ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА КАК ФОРМА ОБОБЩЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

М.В. Таранова

Новосибирский государственный педагогический университет

Дается иллюстрация конкретного примера из урока, на котором проводился контроль знаний и умений учащихся по математике с помощью творческой работы или, так называемых, учебных исследований. Такая форма контроля приучает учащихся самостоятельно мыслить и способствует развитию самоанализа.

Ключевые слова и словосочетания: формы контроля, тригонометрические уравнения, самостоятельное мышление.

Формы школьного контроля традиционно связывают с различного типа контрольными работами, работами по карточкам и т.п. Однако, как показывает многолетняя практика преподавания математики в школе, проконтролировать уровень знаний, умений и навыков можно и с помощью творческой работы, или так называемых, учебных исследований, суть которых определяется постановкой перед учащимися вопросов, требующих нового, самостоятельного подхода. Такая форма контроля способствует реализации сразу нескольких функций: формированию глубокого устойчивого интереса к математике, развитию творческого потенциала учащегося, что в итоге способствует формированию и развитию компетенций ученика по математике. Кроме того, проведение итогового урока с постановкой в нем проблемных вопросов позволяет учителю оценить меру и степень освоенности изученного материала учащимися, увидеть пробелы в знаниях учащегося, получить дополнительные сведения о творческом росте обучающегося. Следует отметить, что подобная форма контроля приучает учащихся самостоятельно мыслить и способствует развитию самоанализа.

Проиллюстрируем сказанное, обращаясь к фрагменту конкретного урока математики в 10 классе лицее №6 г. Бердска.

Тема: Решение тригонометрических уравнений с параметром.

Цель урока: обучение учащихся приему выделения всеобщего, основного отношения; приему переноса знаний на неизвестную область. Развитие творческого потенциала учащихся.

На начальном этапе урока учитель проводит проверку домашней работы (актуализация знаний).

В качестве домашнего задания учащимся было предложено решить уравнения разными способами, а затем подобрать из пособия или придумать самим тригонометрические уравнения, при решении которых используются приемы, применяемые при решении уравнений:

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$;

$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2 x = 0$;

$|2\sin x + 4| = 5$;

$2\sin x + 3\cos x = 1$.

Решение.

1. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{array}\right.$ где $n, k \in Z$.

Ответ: Это квадратное уравнение относительно $\cos x$; решением этого уравнения являются все значения переменной *x*, которые можно вычислить по формуле: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{array}\right.$ где $n, k \in Z$. Уравнение, аналогичное исходному по способу решения, может быть следующим: $\mathrm{tg} x = 2 - \mathrm{ctg} x$.

2. $2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2 x = 0$.

Ответ: Это однородное уравнение второй степени. При решении этого уравнения можно использовать два подхода: рассмотреть это уравнение как квадратное относительно $\sin x$ или $\cos x$; разделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$ (предварительно проверив возможность этого деления), а затем решить его как квадратное относительно $\mathrm{tg}\, x$ или $\mathrm{ctg}\, x$.

Решение 1.

$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2 x = 0$,

$Д = 25\cos^2 x + 4 \cdot 2 \cdot 7\cos^2 x = 81\cos^2 x$,

$$\sin x = \frac{-5\cos x \pm 9\cos x}{4}, \text{ то есть } \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{7}{2}\cos x, \\ \sin x = \cos x. \end{array}\right.$$

$\sin x = -\dfrac{7}{2}\cos x$ или $\sin x = \cos x$,

$\operatorname{tg} x = -\dfrac{7}{2}$ или $\operatorname{tg} x = 1$,

$x = -\operatorname{arctg}\dfrac{7}{2} + \pi k$ или $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где k и n – целые числа.

Замечание: деление на $\cos x$ возможно, поскольку $\cos x \neq 0$. Действительно, если бы $\cos x = 0$, тогда $\sin x = 0$, но такое равенство противоречит основному тригонометрическому тождеству.

Решение 2.

$$2\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\operatorname{arctg}\dfrac{7}{2} + \pi k, \end{array}\right. \quad \text{где } k \text{ и } n \text{ – целые числа.}$$

Уравнение, аналогичное исходному по способу решения: $\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos 2x - 4\cos^2 2x = 0$.

3. $|2\sin x + 4| = 5$.

Ответ: это линейное уравнение относительно $\sin x$. При решении этого уравнения теоретической основой является определение модуля или частные приемы решения уравнений вида $|f(x)| = a$, где a – неотрицательное вещественное число. Решением уравнения являются все значения переменной, которые можно вычислить по формуле: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, где n – целое число.

Уравнение, аналогичное исходному по способу решения может, выглядеть так: $\left|\cos x + 3\right| = 2$.

4. $2\sin x + 3\cos x = 1$.

Ответ: при решении данного уравнения можно использовать метод введения нового аргумента или, используя формулы тригонометрии, свести данное уравнение к квадратному, а затем решить его.

Решение 1 (введение нового аргумента).

$\dfrac{2}{\sqrt{13}}\sin x + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$, где $\dfrac{2}{\sqrt{13}} = \sin\varphi$ и $\dfrac{3}{\sqrt{13}} = \cos\varphi$.

