

Один из способов проверки решения задачи

Одна из важных задач начального курса математики — формирование умения решать текстовые задачи. Компонентом этого умения является умение проверять решение.

В методической литературе описываются четыре приема проверки: прикидка результата или установление его границ, решение задачи другим способом, установление соответствия результата решения условию задачи. Каждый из указанных приемов обладает рядом достоинств и недостатков (см., например, об этом статью в № 2 журнала «Начальная школа» за 1984 г.), обуславливающих возможности обучения этим приемам. Но есть общий недостаток у всех перечисленных приемов — каждый из них направлен на проверку конечного результата и в абсолютном большинстве случаев не дает возможности обнаружить ошибки в ходе решения, если они допущены. Кроме того, при проверке любым из перечисленных приемов в разряд правильных может попасть решение с несколькими взаимно компенсирующими друг друга ошибками, когда решение неверно, а результат — ответ на вопрос задачи — верен.

Эти недостатки наряду с другими причинами в определенной мере способствуют тому, что в практике обучения такие приемы проверки используются редко. Но есть прием проверки, который не освещен в методической литературе, но которым на интуитивном уровне с успехом пользуются учителя для доказательства неверности арифметического, а иногда и алгебраического решения текстовой задачи.

Кто не помнит случаев на уроке, когда учитель говорит незадачливому ученику: «Посмотри на свое второе действие. Что обозначает число 30? (Число ящиков с грушами.) А число 4? (Ящиков с яблоками на 4 больше, чем с грушами.) Так что же ты получишь, умножая ящики (число ящиков) на ящики (на число ящиков)? (Ничего.) Вот то-то же! Бессмыслицу ты получишь. Неправильно выбрал второе действие. Давай думать, что и как следовало бы узнать во втором действии».

В описанной ситуации учитель использовал проверку решения задачи путем определения смысла составленных по задаче выражений (действий) и последующей проверки правильности вычислений. Думаю, что настала пора осмыслить теоретически этот прием,

определить его место среди других приемов и дать возможность учителю сознательно применять его в обучении.

Вначале подробно опишем образцы полных рассуждений при проверке решения задачи рассматриваемым приемом.

При самостоятельном решении приведенной ниже задачи учащиеся I класса одной из школ г. Новосибирска получили два разных решения.

Задача 91 (Математика. 1, с. 140):

«Мальчик купил альбом за 30 к. В кассу он подал две монеты: 15 к. и 20 к. Сколько сдачи получит мальчик?»

Большинство учащихся записали решение так:

1) $15+20=35$ (к.)

2) $35-30=5$ (к.)

О т в е т: 5 к. сдачи получит мальчик.

Однако некоторые учащиеся записали решение так:

1) $30+15=45$ (к.)

2) $45-20=25$ (к.)

О т в е т: 25 к. сдачи получит мальчик.

Приведем полностью все рассуждения (при проверке в классе они проводятся устно).

Проверка первого решения.

Читаю выражение в первом действии: сумма пятнадцати и двадцати (к пятнадцати прибавить 20). Нахожу в тексте задачи, что обозначает число 15 и число 20. 15 и 20 — это 15 к. и 20 к., которые мальчик подал в кассу. Тогда сумма чисел 15 и 20, а также результат 35 будут показывать, сколько всего копеек подал мальчик в кассу.

Читаю выражение во втором действии: разность тридцати пяти и тридцати. Выясняю, что обозначает каждое число в этом выражении. 35 — это результат первого действия, который показывает, сколько всего денег мальчик подал в кассу. 30 — это 30 к. стоит альбом, который купил мальчик, значит, столько копеек должен взять у мальчика кассир. Тогда разность $35-30$ будет показывать, сколько денег останется у мальчика или сколько копеек сдачи получит мальчик.

Второе действие — последнее в записи решения. Поэтому читаю вопрос задачи: «Сколько сдачи получит мальчик?» В вопросе задачи как раз и спрашивается то, что показывает последнее действие. Следовательно, действия при решении задачи выбраны верно.

Проверим вычисления: $15+20=10+20+5=30+5=35$ — верно; из числа 35 вычли 30, получили 5, т. е. из числа, состоящего из 3 десятков и 5 единиц, вычли все десятки, остались 5 единиц. Второе действие тоже выполнено верно. Так как при решении задачи правильно выбраны действия и правильно

выполнены вычисления, то задача решена верно. Правильный ответ на вопрос задачи — мальчик получит 5 к. сдачи.

Проверка второго решения.

