. д.). От начала эры до освобождения крестьян прошло 1860 лет 1 мес. 18 дней; освобождение крестьян было 19 февраля 1861 года.

Решим приведенные три задачи.

1. От начала эры до занятия Москвы прошло 1811 лет 8 мес. 1 день, а до взятия Парижа прошло времени больше на 1 год 6 мес. 17 дней.

$$\begin{array}{rcl}
 + & 1811 \text{ лет} & 8 \text{ мес.} & 1 \text{ день} \\
 & 1 \text{ год} & 6 \text{ „} & 17 \text{ „} \\
 \hline
 & 1813 \text{ лет} & 2 \text{ мес.} & 18 \text{ дней}
 \end{array}
 \qquad
 19 \text{ марта } 1814 \text{ г.}$$

2. От начала эры до рождения младшего брата прошло 1885 лет 1 мес. 8 дней, а до рождения старшего прошло времени меньше на 7 лет 5 мес. 20 дней.

$$\begin{array}{r} 1885 \text{ лет } 1 \text{ мес. } 8 \text{ дней} \\ - \quad 7 \quad " \quad 5 \quad " \quad 20 \quad " \\ \hline 1877 \text{ лет } 7 \text{ мес. } 19 \text{ дней} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{занимаем январь} = 31 \text{ дн.} \\ \dots \quad 20 \text{ августа } 1878 \text{ г.} \end{array}$$

3. От начала эры до кончины Петра I прошло 1724 года 27 дней, а до рождения его — 1671 год 4 мес. 29 дней. Продолжительность жизни определим, узнав, на сколько больше времени прошло от начала эры до кончины, нежели до рождения:

$$\begin{array}{r} 1724 \text{ года } 0 \text{ мес. } 27 \text{ дней} \\ - \quad 1671 \quad " \quad 4 \quad " \quad 29 \quad " \\ \hline 52 \text{ года } 7 \text{ мес. } 29 \text{ дней} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(раздробляется в дни последний} \\ \text{месяц года — декабрь — 31 день)} \end{array}$$

В тех случаях, когда промежуток времени невелик, например, заключен в пределах полусуток, суток, расчет времени удобно может быть сделан и по-другому, как показано ниже, без перевода календарных чисел в арифметические и обратно.

— Крестьянин вышел из деревни на ярмарку утром в половине 7-го и шел 3 час. 15 мин. Когда пришел он на ярмарку?

Одно решение. Сколько времени прошло от начала суток (от полуночи) до выхода крестьянина на ярмарку. — 6 час. 30 мин. — А сколько времени прошло от начала суток до прихода его на ярмарку? — На 3 час. 15 мин. больше; надо к 6 час. 30 мин. прибавить 3 час. 15 мин.; получится 3 час. 45 мин. — Который будет час, когда от полуночи пройдет 3 час. 45 мин.? Когда же пришел крестьянин на ярмарку? — Без четверти в 10 час. утра.

Другое решение. Крестьянин вышел в половине 7-го утра. Который час будет через 3 часа? — Через 3 часа будет половина 10-го утра. — А еще через 15 мин., который будет час? — 45 мин. 10-го, или без четверти 10 часов утра.

— Крестьянин пахал до обеда 6 час. 45 мин., а обедать он стал в половине двенадцатого. Когда начал он пахать?

Одно решение. Сколько времени прошло от начала суток до обеда крестьянина? А до того времени, когда он начал пахать? — Меньше на 6 час. 45 мин.; надо из 11 час. 30 мин. вычесть 6 час. 45 мин.; получится 4 час. 45 мин. Крестьянин начал пахать без четверти в 5 час. утра.

Другое решение. Крестьянин стал обедать в половине 12-го; 6 час. тому назад было половина 6-го ($12 - 6 = 6$); еще назад полчаса — 5 час.; еще назад четверть часа — без четверти 5.

— Хозяйка пришла в гости в половине 4-го дня, а ушла без четверти в 8 час. вечера. Сколько времени она была в гостях?

Одно решение. От полудня до ухода в гости прошло 7 час. 45 мин., до прихода в гости 3 час. 30 мин. Хозяйка была в гостях 4 час. 15 мин. ($7 \text{ час. } 45 \text{ мин.} - 3 \text{ час. } 30 \text{ мин.} = 4 \text{ час. } 15 \text{ мин.}$).