Тогда, по формуле косинуса разности двух аргументов имеем: $\cos\left(x - \varphi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow x = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}} \pm \arccos\dfrac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n$, где n – целое число.

Решение 2.

$$2\sin x + 3\cos x = 1 \Leftrightarrow 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2\mathrm{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} + \pi n,$$

где n – целое число.

Уравнение, аналогичное исходному по способу решения: $5\sin x + 2\cos x = 5$.

Далее учитель организовывает работу учащихся в группах. Для этого старшеклассники разбиваются на разноуровневые группы. Цель работы в группах: слабые учащиеся учатся у более сильных умению переносить выделенные свойства или особенности рассматриваемого предмета на ранее не изученную область.

Задания для работы в группах.

1. Замените числовые данные в уравнениях 1-4 параметром и решите полученные уравнения.

2. Выберите наиболее рациональный метод решения из числа предложенных.

Комментарии: учащиеся составляют уравнения, содержащие параметр, а затем их решают. В конце проделанной работы листы с решениями сдаются учителю (для последующей проверки с целью выявления уровня овладения содержанием).

Следующим этапом является этап обобщения.

Учитель предлагает учащимся (по желанию) решить уравнение с параметром различными методами и выбрать наиболее рациональный, обосновав свой выбор.

Задание. Для всех вещественных значений параметра a решите уравнение $\sin x + 7\cos x = a$. Учащийся I решает предложенное уравнение методом введения вспомогательного аргумента.

Ответ: если $a \in \left(-\infty; -5\sqrt{2}\right) \cup \left(5\sqrt{2}; +\infty\right)$, то уравнение решений не имеет; если $a \in \left[-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}\right]$, то $x = \left(-1\right)^n \arcsin \dfrac{a}{5\sqrt{2}} - -\mathrm{arctg}7 + \pi n,\ n \in Z$.

Учащийся II решает это же уравнение, применяя формулы тригонометрии, а затем, используя метод замены переменной, сводит полученное уравнение к квадратному относительно $tg\dfrac{x}{2}$.

Ответ: если $a = -7$, то $x = -2\mathrm{arctg}7 + 2\pi n,\ n \in Z$;

если $a \in \left(-\infty; -5\sqrt{2}\right) \cup \left(5\sqrt{2}; +\infty\right)$, то уравнение решений не имеет;

если $a \in \left[-5\sqrt{2}; -7\right) \cup \left(-7; +5\sqrt{2}\right]$, то x можно вычислить по формуле $x = 2\mathrm{arctg}\dfrac{1 \pm \sqrt{50 - a^2}}{a - 7} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Комментарий: по окончании работы у доски учащиеся делают выводы о наиболее рациональном способе решения данного уравнения.

Далее учитель предлагает исследовать решения следующих уравнений:

$\sin x + a\cos x = 5$;

$a\sin x + \cos x = 5$.

По окончании решения предложенных уравнений учащиеся высказали замечание о том, что уравнение с параметром решать «и не очень-то трудно».

В конце урока учитель подводит итог проделанной работы, дает домашнее задание.

Домашнее задание.

Решите предложенные уравнения:

1. $\sin x + 7\cos x = \cos^3 x + \sin^3 x$;
2. $\sin x + a\cos x = \cos^3 x + \sin^3 x$;
3. $a\sin x + \cos x = \cos^3 x + \sin^3 x$;
4. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 1} = 0$;
5. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x - a} = 0$;
6. $\dfrac{\sin x - a}{\cos x - 1} = 0$.

Важно заметить, что атмосфера поиска и дух творческого сотрудничества дают не только возможность качественно и по-новому повторить, проконтролировать изученный материал, но и создают необходимые условия для самореализации. Заключая подобный урок, необходимо отметить положительные моменты проделанной работы, предложить тем учащимся, кто хотел бы попробовать силы в творческом исследовании, следующие задания:

1. (ЭГЭ). Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $3\sin x - 5 = p\,(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: [–8; 0).

Решение. Поскольку $1 + \mathrm{ctg}^2 x > 0$ при всех допустимых значениях переменной x, то данное уравнение равносильно следующему: $\dfrac{3\sin - 5}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} = p$.

Пусть $\sin x = t,\ \left|t\right| \le 1,\ t \ne 0$. Переформулируем задачу: требуется найти множество значений параметра p, $p = 3t^3 - 5t^2$ на интервалах [–1; 0) и (0; 1].

С этой целью построим график многочлена $p(t) = 3t^3 - 5t^2$ в системе O_{tp}.

Нули многочлена: $t = 0,\ t\dfrac{5}{3}$.

Критические точки найдем из уравнения $p'(t) = 0$. Откуда $t = 0$ и $t = \dfrac{10}{9}$.