Читаю выражение в первом действии: сумма тридцати и пятнадцати (к тридцати прибавить 15). Нахожу в тексте задачи, что обозначают числа 30 и 15. 30 — это 30 к. стоит альбом, который купил мальчик. 15 — это монета в 15 к., поданная мальчиком в кассу. Значит, сумма $30+15$ — это сумма стоимости альбома и достоинства монеты, которой мальчик платит за альбом. Эта сумма в данной задаче не имеет смысла (ни для кассира, ни для мальчика, если мы представим реальную ситуацию, эта сумма не имеет никакого значения). Но это означает, что первое действие выбрано неверно, число 45, полученное в результате этого действия, не имеет смысла, но тогда не имеет смысла и второе действие. Задача решена неверно, причем ошибка допущена в первом действии.

На уроке рассуждения могут быть короче за счет сокращения обосновывающей их части в соответствии с особенностями мышления учащихся конкретного класса и с уровнем их математической подготовки. Так, например, в классе, у учащихся которого сформированы прочные вычислительные навыки, достаточно констатации того, что вычисления выполнены верно. В статье же мы сознательно приводим развернутые рассуждения, чтобы читатель мог понять их логику и суть рассматриваемого приема проверки.

Приведем еще один пример.

Задача 864 (1) (Математика. 3):

«Нужно покрасить 150 рам. Один маляр может это сделать за 15 дней, другой — за 10 дней. За сколько дней выполнят эту работу оба маляра, если будут работать вместе?»

Возьмем решения двух учеников, решавших задачу по-разному, но получивших одинаковые ответы на вопрос задачи.

Решение первого ученика:

1) $15+10=25$ (дн.)

2) $150:25=6$ (дн.)

О т в е т: работая вместе, оба маляра выполнят работу за 6 дней.

Решение второго ученика:

1) $150:15=10$ (рам)

2) $150:10=15$ (рам)

3) $10+15=25$ (рам)

4) $150:25=6$ (дн.)

О т в е т: работая вместе, оба маляра выполнят работу за 6 дней.

Проверим первое решение. Читаю выражение в первом действии: к пятнадцати прибавить 10 (сумма пятнадцати и десяти). Обращаюсь к тексту задачи. 15 — это 15 дней,

за которые может покрасить имеющиеся 150 рам первый маляр. 10 — это 10 дней, за которые может покрасить те же 150 рам второй маляр. Очевидно, что сумма не имеет смысла, так как не характеризует ни совместную работу, ни работу каждого маляра. Значит, первое действие выбрано неверно. По данным 15 дней и 10 дней ничего, что нужно для решения задачи, узнать нельзя. Нужно брать другие данные, например 150 рам и 15 дней. Далее продолжается уже поиск плана решения.

Второе решение проверяется аналогично. Читаю первое выражение, нахожу в тексте задачи, что обозначает каждое число в нем. Определяю, что обозначает выражение и результат и т. д.

Предоставляем читателю самостоятельно провести все рассуждения. Завершиться они должны выводом: все действия имеют смысл, последнее действие (результат последнего действия) дает ответ на вопрос задачи; правильно выполнены все вычисления, значит, задача решена правильно.

Приведем еще пример проверки для случая,

когда при решении задачи ученик выполнил не все действия, а потому и неверно ответил на вопрос задачи. Как известно, подобную ошибку часто допускают первоклассники при переходе к решению составных задач.

Например, при решении задачи «Маляр покрасил за день 10 парт, а его ученик на 4 парты меньше. Сколько всего парт они покрасили за день?» ученик записал такое решение:

$$10 - 4 = 6 \text{ (парт)}.$$

О т в е т : 6 парт они покрасили за день.

П р о в е р к а . Читаю первое выражение: из десяти вычесть 4 (разность десяти и четырех). Нахожу в тексте задачи, что обозначает число 10 и число 4. 10 — это 10 парт покрасил за день маляр. 4 — это на 4 парты меньше покрасил за день его ученик. Тогда $10 - 4$ — это число парт, которые покрасил за день ученик. Читаю вопрос задачи: «Сколько всего парт они (маляр и ученик) покрасили за день?» Это ли показывает выражение $10 - 4$? Нет. Значит, на вопрос задачи я не ответил, я узнал только, сколько парт за день покрасил ученик. А мне нужно узнать, сколько всего парт покрасил маляр и ученик вместе. Зная, что ученик покрасил 6 парт, а маляр — 10, я могу узнать, сколько парт покрасили они вместе. Для этого достаточно сложить числа 6 и 10.

Как видим, проверка сразу же переходит в поиск правильного решения.

Может показаться, что проверка повторяет рассуждения при выборе арифметических действий. Действительно, общее в выборе

действий и при проверке есть — это внимание к смыслу каждого числа, действия, предложения. Однако в рассуждениях при выборе действия мысль идет от содержания, текста задачи к математической записи, а при установлении смысла выражений (действие над конкретными числами) мысль, наоборот, идет от математической записи к конкретной ситуации. Это различие позволяет решающему взглянуть на свое решение с другой стороны, по-новому.