Другое решение. От половины 4-го до половины 8-го прошло 4 час. ($8 - 4 = 4$), а до без четверти 8 прошло 4 час. 15 мин.

— Поденищица начала работать в половине 8-го утра, а кончила через 11 час. 45 мин. Когда она кончила работать?

Одно решение. От начала суток до начала работы прошло 7 час. 30 мин., а до конца работы прошло времени больше на 11 час. 45 мин.; к 7 час. 30 мин. прибавить 11 час. 45 мин., получится 19 час. 15 мин. От полуночи до конца работы прошло 19 час. 15 мин., а от полудня — 7 час. 15 мин. (от 19 час. 15 мин. отнять 12 час. будет 7 час. 15 мин.). Поденищица кончила работу в 7 час. 15 мин. вечера, или в четверть 8-го вечера.

Другое решение. От начала работы до полудня пройдет 4 час. 30 мин. (12 час. — 7 час. 30 мин.). Значит, после полудня поденищица работала еще 8 час. 15 мин. (11 час. 45 мин. — 4 час. 30 мин.).

— Поезд железной дороги шел от Москвы до Калинина 4 час. 45 мин. и прибыл в Калинин в четверть 3-го дня. Когда вышел он из Москвы?

Одно решение. От начала суток до прихода поезда в Калинин прошло 14 час. 15 мин., а до отхода из Москвы на 4 час. 45 мин. меньше; (от 14 час. 15 мин. отнять 4 час. 45 мин., будет 9 час. 30 мин.). Поезд вышел из Москвы в половине 10-го утра.

Другое решение. После полудня поезд шел 2 час. 15 мин., следовательно, до полудня он шел 2 час. 30 мин. (4 час. 45 мин. — 2 час. 15 мин.). Вышел он из Москвы в 9 час. 30 мин. утра (12 час. — 2 час. 30 мин.).

— Коров выгнали в поле в три четверти 7-го утра, а погнали домой в половине 8-го вечера. Сколько времени коровы были на пастбище?

Одно решение. От начала суток до загона прошло 19 час. 30 мин. (12 час. + 7 час. 30 мин.), до выгона — 6 час. 45 мин. Коровы были на пастбище 12 час. 45 мин. (19 час. 30 мин. — 6 час. 45 мин. = 12 час. 45 мин.).

Другое решение. От трех четвертей 7-го утра до трех четвертей 7-го вечера прошло 12 час.; до 7 час. вечера — еще 15 мин., до половины 8-го — еще 30 мин.; всего 12 час. + 15 мин. + 30 мин. = 12 час. 45 мин.

V тип. Задачи на квадратные меры.

Приступая к ознакомлению с квадратными мерами, учитель дает детям понятие об угле, прямом угле, четырехугольнике, прямоугольнике, квадрате и о площади.

Без сомнения, дети уже имеют представление о четырехугольнике, называя четырехугольниками те прямоугольники и квадраты, которые им неоднократно приходилось наблюдать и рисовать. Из имеющихся у детей представлений здесь надо вывести понятие об этих фигурах.

Учитель чертит на классной доске прямой угол.

— Две стены комнаты, сходясь вместе, образуют угол. Я провел на доске две черты, две прямые линии, которые сходятся вместе, встречаются. Что же образуют эти две линии? — Они образуют угол.

На доске чертится прямоугольник.

Сколько углов имеет эта фигура? Как, поэтому, она называется? — Она называется *четыреугольником*.

Затем, начертив круг, изображающий циферблат часов, учитель предлагает детям нарисовать стрелки, когда они показывают 3 часа, а потом 2 часа, 5 часов¹.

— Такой ли угол будет между стрелками в 2 часа, какой был в 3 часа? — Нет, этот угол меньше. — Такой ли угол образуют стрелки в 5 часов, как и в 3 часа? — Нет, теперь они образуют угол больший.

— Когда стрелки показывают 3 часа, то одна из них стоит против знака XII, а другая отошла от этого знака на четверть полного оборота. Если одна стрелка отошла от другой на четверть оборота, то угол между стрелками называется *прямым углом*. Какой же угол образуют стрелки в 3 часа? Еще когда угол между стрелками будет прямым углом?