Так как производная $9t^2 - 10t$ принимает на промежутках $(-\infty;0)$, $\left(\dfrac{10}{9};+\infty\right)$ положительные значения, на промежутке $\left(0;\dfrac{10}{9}\right)$ – отрицательное, то точка $x = 0$ является точкой максимума. Учитывая, что $\dfrac{10}{9} > 1$, получим, что на промежутках [–1; 0) и (0; 1] монотонная функция принимает наибольшее и наименьшее значения на концах промежутка: $p(-1) = -8;\ p(0) = \lim\limits_{t\to 0}\left(3t^3 - 5t^2\right) = 0;\ p(1) = -2$. Значит $p_{наиб.} = -8$; $p_{наим.} \to 0$, поэтому $-8 \le p < 0$.

2. При каких значениях параметра a неравенство $\sin x + \sqrt{10\sin x} \ge\ \ge a + 2 + \sqrt{9\sin x + a + 2}$ имеет решение?

Ответ: $-11 \le a \le -1$.

Решение. Пусть $\sqrt{10\sin x}=u,\ u\ge 0,\ \sqrt{9\sin x+a+2}=v,\ v\ge 0$. Перепишем неравенство в следующем виде $10\sin x+\sqrt{10\sin x}\ge 9\sin x+a+2+\sqrt{9\sin x+a+2}$, откуда $u^2+u\ge v^2+v$. Рассмотрим это неравенство: $u^2-v^2+(u-v)\ge 0 \Leftrightarrow (u+v)(u-v)+(u-v)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (u-v)(u+v+1)\ge 0 \Leftrightarrow u\ge v$.

Так как $u\ge v$, то $\sqrt{10\sin x}\ge\sqrt{9\sin x+a+2}$, откуда

$$\begin{cases}\sin x\ge a+2,\\ \sin x\ge 0,\\ \sin x\ge -\dfrac{a+2}{9},\\ |\sin x|\le 1.\end{cases}$$

Пусть $\sin x=t$, тогда система примет вид: $\begin{cases}t\ge a+2,\\ 0\le t\le 1,\\ t\ge -\dfrac{a+2}{9}.\end{cases}$

Теперь перейдем к рассмотрению возможных расположений точек $t=a+2,\ t=-\dfrac{a+2}{9}$ на числовой прямой относительно $t=0,\ t=1$.

Поскольку числа $a+2$ и $-\dfrac{a+2}{9}$ имеют противоположные знаки, то точки $t=a+2$ и $t=-\dfrac{a+2}{9}$ будут располагаться на числовой прямой по разные стороны относительно нуля, либо одновременно совпадают с нулем. Кроме того, точка $t=1$ либо совпадает с одной из точек $t=a+2$, $t=-\dfrac{a+2}{9}$, либо расположена правее их (рис. 1, 2).

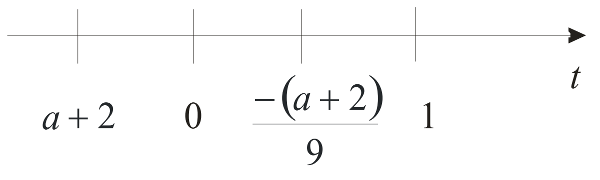

Рис. 1

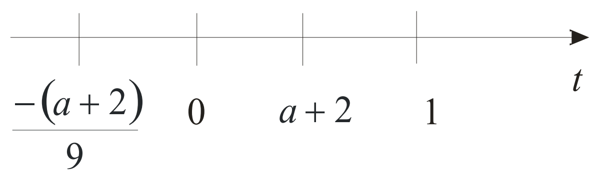

Рис. 2

Запишем совокупность рассмотренных возможностей, а затем решим ее. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+2\le 0,\\ 0\le -\dfrac{a+2}{9}\le 1;\end{cases}\\ \begin{cases}0\le a+2\le 1,\\ -\dfrac{a+2}{9}\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le -2,\\ -11\le a\le -2;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le a\le -1,\\ a\ge -2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow -11\le a\le -1.$$

Подводя итог, можно сказать, что подобные формы организации уроков контроля и обобщения, в отличие от традиционных форм (контрольная работа, тест, урок – лекция и пр.), имеют и выполняют очень важную функцию. С их помощью ученикам передаются или контролируются и некое предметное содержание в его статическом значении, и способы получения (создания), функционирования и развития этого знания, что для обучения имеет большое образовательное значение.

Библиографический список

1. **Гольдман, А.М.** Углубленное изучение математики: 8 – 11 классы / А.М. Гольдман, Л. Звавич. – М.: Просвещение, 1992. – 128 с.

2. **Дорофеев, Г.В**. О составлении циклов взаимосвязанных задач / Г.В. Дорофеев // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34 – 36.

3. **Крупич, В.И**. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В.И. Крупич. – М.: Прометей, 1995. – 166 с.

4. **Саранцев, Г.И.** Упражнение в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 1995. – 240 с.

CREATIVE WORK AS A FORM OF GENERALIZATION AND CONTROL OF STUDENTS' KNOWLEDGE AND ABILITIES IN MATHEMATICS

M.V. Taranova

The paper illustrates a concrete example from the lesson when mathematical knowledge and abilities of students are controlled using creative work or so-called learning research. Such control form accustoms students to independent thinking and contributes to the development of self-examination.

Key words: competence, creative potential, parameter.