Остановимся теперь на вопросах обучения умению проверять свое решение рассматриваемым приемом.

Подготовкой к ознакомлению с приемом следует считать всю работу, связанную с формированием у учащихся понимания смысла арифметических действий. Но особо нужно выделить выполнение учащимися приведенных ниже заданий.

1. Учитель выполняет на фланелеграфе (на наборном полотне) действия с предметными картинками, а учащиеся выкладывают на партах из разрезных цифр и знаков соответствующее числовое выражение или равенство.

Например, учитель выставляет на наборное полотно 5 морковок. После небольшой паузы выставляет рядом еще 3 морковки и просит записать с помощью цифр и знаков то, что она сделала. Затем спрашивает: что обозначает в вашей записи число 5? Число 3? Что обозначает запись $5+3$?

После этого учитель предлагает взять знак равенства и продолжить запись, глядя на наборное полотно, а затем спрашивает: что обозначает число 8?

Аналогично задания выполняются с другими арифметическими действиями, в частности с действиями умножения и деления.

2. Учитель показывает карточку с записью числового выражения, например $6-4$ ($10:2$ или $7 \cdot 2+5$ и т. п.) Учащиеся у себя на партах должны показать с помощью фишек (кругов, квадратов, палочек, полосок бумаги и т. п.), что может обозначать данное выражение. Учитель наблюдает за действиями детей и затем спрашивает нескольких учеников: что обозначает число 6? Число 4? Что обозначает выражение $6-4$? Запись $6-4=2$? Что обозначает число 2?

3. Учитель читает текст простой задачи, а учащиеся должны записать на карточках или в тетрадах соответствующее выражение или равенство, дающее ответ на вопрос задачи. При проверке ученики объясняют, что обозначает каждое число в выражении, все выражение, результат — значение выражения.

4. На доске записаны два выражения (после ознакомления с действиями умножения

и деления — четыре выражения): $10-2$, $10+2$, $10:2$, $10\cdot 2$. Учитель говорит, что обозначает каждое число, а учащиеся должны сказать, что обозначает в этом случае каждое из выражений. Например, учитель говорит: пусть 10 — число ягод клубники на блюде, а 2 — число ягод малины на блюде. Что может обозначать $10-2$, $10+2$?jt-

5. Даны текст задачи и несколько выражений, составленных из чисел, имеющих в задаче. Определить, что обозначает каждое выражение.

6. Составить задачу, ответ на вопрос которой давали бы выражения $9+6$, $10-4$, $12:6$, $7\cdot 3$ и т. п.

Следующий шаг в использовании рассматриваемого приема проверки на уроке проверка под руководством учителя. Полезно использовать этот прием при проверке самостоятельно решенной учащимися задачи, при проверке решения, выполненного учеником у доски, при проверке домашней работы. Особенно важна описанная проверка тогда, когда есть неверные решения.

Например, самостоятельно решая задачу «Машина прошла в первый день 360 км, во второй день — $\frac{2}{3}$ этого пути. На каждые 100 км пути она расходовала 12 л бензина. Сколько литров бензина израсходовала машина за два дня?», часть учащихся записала ее решение так:

1) $360:3\cdot 2=240$ (км) — прошла машина во второй день.

2) $360:12=30$ (л) — столько бензина израсходовала машина в первый день пути.

3) $240:12=30$ (л) — столько бензина израсходовала машина во второй день.

4) $30+20=50$ (л) — столько бензина израсходовала машина за два дня.

Ответ: 50 л.

Учитель так организовал проверку. Он записал это решение на доске и предложил учащимся проверить его, определив смысл каждого действия: прочитайте первое действие. Найдите в тексте задачи, что обозначает число 360 ? Числа 3 и 2 ? Что обозначает число 240 ? Правильно ли записано пояснение к действию? Прочитайте второе действие. Найдите в тексте задачи, что обозначает число 360 ? Число 12 ? (360 км — это путь, пройденный машиной в первый день. 12 — это количество бензина, которое расходует машина на 100 км пути.)

— Обратите внимание на то, что 12 л — это расход бензина на 100 км, а не на 360 км. Что будет обозначать частное трехсот шестидесяти и двенадцати? (Ничего. Ес-

ли бы 12 л — это был расход за 360 км, то тогда частное обозначало бы, сколько километров пути можно проехать, израсходовав 1 л бензина. А в решении данной задачи это действие не имеет смысла.) Какой вывод можно сделать относительно правильности второго действия? (Второе действие выбрано неверно. Делить число 360 на 12 для решения задачи не нужно.)

Далее было найдено правильное решение.

В применении рассматриваемого приема проверки ценно то, что он требует обращения к тексту задачи уже после выбора действия. А это предупреждает механическое манипулирование числами и действиями, что иногда наблюдается в практике.