— Когда стрелки показывают 2 часа, то одна стрелка стоит против знака XII, а другая отошла от этого знака меньше, чем на четверть полного оборота. Если одна стрелка отошла от другой меньше, чем на четверть оборота, то угол между стрелками будет меньше прямого угла. Угол, который меньше прямого угла, называется *острым углом*. Какой же угол образуют стрелки в 2 часа? Еще когда стрелки образуют между собою острые углы? — Когда стрелки показывают 5 часов, то одна стрелка стоит против знака XII, а другая отошла от этого знака больше, чем на четверть полного оборота. Если одна стрелка отошла от другой больше, чем на четверть оборота, то угол между стрелками будет больше прямого угла. Угол, который больше прямого угла, называется *тупым углом*. Какой же угол образуют стрелки в 5 часов? Еще когда стрелки образуют между собою тупые углы?

Для перехода к углам, образуемым прямыми линиями вообще, можно еще раз повторить эти упражнения, изобразив две прямые линии двумя узкими бумажными полосками, которые, будучи наложены одна на другую, в одном конце обе прикалываются кнопкой к классной доске; нижняя полоска прикалывается и в другом конце, становясь, таким образом, неподвижной; а верхняя полоска может вращаться около кнопки. Поворачивая эту полоску, ученики показывают углы острые, прямые и тупые. После этого чертят такие углы на классной доске.

Начертив опять прямоугольник, учитель спрашивает детей: какие углы имеет этот четырехугольник? Четырехугольник, в котором все углы прямые, называется *прямоугольным четырехугольником*, или — коротче — *прямоугольником*.

При помощи учителя дети называют примеры прямоугольников: пол, потолок, стена, оконное стекло, лист бумаги и т. д.

— Сколько надо провести прямых линий, чтобы начертить четырехугольник? Эти линии называются *сторонами* четырехугольника. Посмотрите: все ли четыре стороны прямоугольника имеют одинаковую длину? Нет ли между ними равных сторон? (Делается проверка, напр., при помощи нитки.) Одну из больших сторон прямоугольника назовем его *длиной*, а одну из меньших сторон — *шириной*. Укажите длину пола, листа бумаги и т. д. Укажите ту сторону стены, которая идет по полу (или по потолку); эту сторону назовем длиной или шириной стены. Ука-

¹ Вместо чертежа можно воспользоваться, если таковая имеется в школе, моделью часов: картонным циферблатом с подвижными стрелками.

жите ту сторону стены, которая идет сверху вниз (или снизу вверх); эту сторону назовем *вышиной* стены. Укажите ширину и вышину двери, окна и т. д.

Начертив квадрат, учитель предлагает детям сравнить, например при помощи нитки, длину всех четырех сторон этого прямоугольника. Такой прямоугольник, у которого все четыре стороны равны между собой, называется *квадратом*. Укажите длину и ширину квадрата. Что здесь больше: длина или ширина? — Они одинаковы. — Поэтому ни ту, ни другую сторону квадрата мы не станем называть ни длиной, ни шириной, а будем просто говорить: сторона квадрата.

Примеры квадратов: классная доска, квадратики клетчатой бумаги и т. д.

Изобразив на доске несколько прямоугольников и квадратов различных размеров и предложив детям указать, какая из фигур занимает на доске больше места, учитель скажет ученикам, что место, занимаемое прямоугольником или квадратом, называется *площадью* этих фигур.

Выкрасить с одной стороны квадратную доску, длина (и ширина) которой равна метру, стоит 40 коп. Как узнать, что будет стоить выкрасить пол нашей комнаты? Узнать, во сколько раз площадь пола больше площади этой доски, значит, измерить площадь пола. Квадратная доска будет в этом случае мерою, или единицею. Вообще площади измеряются квадратами, у которых сторона равна метру, дециметру, сантиметру и т. д. Квадрат, у которого сторона равна метру, называется *квадратным метром*. Что такое кв. дециметр, кв. сантиметр?

На классной доске чертится прямоугольник, площадь которого измеряется *непосредственно* дециметром; дециметр (деревянная доска или картонный лист) накладывается (рядами) на измеряемую площадь и очерчивается в каждом положении. Ученики считают, сколько раз уложится кв. дециметр. Сосчитать, сколько раз уложился кв. дециметр в измеряемой площади, удобнее всего так. Сосчитайте сначала, сколько кв. дециметров в первом (верхнем) ряду. Сколько дециметров содержит длина прямоугольника. (4.) А если бы длина прямоугольника была 5 или 6 *дм*, сколько было бы дециметров в первом ряду? Теперь сосчитайте, сколько таких рядов. (3.) Какова ширина прямоугольника? А если бы ширина была 4 или 5 *дм*, тогда сколько было бы таких рядов? Итак, в каждом ряду 4 *кв. м*, а рядов 3. Как же узнать, сколько раз уложился кв. метр в измеряемой площади. Чему равна площадь этого прямоугольника?

На классной доске чертится другой прямоугольник. — Я хочу измерить площадь этого прямоугольника сантиметром, но сантиметра у нас нет; есть только простой (линейный) сантиметр (метр, разделенный на сантиметры). Нельзя ли с помощью линейного сантиметра узнать, сколько сантиметров содержит площадь этого прямоугольника? Как же это сделать? — Надо измерить длину и ширину прямоугольника. (Делается измерение: длина оказывается, например, 9 *см*, ширина 7 *см*.) — Как теперь узнать, сколько сантиметров содержится в площади этого прямоугольника? —

Надо 9 умножить на 7; $9 \times 7 = 63$; 63 кв. см. — Почему надо 9 умножить на 7? — Если бы у нас был сантиметр и мы стали бы его укладывать рядами по длине прямоугольника, то в каждом ряду было бы 9 кв. см, потому что длина прямоугольника равна 9 см; таких рядов вышло бы 7, потому что ширина прямоугольника равна 7 см. В каждом ряду 9 кв. см, рядов 7; чтобы узнать, сколько всего сантиметров, надо 9 умножить на 7. — Итак, что надо сделать, чтобы измерить площадь прямоугольника? — Надо измерить его длину и ширину; потом перемножить полученные числа.

На классной доске чертится квадрат. — Измерим площадь этого квадрата квадратным сантиметром. Что надо для этого сделать? У квадрата длина и ширина одинаковы; стало быть, достаточно измерить только одну сторону его. (Делается измерение: пусть сторона равна 11 см.) Как же узнать теперь, скольким квадратным сантиметрам равна площадь квадрата? — Сторона квадрата равна 7 см. Какова площадь его?

После измерения площади квадрата ученики находят единичные отношения квадратных мер: в кв. м 100 кв. дм и 10 000 кв. см, в кв. дм — 100 кв. см.

Здесь же учитель сообщает детям, что земельная мера — гектар — содержит 10 000 кв. м.

При этих упражнениях большую услугу может оказать клетчатая бумага, т. е. бумага, разлинованная квадратиками. Уговорившись с учениками считать сторону клетки за линейную единицу, учитель предлагает детям вычерчивать на такой бумаге прямоугольники назначенной длины и ширины; квадраты по данной стороне их; прямоугольники, у которых даны площадь и одна из сторон. Не затруднят учеников и неопределенные задачи на построение прямоугольников по данной площади, как, например, задача: начертить на клетчатой бумаге несколько прямоугольников различной длины и ширины, но так, чтобы все они заключали в себе по 36 клеток. Справятся дети и с такими задачами, в которых требуется начертить квадраты, содержащие 4 клетки, 9 клеток, 16 клеток и т. д.

Но в прикладных задачах нужно ограничиться только вычислением площади прямоугольника, когда даны длина и ширина его.

VI тип. Кубические меры.

При объяснении кубических мер и способа измерения объемов будем пользоваться моделями куба и прямоугольной призмы, а затем кубиками арифметического ящика, как единицами измерения. Если в школе нет моделей куба и призмы, учитель может сам сделать модели этих тел из толстой бумаги.

Показывая ученикам куб, учитель ведет с ними такую беседу:

— Как называется этот предмет? Из скольких частей состоит поверхность куба? Эти части поверхности называются *гранями* куба. Как расположены грани у того куба, который находится перед вами? — Вверху, внизу, справа, слева, спереди, сзади. — Которая из граней куба

больше других? Да все грани куба одинаковы. Чтобы проверить это, я приложу куб одною гранью к классной доске и обведу эту грань мелом. Теперь на этот рисунок стану накладывать куб прочими гранями; вы видите, что каждая из этих граней как раз покрывает наш рисунок. Каким четырехугольником будет грань куба? Значит, куб ограничен со всех сторон шестью равными между собою квадратами.