При проверке задачи, решенной учащимися дома, учитель просит вначале прочитать текст задачи вслух, записать решение на доске или прочитать его вслух и выяснить, есть ли другие решения. Затем работа проводится так, как описано выше.

Выполняя проверку под руководством учителя, дети накапливают опыт в проведении основных шагов этого приема, готовятся к сознательному и целенаправленному его усвоению. Начало такому усвоению положит урок, на котором целью деятельности учащихся будет запомнить, что и в какой последовательности делать, чтобы установить, правильно ли решена задача, потренироваться в проведении такой проверки. Время проведения этого урока выбирается в зависимости от уровня подготовленности учащихся. Урок явного, специального обучения учащихся рассматриваемому приему можно провести в любом классе, подобрав соответствующие задачи. Опишем кратко возможный ход этого урока.

Прежде всего нужно позаботиться о том, чтобы на уроке была создана такая учебная ситуация, в которой дети увидят необходимость проверки. Это можно сделать двумя путями.

Первый. Для самостоятельного решения предлагается задача, которую часть учащихся (и учитель это знает) решит неправильно. После решения учитель просит ответить на вопрос задачи. Обнаруживается, что ответы разные. Возникает необходимость в выяснении правильного решения. Теперь самое время показать учащимся образец проверки.

Второй. Учитель заранее записывает на доске два решения одной и той же задачи, одно из которых неверное. На уроке учитель сообщает, что к нему обратились два ученика с просьбой разрешить их спор: каждый утверждает, что его решение верное. Чтобы разрешить их спор, можно, конечно, решить задачу всем вместе, обосновывая каждый свой шаг, но есть специальный

прием проверки, позволяющий не только установить, верно ли решена задача, но и найти ошибку в неправильном решении. Давайте воспользуемся им. Прочитайте первое действие (выражение в первом действии). Посмотрите в текст задачи и найдите в нем, что обозначает каждое число в выражении. Подумайте, что может обозначать выражение и его результат. Прочитайте второе действие (выражение во втором действии). Посмотрите в текст задачи и скажите: что обозначает число?.. Что обозначает второе число? Подумайте, что будет обозначать выражение и его результат? И т. д. — пока не будет сделан вывод.

Полезно перед началом проверки сделать установку на запоминание последовательности рассуждений, а после вывода о правильности или неправильности решения попросить учащихся повторить рассуждения (можно и учителю повторить и записать в виде памятки основные шаги этих рассуждений).

Первичное закрепление следует провести в виде коллективной проверки учащимися второго решения, причем так как основные шаги проверки записаны на доске, то учащиеся сами говорят, что нужно делать, учитель лишь побуждает их к выполнению соответствующих шагов: «Нам нужно проверить это решение. Саша, скажи, что нужно для этого сделать вначале? (Прочитать первое действие, найти в тексте задачи, что обозначает каждое число в нем.) Лена, как ты будешь это выполнять?.. Что нужно сделать теперь? (Определить, что обозначает результат.) Таня, выполняй, проговаривая все рассуждения вслух...» И т. д.

При подведении итога этой работы можно задать детям такие вопросы: чему вы учились сегодня на уроке? (Учились проверять решение задачи.) Что нужно делать, чтобы проверить решение тем приемом, которому вы сегодня учились? (Нужно прочитать первое действие, прочитать в задаче, что обозначает каждое число в нем, определить, что обозначает результат. Если результат не будет иметь смысла, то задача решена неправильно. Если же результат будет что-то обозначать, то читаем второе действие. Опять смотрим в текст задачи и, если надо, на результат предыдущего действия и определяем, что обозначает результат. После того как определим, что обозначает результат последнего действия, читаем вопрос задачи и выясняем, дает ли ответ на вопрос задачи последнее действие).

На следу этих уроках умение проверять решение задачи рассматриваемым способом закрепляется при проверке задач, решенных дома, когда учитель просит доказать правиль-

ность решения с помощью определения того, что обозначает каждое число и действие в записи решения. Полезно давать и специальное задание: «Выбери из двух данных решений верное, определяя, что обозначает каждое число и действие в записи решения». В устные упражнения целесообразно включать и те упражнения, которые мы рекомендовали для подготовительного периода.

После того как учащиеся достаточно хорошо поймут суть приема, можно предлагать для проверки решения, записанные в виде выражения или равенства (после вычисления значения выражения). В этом случае устанавливается порядок действий, а затем рассуждения ведутся по порядку для каждого действия так же, как и при записи решения по действиям.

Обучение описанному приему проверки важно не только для формирования у учащихся умения проверять решение, но и для формирования умения выбирать действия, так как при хорошем владении этим приемом контроль решающим проводится уже не после завершения решения, а после выбора каждого действия.

С. Е. ЦАРЕВА,
Новосибирский педагогический институт