Каждые две грани, сходясь вместе, образуют ребро куба. Сколько ребер имеет куб? Как расположены ребра у нашего куба?— 4 наверху, 4 внизу и 4 с боков.— Все ли ребра куба имеют одинаковую длину?

Затем рассматривается прямоугольная призма (периаллелепипед), которую учитель называет детям просто призмой.

— Из скольких граней состоит поверхность призмы? Как расположены эти грани у нашей призмы? Все ли шесть граней призмы одинаковы? Которые грани равны между собою?— Верхняя и нижняя, передняя и задняя, правая и левая. (Делается проверка: призма прикладывается гранью к классной доске, грань очерчивается, на рисунок накладывается призма другими гранями.) Каким четырехугольником будет грань призмы?— Грань призмы будет прямоугольником.

— Сколько ребер имеет призма? Как расположены ребра у нашей призмы?— 4 наверху, 4 внизу и 4 с боков.— Что можно сказать о величине тех ребер, которые идут слева направо?— Они равны между собою. Одно из этих ребер назовем *длиной* призмы. Что можно сказать о величине тех ребер, которые идут спереди назад? Одно из этих ребер назовем *шириной* призмы. Что скажете вы о величине тех ребер, которые идут снизу вверх? Одно из этих ребер назовем *высотой* призмы. Укажите длину, ширину и высоту нашей призмы. Укажите длину, ширину и высоту куба. Что можно сказать о длине, ширине и высоте куба?— У куба длина, ширина и высота одинаковы.

— Чем измеряют рожь, овес, керосин, масло? Когда измеряют керосин литрами, то узнают, сколько места занимает керосин. Место, которое занимает предмет, называется *объемом* его. Сыпучее вещество (например овес) или жидкое (например спирт) можно насыпать или налить в сосуд; для жидких тел один из таких сосудов есть литр. Но можно ли измерить каким-либо сосудом объем тела насыпучего и нежидкого, например объем деревянной балки? Для измерения объемов берут за единицу куб, у которого ребро равно какой-нибудь линейной единице. Куб, у которого ребро равно метру, называется *кубическим метром*. Что такое кубический метр? Кубический дециметр? (Показывает кубик арифметического ящика.) Вот у этого кубика ребро равно сантиметру: как назовете вы этот кубик? Измерить кубическим сантиметром объем нашей призмы— значит узнать, во сколько раз призма больше этого кубика. (Узнать, сколько кубиков можно было бы напилить из призмы.)

Вывести способ измерения объема призмы лучше на первых порах синтетически, т. е. составляя призму из кубиков—единиц.

Принимая кубики арифметического ящика за кубические сантиметры, учитель предлагает детям построить призму длиной, например, в 6 *см*, шириною в 5 *см* и вышиною в 3 *см*. Несколько учеников по очереди делают это построение, например на классном столе, на виду у всего класса.

— Из кубиков (кубических сантиметров) составим призму. Длина призмы должна быть 6 *см*, ширина 5 *см* и высота 3 *см*. Как же на-

дать нам строить призму? — Надо приложить один к другому 6 кубиков. (Составляется ряд из 6 кубиков.) — Потом что надо сделать? — К этому ряду приложить еще такой же ряд, еще ряд так, чтобы всех рядов было 5. — У нас получился слой кубиков. Какую длину и какую ширину имеет этот слой? А какая у него высота? Но наша призма должна быть вышиною в 3 см. Что же теперь надо сделать? — На этот слой поставить еще такой же слой и еще слой. (Эти слои строятся так же, как и нижний слой.) — Какую длину, ширину и высоту имеет построенная призма? Из скольких кубиков она составлена: как это высчитать? — В каждом слое 30 кубиков (5 рядов, по 6 кубиков в ряду); таких слоев 3; всего 90 кубиков. — Теперь, не составляя на самом деле призмы из кубиков, вычислите, сколько кубиков пошло бы на постройку призмы длиною в 10 см, шириною в 8 см и вышиною в 7 см. Что сначала станете узнавать? — Сначала узнаем, сколько кубиков в каждом слое: длина призмы 10 см, значит, в каждом ряду 10 кубиков; ширина призмы 8 см, следовательно, таких рядов 8; $10 \times 8 = 80$; в каждом слое 80 кубиков. — Что узнаете потом? — Потом узнаем, из скольких кубиков состоит вся призма: в каждом слое 80 кубиков; высота призмы 7 см, значит, всех слоев 7; $80 \times 7 = 560$; во всей призме 560 кубиков.

— Измерим еще объем комнаты кубическим метром. Кубических метров, т. е. кубов с ребром в метр, у нас нет: есть у нас только обыкновенный линейный метр. Как же измерить нам объем комнаты? — Надо измерить метром длину, ширину и высоту комнаты. Длина комнаты 12 м, ширина 8 м и высота 5 м. Вычисляйте объем. — Длину умножим на ширину: $12 \times 8 = 96$. — Что вы этим узнали? — Мы узнали, что на полу комнаты поместился бы слой в 96 кубических метров. — Продолжайте. — Теперь 96 умножим на 5, потому что высота комнаты 5 м, и всех слоев поместилось бы в комнате 5: $96 \times 5 = 480$. Объем комнаты — 480 куб. м.

После призмы измеряется объем куба: сначала дети составляют куб из кубиков арифметического ящика, а потом, уже без наглядных пособий, вычисляют объем куба по данному ребру его.

Умея вычислять объем куба, ученики определяют единичные отношения кубических мер.

Прикладные задачи должны быть такими, в которых требуется вычислить объем призмы по данным трем измерениям ее.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава I. Очерк развития методики начальной арифметики.

		<i>Стр.</i>
§ 1.	Механическое письменное вычисление	5
§ 2.	Первые шаги в методике начальной арифметики	7
§ 3.	Метод изучения чисел	11
§ 4.	Метод изучения действий	18
§ 5.	Направления в методике начальной арифметики в конце XIX в. и начале XX в.	20

Глава II. Построение курса начальной арифметики.

§ 6.	Цель обучения арифметике в начальной школе	32
§ 7.	Объем и характер курса начальной арифметики	33
§ 8.	Концентрическое расположение учебного материала	34
§ 9.	Наглядность обучения и наглядные пособия	57
§ 10.	Форма обучения	66
§ 11.	Задачи и значение их в курсе начальной арифметики	67
§ 12.	Устные вычисления	74
§ 13.	Самостоятельные работы и проверка их	77

Глава III. Первый десяток.

§ 14.	Счет прямой и обратный	78
§ 15.	Присчитывание и отсчитывание по единице	80
§ 16.	Присчитывание и отсчитывание нескольких единиц	85
§ 17.	Беглый счет на сложение и вычитание	92
§ 18.	Умножение	94
§ 19.	Деление	99
§ 20.	Беглый счет на все действия	105

Глава IV. Первые два десятка.

§ 21.	Нумерация	106
§ 22.	Сложение и вычитание без перехода через десяток	108
§ 23.	Увеличение и уменьшение на несколько единиц. Разностное сравнение	110
§ 24.	Табличное сложение	114
§ 25.	Табличное вычитание	117
§ 26.	Умножение	120
§ 27.	Деление	121
§ 28.	Увеличение и уменьшение в несколько раз. Кратное сравнение	124
§ 29.	Четыре действия	129

Глава V. Круглые десятки до ста.

§ 30.	Нумерация круглых десятков	131
§ 31.	Действия над круглыми десятками	134

Глава VI. Первая сотня.

§ 32.	Нумерация	136
§ 33.	Сложение и вычитание	138
§ 34.	Умножение и деление	142
§ 35.	Простейшие дроби. Сложение и вычитание	151
§ 36.	Подготовительные упражнения к таблицам умножения и деления	159

	<i>Стр.</i>
§ 37. Таблица умножения	164
§ 38. Таблица деления	170
§ 39. Внетабличное умножение и деление	174
§ 40. Четыре действия	175

Глава VII. Первая тысяча.

§ 41. Нумерация	179
§ 42. Круглые сотни и круглые десятки	186
§ 43. Сложение и вычитание	189
§ 44. Сложение и вычитание на счетах	194
§ 45. Сложение и вычитание дробей	198
§ 46. Умножение и деление	199

Глава VIII. Числа любой величины.

§ 47. Нумерация	205
§ 48. Умножение и деление на 10, 100, 1000 и т. д.	211
§ 49. Сложение	213
§ 50. Вычитание	215
§ 51. Умножение	217
§ 52. Умножение дробей	224
§ 53. Деление	226
§ 54. Деление дробей	231
§ 55. Составные именованные числа	233
§ 56. О решении задач	240
§ 57. Типические задачи	242